



ки и устойчивости высотных зданий и сооружений была отмечена и в работах И. И. Голденבלата [10], где указывалось на чрезвычайную важность их учета, особенно при исследовании сейсмостойкости высотных зданий и сооружений.

**Постановка задачи.** Для того чтобы перейти к понятию нелинейной инерционности, рассмотрим простую задачу.

Пусть упругий однородный стержень (балка) постоянного сечения с длиной  $l$  зашцеилен в грунте. При колебании грунта с амплитудой  $y_0$  будет колебаться и балка с распределенной по длине массой в плоскости  $xOy$  (плоскость рис. 1). Если мысленно перенести балку на величину  $y_0$  (рис. 1), то по инерции произвольное сечение ее будет перемещаться по направлению движения, вызывая ее прогиб на величину  $y$ . Рассмотрим упругую зашцеиленную в грунте балку с распределенной по длине массой. В недеформированном состоянии балка занимает вертикальное положение  $AO$  (рис.1). В процессе изгибных колебаний произвольная точка балки переместится из положения  $K$  в  $K_1$  с координатами  $x-u_x$  и  $y$ . Если принять  $y$  за величину первого порядка малости, то при условии нерасторжимости стержня разность между абсциссой точек  $K$  и  $K_1$  окажется величиной второго порядка малости. Обычно при малых колебаниях этой величиной пренебрегается.

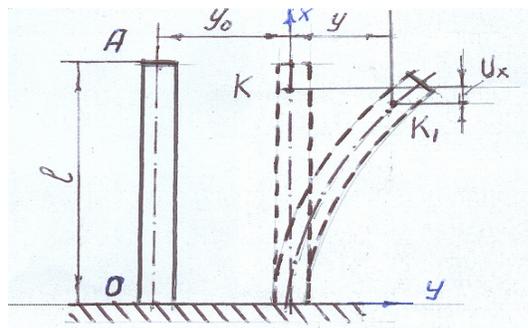


Рис. 1. Балка, зашцеиленная одним концом в грунте, с распределенной по длине массой.

Перемещение произвольного сечения, изображаемого точкой  $K$ , на величину  $y$  за счет деформации изгиба балки приведет к ее перемещению в вертикальном направлении на величину  $u_x$  (рис.1). В этом случае возникает дополнительная вертикальная сила  $\Delta N_x = m' \cdot \ddot{u}_x$ , где  $m'$  – масса единицы длины балки ( $m' = \frac{m}{l}$ ,  $m$  – масса балки). Величину  $u_x$  можно найти как разность между первичной длиной балки  $l$  и проекцией искривленной балки по направлению вертикали [5]

$$u_x = l - \int_0^l \cos \theta dx = l \left( 1 - \int_0^l \sqrt{1 - \left( \frac{dV}{dx} \right)^2} \cdot dx \right). \quad (1)$$

Разложив радикал в ряд

$$\sqrt{1 - \left( \frac{dV}{dx} \right)^2} = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{dV}{dx} \right)^2 - \frac{1}{8} \left( \frac{dV}{dx} \right)^4 - \dots$$

и интегрируя его, получим

$$u_x = \frac{l}{2} \int_0^l \left( \frac{dV}{dx} \right)^2 dx + \frac{l}{8} \int_0^l \left( \frac{dV}{dx} \right)^4 dx + \dots, \quad (2)$$

Здесь  $V$  – фундаментальная функция [3]

$$V = V(u_x, t) = y \cdot \sin \frac{\pi x}{2l}. \quad (3)$$

Подстановка (3) в (2) дает

$$u_x = \frac{\pi^2}{4l} \cdot y^2 + \frac{3}{64} \cdot \frac{\pi^4}{l^3} \cdot y^4 + \dots$$

Пренебрегая остальными членами ряда, кроме первого, и продифференцировав  $u_x$  дважды по времени, получим

$$\ddot{u}_x = \frac{\pi^2}{2l} \left[ y \cdot \ddot{y} + (\dot{y})^2 \right]. \quad (4)$$

С учетом (4) вертикальная сила инерции будет

$$\Delta N_x = \frac{m}{l} \cdot \frac{\pi^2}{2l} \left[ y \cdot \ddot{y} + (\dot{y})^2 \right] = \frac{\pi^2 m}{2l^2} \left[ y \cdot \ddot{y} + (\dot{y})^2 \right]. \quad (5)$$

Приняв во внимание равномерность распределения массы по длине балки и основываясь на вариационных принципах Галеркина – Остроградского, уравнение колебания представим в виде

$$\mathcal{E} \mathcal{S} \frac{d^4 V}{dx^4} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \Delta N_x \cdot \frac{\partial V}{\partial x} \right) + m' \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = m \ddot{y}_0(t). \quad (6)$$

С помощью вариационного метода Галеркина уравнение (6) с учетом (3) и (5) можно привести к обыкновенному дифференциальному уравнению вида

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y + 2\chi_1 y \left[ y \cdot \ddot{y} + (\dot{y})^2 \right] = \ddot{y}_0(t),$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{3\mathcal{E}\mathcal{S}}{m' \cdot l^4}; \quad \chi_1 = \frac{\pi m}{4l^2 \cdot m'} \left( \frac{1}{3} - \frac{5}{8\pi^2} \right). \quad (7)$$

Влияние силы нелинейной инерционности балки с распределенной массой можно заменить эквивалентной массой, сосредоточенной на свободном конце балки. Тогда для балки с массой, сосредоточенной на свободном конце, уравнение колебания без учета сопротивлений будет иметь вид

$$\ddot{y} + \frac{c}{m} y + \varphi(y, \dot{y}, \ddot{y}) = \ddot{y}_0(t). \quad (8)$$

Вертикальное перемещение сосредоточенной массы можно найти, как и прежде, из выражения

$$u_x = \frac{\pi^2}{4l} \cdot y^2,$$

тогда будем иметь

$$\ddot{u}_x = \frac{\pi^2}{2l} [y \cdot \ddot{y} + (\dot{y})^2]. \quad (9)$$

С учетом (9) уравнение колебания балки с сосредоточенной массой на конце будет иметь вид

$$\ddot{y} + \Omega^2 y + 2\mathcal{X} \cdot y [y \cdot \ddot{y} + (\dot{y})^2] = \ddot{y}_0(t), \quad (10)$$

где

$$\Omega^2 = \omega_0^2 \left( 1 + \frac{mgl^2}{3E\mathfrak{S}} \right); \quad \omega_0^2 = \frac{3E\mathfrak{S}}{ml^3}, \quad \mathcal{X} = \frac{\pi^2}{4l^2}.$$

Если сравнить значение  $\mathcal{X}_1$  для случая балки с распределенной массой со значением  $\chi$  для случая балки с сосредоточенной на свободном конце массой, то можно распределенную массу балки заменить эквивалентной массой, сосредоточенной на свободном конце балки, и тогда эквивалентная масса будет равна

$$m_s = \left( \frac{1}{3} - \frac{5}{8\pi^2} \right) \cdot \frac{m}{\pi}.$$

Уравнение (10) с учетом эквивалентной массы и сопротивления среды будет иметь вид

$$\ddot{y} + 2k_1 \dot{y} + \Omega_1^2 y + 2\mathcal{X} y [y \cdot \ddot{y} + (\dot{y})^2] = \ddot{y}_0(t); \quad (11)$$

здесь

$$\Omega_1^2 = \omega_{01}^2 \left( 1 + \frac{m_s \cdot g \cdot l^2}{3E\mathfrak{S}} \right); \quad \omega_{01}^2 = \frac{3E\mathfrak{S}}{m_s l^3}.$$

Дальнейшее решение уравнения (11) проводится по форме

$$y = a(t) \sin \omega t + b(t) \cos \omega t, \quad (12)$$

где  $a(t)$  и  $b(t)$  – медленно изменяющиеся амплитуды.

Уравнение (11) перепишем в виде

$$\ddot{y} + \Omega_1^2 y = \omega^2 y_0 \sin \omega t + (\omega_0 - \Omega_1^2) y - 2k_1 \dot{y} - 2\mathcal{X} y [y \cdot \ddot{y} + (\dot{y})^2]. \quad (13)$$

Приближенное решение уравнения (13) с учетом (12) можно представить в виде

$$a(t) = \frac{1}{2\omega} \int_0^t G(\tau) d\tau; \quad b(t) = \frac{1}{2\omega} \int_0^t F(\tau) d\tau. \quad (14)$$

Подставив (12) (с учетом (14)) в уравнения (13) и разложив в ряд, получим

$$F(a, b) = \omega^2 y_0 + (\omega^2 - \Omega_1^2) a - 2k_1 \omega^2 b - \varphi(a, b),$$

$$G(a, b) = -(\omega^2 - \Omega_1^2)b - 2k_1\omega^2 a - \psi(a, b),$$

где  $\varphi(a, b)$  и  $\psi(a, b)$  – пока еще неизвестные функции.

После дифференцирования (14) получим уравнения Ван дер Поля

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = \frac{1}{2\omega} G(a, b), \\ \frac{db}{dt} = \frac{1}{2\omega} F(a, b) \end{cases} \quad (15)$$

или в более развернутой форме

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = \frac{1}{2\omega} [ -(\omega^2 - \Omega_1^2) ] b - 2k_1\omega a - \varphi(a, b), \\ \frac{db}{dt} = \frac{1}{2\omega} (\omega^2 y_0 (\omega^2 - \Omega_1^2) a - 2k_1\omega b - \psi(a, b)). \end{cases}$$

Вместо уравнения (11) мы получили простую систему из двух уравнений первого порядка, которая не содержит явного времени. В случае стационарного режима колебания  $\frac{da}{dt} = \frac{db}{dt} = 0$ , и для установившихся амплитуд получим систему двух алгебраических уравнений

$$\begin{cases} -(\omega^2 - \Omega_1^2)b - 2k_1\omega a - \varphi(a, b) = 0, \\ \omega^2 y_0 + (\omega^2 - \Omega_1^2)a - 2k_1\omega b - \psi(a, b) = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Неустойчивое решение линейной задачи на границах первой, третьей и вообще нечетных областей согласно [1-3] имеет вид

$$y(t) = \sum_{n=1,2,3} \left( a_n \sin \frac{n\omega t}{2} + b_n \cos \frac{n\omega t}{2} \right), \quad (17)$$

где  $a_n$  и  $b_n$  – искомые постоянные.

Ряд (17) при определенном выборе коэффициентов может удовлетворять уравнению (11). В самом деле, результаты подстановки (17) в (11) не будут содержать никаких других периодических членов, кроме  $\sin \frac{n\omega t}{2}$  и  $\cos \frac{n\omega t}{2}$ . Условие будет выполнено только в том случае, если нелинейная

функция не будет содержать членов четной степени. Если нас интересуют колебания, происходящие при главном резонансе, когда  $\omega = 2\Omega_1$ , то мы можем пренебречь разложением (17), положив приближенно

$$y(t) = a \sin \frac{\omega t}{2} + b \cos \frac{\omega t}{2}. \quad (18)$$

Разложив функцию нелинейной инерционности  $\psi(y, \dot{y}, \ddot{y})$  в ряд Фурье, подставив (18) в (13) и приравнявая коэффициенты при одинаковых  $\sin$ -ах и  $\cos$ -ах, получим систему двух уравнений, содержащих неизвестные  $a$  и  $b$

$$\begin{cases} \left(\Omega_1^2 - \frac{\omega^2}{4}\right)a - k\omega b + \varphi(a,b) = 0, \\ \left(\Omega_1^2 - \frac{\omega^2}{4}\right)b - k\omega a - \psi(a,b) = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Для определения  $\varphi(a,b)$  и  $\psi(a,b)$  подставим (18) в (13).

Вычисление дает

$$\varphi(a,b) = -\frac{A^4}{4} \chi \cdot \omega^2 \cdot a; \quad \psi(a,b) = -\frac{A^4}{4} \chi \cdot \omega^2 \cdot b. \quad (20)$$

Здесь члены, содержащие гармоники, не вписаны, а через  $A$  обозначена амплитуда установившихся колебаний

$$A^2 = a^2 + b^2.$$

С учетом (20) система уравнений (19) примет вид

$$\begin{cases} (1-n^2)a - \frac{k'n}{\pi}b + A^2(-\chi \cdot n^2 a) = 0, \\ (1-n^2)b - \frac{k'n}{\pi}a + A^2(-\chi \cdot n^2 \cdot b) = 0, \end{cases} \quad (21)$$

где

$$n = \frac{\omega}{2\Omega_1}, \quad k' = \frac{2\pi}{\Omega_1} \cdot k.$$

Система имеет отличное от нуля решение в том случае, если определитель системы, составленной из коэффициентов при неизвестных, равен нулю. Решением уравнения (21) относительно установившихся движений будет

$$A = \frac{1}{m\sqrt{\chi}} \cdot \sqrt{1-n^2} \pm \frac{k'n}{\pi} \quad \text{или} \quad A = \frac{2}{\omega\sqrt{\chi}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\Omega_1^2} \pm \frac{\pi k' \omega}{\Omega_1^2}}. \quad (22)$$

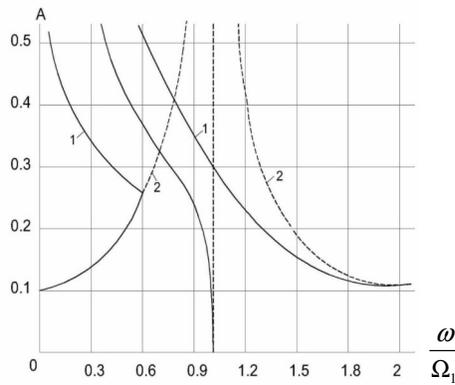


Рис. 2. Зависимость амплитуды колебания вершины балки (или высотного здания) от соотношения вынужденных и собственных частот. 1 – с учетом нелинейной инерционности, 2 – без учета.

Здесь мы имеем два решения, одно из которых неустойчиво. На рис. 2 приведен график, построенный по уравнению (22) (зависимость амплитуды-

ды  $A$  от соотношения  $\frac{\omega}{\Omega_1}$ ). Как видно из рисунка, резонансные кривые имеют наклон в сторону меньших частот. Первая собственная частота снижается почти на 35%. Причиной этого является нелинейная инерционность, и если система будет обладать еще и нелинейной упругостью, то она может попасть в область динамической неустойчивости. В этом случае конечность амплитуды колебания может сохраниться лишь за счет наличия нелинейного затухания. Помимо увода балки из опасной области путем изменения ее параметров могут быть рекомендованы и такие приемы, как введение в систему линейных и нелинейных сил сопротивления (демпферов).

**Выводы.** Исследования колебательных процессов с большой амплитудой, проведенные на закрепленной одним концом в грунте балке с распределенной по высоте массой, имитирующей высотное здание, показывают, что нелинейная инерционность возникает за счет продольного перемещения произвольного сечения балки при ее изгибных колебаниях в горизонтальной плоскости. Полученные функции нелинейной инерционности и уравнение колебания балки с распределенной по длине массой позволили получить амплитудно-частотные кривые и раскрыть причину уклона резонансных кривых в сторону низких частот, что предполагает возможность возникновения параметрических колебаний и субгармонических резонансов, которые особенно опасны для высотных зданий и сооружений при землетрясении.

Институт механики НАН РА

**Г. Г. Шекиян**

### **Динамика и устойчивость балки, защемленной одним концом в грунте**

Современные методы математического описания горизонтальных колебаний высотных зданий справедливы лишь для колебательных процессов с малыми амплитудами. Однако при землетрясениях отклонение вершин высотных зданий достигает порой одного метра и более. При таких колебаниях произвольное сечение здания, помимо горизонтальных перемещений, перемещается и в вертикальном направлении, вследствие чего возникают нелинейные инерционные силы. Рассмотрены колебания с равномерно распределенной по длине и сосредоточенной на свободном конце массой балок с учетом нелинейной инерционности. Получены уравнения колебания таких балок с учетом нелинейной инерционности, а также функции нелинейности и зависимость амплитуды колебания произвольного сечения балки от максимального ускорения грунта, которое может возникнуть при землетрясении.

## Հ. Գ. Շեկյան

### Մի ծայրով գետնահողում ամրակցված հեծանի դինամիկան ու կայունությունը

Բարձրահարկ շենքերի հորիզոնական տատանողական շարժման նկարագրման ժամանակակից մաթեմատիկական եղանակները ճիշտ են միայն փոքր ամպլիտուդով տատանողական պրոցեսների համար: Սակայն երկրաշարժի ժամանակ շենքերի կատարների տատանման ամպլիտուդը հաճախ հասնում է մեկ մետրի և ավելին: Հորիզոնական ուղղությամբ այդպիսի մեծ ամպլիտուդով տատանումների ժամանակ շենքի ցանկացած ընդլայնական կտրվածք ինչ-որ չափով տեղաշարժվում է նաև ուղղահայաց, որի պատճառով առաջանում են ոչ գծային իներցիոն ուժեր: Աշխատանքն ուղղված է այդ ոչ գծային իներցիոն ուժերի բացահայտմանը: Դիտարկված է մի ծայրով գետնահողում ամրակցված, մյուս ազատ ծայրում կենտրոնացված կամ երկարությամբ հավասարաչափ բաշխված զանգվածով հեծան, որը նմանակում է բարձրահարկ շինություն և կատարում է մեծ ամպլիտուդով ընդլայնական տատանումներ: Ստացված է մի ծայրով գետնահողում ամրակցված, հավասարաչափ բաշխված զանգվածով հեծանի ընդլայնական տատանման հավասարումը՝ ոչ գծային իներտության ֆունկցիայի հաշվառումով: Ստացված են նաև ոչ գծային իներտության ֆունկցիան և ցանկացած ընդլայնական կտրվածքի տատանման ամպլիտուդի կախվածությունը գետնահողի տատանման մաքսիմալ արագացումից, որը կարող է առաջանալ երկրաշարժի ժամանակ:

## H. G. Shekyan

### Dynamics and Stability Fixed by One End in the Beam Ground

Existing methods of mathematical description of transverse oscillations of high-rise buildings are just superfluous for oscillatory processes with small amplitudes. In earthquakes, the amplitude of transverse oscillations of the tops of high-rise buildings sometimes reaches up to a meter and more. With such oscillations in the horizontal direction, an arbitrary section of the building moves in the vertical direction, contributing to the appearance of nonlinear inertial forces. The work is aimed at investigating the nuclear inertia, crammed at one end in the beam ground with a mass concentrated at the free end, which imitates a high-rise building, with transverse vibrations. The function of nuclear inertia, the equation of oscillation of a beam with a mass distributed over the length, and the dependence of the oscillation amplitude on the maximum acceleration of the soil, taking into account nuclear inertial forces, are obtained.

## Литература

1. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М. Физматгиз. 1959. 325 с.
2. Манделъштам Л. И. Сб. труд. II изд. АН. СССР. 1947. С. 7-12.
3. Папалекси Н. Д. Сб. труд. 1948. 456с.
4. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. М. Наука. 1955. 655 с.

5. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М. Гостехиздат. 1947. 369 с.
6. Рябов Ю. А. В кн.: Об оценке области при методе малого параметра в задачах теории нелинейных колебаний. Тр. Междунар. симп. по нелинейным колебаниям. Киев. 1963. С. 425-445.
7. Ляпунов А. М. Общая задача устойчивости движения. М. Гостехиздат. 2005. 176 с.
8. Малкин И. Г. Метод Пуанкаре и Ляпунова в теории нелинейных колебаний. М. Гостехиздат. 2004. 251 с.
9. Пуанкаре Ж. А. Избранные труды. М. Наука. 1974. 678 с.
10. Голденблат И. И. Динамическая устойчивость сооружений. М. Стройиздат. 1978. 846 с.
11. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику. М. Изд. НИЦ "РХД". 2004. 353 с.
12. Летов А. М. Устойчивость нелинейных систем регулирования. М. Гостехиздат. 1962. 254 с.
13. Шемян Г. Г. Динамика роторных машин. Ереван. Изд. "Гитутюн" НАН РА. 2004. 330 с.
14. Шемян Г. Г., Захарянц Г. В. Защита современных чувствительных аппаратур от динамических воздействий. Ереван. Изд. "Гитутюн" НАН РА. 2003. 148 с.