ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 118 2018 № 3

МАТЕМАТИКА

УДК 519

Академик В. С. Захарян[1], Т. В.Таварацян[2]

О граничных значениях произведений М. М. Джрбашяна

(Представлено 9/VII 2018)

Ключевые слова: *произведения Бляшке и Джрбашяна, ω -емкость множества E, оператор $L^{(\omega)}$, классы гармонических в единичном круге функций U_ω .*

Введение. Пусть Ω – класс функций $\omega(x)$, удовлетворяющих условиям:

1) $\omega(x)$ положительна и непрерывна на $[0;1)$;

2) $\omega(0)=1,\ \int_0^1 \omega(x)dx<+\infty.$

Класс P_ω определяется как множество тех функций $p(\tau)$, для которых

$$p(0)=1,\ \ p(\tau)=\tau\int_\tau^1 \frac{\omega(x)}{x^2}dx, \qquad \tau\in(0,1],$$

где $\omega(x)\in\Omega$. Функция $p(\tau)$ неотрицательна и непрерывна на $[0,1]$, и $p(+0)=p(0)=1,\ p(1)=0.$

Отметим, что (см. [1], с. 27) если $p(\tau)\in P_\omega$ и

$$\Delta_k=(k+1)\int_0^1 \tau^k dp(\tau), \qquad (k=0,1,2,\ldots),$$

то будем иметь

$$\Delta_0=1, \qquad \Delta_k=k\int_0^1 \omega(x)x^{k-1}dx, \qquad (k=1,2,\ldots).$$

Пусть последовательность $\{a_n\}_{n=1}^\infty\subset D$, $a_n\neq 0,\ n=1,2,\ldots$, такая что

$$\sum_{n=1}^\infty \int_{|a_n|}^1 \omega(x)dx<+\infty. \tag{1}$$

Пусть D – единичный круг комплексной плоскости $\mathbb{C}$, тогда бесконечное произведение $B_{\omega}(z;\{a_n\})$, $z \in \mathbb{D}$ М. М. Джрбашяна определяется следующим образом (см. [1], с. 46):

$$B_{\omega}\left(z;\{a_n\}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)\exp\{-W_{\omega}(z,a_n)\},$$

где для $\zeta \in D$

$$\mathrm{W}_{\omega}(z,\zeta)=\int_{|\zeta|}^{1}\frac{\omega(x)}{x}dx-\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\zeta^{-k}\int_{0}^{|\zeta|}\omega(x)x^{k-1}dx-\overline{\zeta}^{k}\int_{|\zeta|}^{1}\omega(x)x^{-k-1}dx\right\}\frac{z^k}{\Delta_k}.$$

В специальном случае $\omega(x)=1$ произведения М. М. Джрбашяна превращаются в обычные произведения Бляшке (см. [1], с. 51):

$$B(z;\{a_n\})=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z_n-z}{1-z_n z}\right)\frac{|z_n|}{z_n},\quad z\in \mathbb{D}.$$

В случае $\omega(x)=(1-x)^{\alpha}$, $-1<\alpha<+\infty$, произведения B_{ω} превращаются в произведения $B_{\alpha}\left(z;\{a_n\}\right)$ М.М. Джрбашяна (см. [2], гл. IX).

Известно следующее утверждение о взаимосвязи между произведениями B_{ω}, где $\omega(x)\in\Omega$ не убывает на $[0;1)$, и B (см. [1], с. 55).

Теорема (**о взаимосвязи произведений** B_{ω} **и** B): *если функция* $\omega(x)\in\Omega$ *не убывает на* $[0;1)$ *и последовательность* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset D$ *удовлетворяет условию (1), то имеет место представление*

$$B_{\omega}\left(z;\{a_n\}\right)=B\left(z;\{a_n\}\right)\exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S\left(e^{-i\gamma}z;\omega\right)d\mu(\gamma)\right\},\quad z\in D,$$

где $B(z;\{a_n\})$ *– произведения Бляшке, с нулями на последовательности* $\{a_n\}$, $\mu(\gamma)$ *– некоторая неубывающая ограниченная функция на* $[0;2\pi]$ *и*

$$S\left(z;\omega\right)=1+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{\Delta_k}$$

ядро типа Шварца М. М. Джрбашяна.

Обозначим через Ω^* подмножество функций $\omega(x)$ из класса Ω, подчиненных дополнительному условию

$$|\omega(x)-1|\le K_{\omega}(\tau)\,x,\qquad (0\le x\le\tau<1)\ ,$$

где $K_{\omega}(\tau)$ – некоторая постоянная, через Ω_0 – подмножество тех функций из Ω^*, для которых $\omega(x)$ не убывает на $[0,1]$, и через Ω_0^* – подмножество функций $\omega(x)$ из класса Ω_0, подчиненных дополнительному условию

$$\lim_{x\to 1-0}\sup\frac{(1-x)\omega'(x)}{\omega(x)}<1.$$

Как известно (см [3], с. 54), для существования радиального предела произведения Бляшке в граничной точке $e^{i\varphi}$ необходимо и достаточно, чтобы в этой точке выполнялось условие Фростмана:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-|a_n|}{|e^{i\varphi}-a_n|}<+\infty.$$

Для произведения B_ω, $\omega(x)\in\Omega_0$ доказано (см [1], с. 105), что если имеет место условие (1), то в граничной точке $e^{i\varphi}$ существует конечный и отличный от нуля радиальный предел произведения $B_\omega(z;\{a_n\})$ для всех $\varphi\in[0,2\pi]$ за исключением, быть может, некоторого множества $E\in[0,2\pi]$, для которого $C_\omega(E)=0$.

B -измеримое множество $E\subset[0,2\pi]$ имеет положительную ω-емкость $C_\omega(E)$, если существует мера $\mu\prec E$, для которой функция

$$U_\omega(re^{i\varphi})=\int_0^{2\pi}\left|C(re^{i(\varphi-\gamma)};\omega)\right|d\mu(\gamma)$$

остается равномерно ограниченной по $\varphi\in[0,2\pi]$ при $r\to 1-0$. В случае отсутствия такой меры, т. е. в случае, когда для любой меры $\mu\prec E$

$$\lim_{r\to 1-0}\max_{0\le\varphi\le 2\pi}U_\omega(re^{i\varphi})=+\infty,$$

считаем ω-емкость множества E равной нулю. При этом соответственно $C_\omega(E)>0$ или $C_\omega(E)=0$.

Оператор $L^{(\omega)}$ определяется следующим образом:

$$L^{(\omega)}\{\varphi(x)\}\equiv-\frac{d}{dx}\left\{x\int_0^1\varphi(x\tau)dp(\tau)\right\},\qquad x\in(0,1)$$

При предположении, что в надлежащих классах допустимых функций $\varphi(x)$, определенных на $(0,1)$, левая часть тождества существует хотя бы почти всюду на $(0,1)$.

В специальном случае $\omega(x)\equiv 1$, $\varphi(x)\in L(0,1)$

$$L^{(\omega)}\{\varphi(x)\}=\varphi(x)$$

почти всюду на $(0,1)$.

Для произвольной функции $\omega(x)\in\Omega$ имеет место формула (см.[1], с. 32)

$$L^{(\omega)}\{x^r\}=\Delta(r)x^r,\ \ r\in[0,+\infty),\ \ x\in[0,1],$$

где функция

$$\Delta(0)=1,\ \Delta(r)=r\int_0^1\omega(x)x^{r-1}dx,\ \ r\in(0,+\infty)$$

непрерывна на полуоси $[0,+\infty)$, причем очевидно, что

$$\Delta(k)=\Delta_k\quad(k=0,1,2,\ldots).$$

Когда $\omega(x)=(1-x)^\alpha$, $(-1<\alpha<+\infty)$, то оператор $L^{(\omega)}$ совпадает с оператором интегродифференцирования $D^{-\alpha}$ Римана – Лиувиля.

Обозначим через U_ω множество гармоничных в круге $|z|<1$ функций $u(z)$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{0<r<1}\left\{\int_0^{2\pi}\left|u_\omega(re^{i\varphi})\right|d\varphi\right\}<+\infty,$$

где $\omega(x)\in\Omega$ и

$$u_\omega(re^{i\varphi})=L^{(\omega)}\left\{u(re^{i\varphi})\right\}.$$

Класс U_ω совпадает с множеством функций $u(z)$ (см.[1], с. 37), представимых в виде интеграла

$$u(re^{i\varphi})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(\varphi-\gamma;r;\omega)d\mu(\gamma),\quad (0\le r<1,\ 0\le\gamma\le 2\pi),$$

где $\mu(\gamma)$ – произвольная вещественная функция с конечным полным изменением на $[0;2\pi]$.

Отметим, что все результаты этой работы при $\omega(x)=(1-x)^\alpha$, $(-1<\alpha<0)$ выведены В.С. Захаряном и Р.В.Даллакяном [4].

Основные результаты. Сначала доказывается следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $\omega(x)\in\Omega_0^*$, последовательность $\{a_n\}_{n=1}^\infty\subset D$ удовлетворяет условию (1) и пусть $n(r)$ – количество точек a_n, лежащих в круге $|z|\le r<1$. Тогда, если*

$$n(r)\le\frac{\lambda(r)}{\int_r^1\omega(x)dx},$$

где $\lambda(r)$ такая, что $\lim\limits_{r\to 1-0}\lambda(r)=0$, то для любого значения φ, $\varphi\in[0;2\pi]$,

$$\lim_{r\to 1-0}\frac{1}{C(|z|;\omega)}\cdot\log\left|\frac{B_\omega(re^{i\varphi};\{a_n\})}{B_1(re^{i\varphi};\{a_n\})}\right|=0.$$

Далее, пользуясь результатом теоремы 1, получим второй результат**.**

Теорема 2. *Пусть $\omega(x)\in\Omega_0^*$ и последовательность $\{a_n\}_{n=1}^\infty\subset D$ удовлетворяет условию (1) Бляшке – Джрбашяна. Тогда если для некоторого значения φ, $\varphi\in[0;2\pi]$,*

$$\overline{\lim_{r\to 1-0}}\frac{1}{C(|z|;\omega)}\cdot\left|\log\left|\frac{B_\omega(re^{i\varphi};\{a_n\})}{B_1(re^{i\varphi};\{a_n\})}\right|\right|=d>0,$$

то существует последовательность $\{r_k\}$

$$0<r_1<r_2<\cdots<r_{k-1}<r_k<\cdots<1,\qquad r_k\xrightarrow[k\to\infty]{}1$$

такая, что

$$n(r_k)=\frac{c}{\int\limits_{r_k}^{1}\omega(x)dx}, \tag{12}$$

где c – некоторая постоянная.

Пользуясь теоремой 1 работы [6], докажем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть $\omega(x)\in\Omega_0^*$, последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset D$ удовлетворяет условию (1) Бляшке – Джрбашяна и пусть z стремится к граничной точке $e^{i\varphi}$ касательным путем. Тогда*

$$\lim_{z\to e^{i\phi}}\frac{1}{C(|z|;\omega)}\log\left|\frac{B_\omega\left(z;\{a_n\}\right)}{B_1\left(z;\{a_n\}\right)}\right|=0.$$

Далее, пользуясь теоремой 2, докажем следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть $\omega(x)\in\Omega_0^*$, последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset D$ удовлетворяет условию (1) Бляшке – Джрбашяна и пусть*

$$n\left(r_k\right)=\frac{c}{\int\limits_{r_k}^{1}\omega(x)dx},\qquad k=1,2,\ldots,$$

где последовательность $\{r_k\}$ такая, что

$$0<r_1<r_2<\cdots<r_{k-1}<r_k<\cdots<1,\quad r_k\xrightarrow[k\to\infty]{}1.$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{|a_n|}^{1}\omega_1(x)dx=+\infty,$$

где $\omega_1(x)$ – любая неубывающая функция из класса Ω_0^* такая, что

$$\frac{\omega_1(r)}{\omega(r)}\xrightarrow[r\to1-0]{}+\infty .$$

В соответствии с теоремой 4 из теоремы 2 следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 5. *Пусть $\omega(x)\in\Omega_0^*$ и последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset D$ удовлетворяет условию (1) Бляшке – Джрбашяна. Тогда если для некоторого значения φ, $\varphi\in[0;2\pi]$,*

$$\overline{\lim_{z\to e^{i\varphi}}}\frac{1}{C(|z|;\omega)}\left|\log\left|\frac{B_\omega(z;\{a_n\})}{B_1(z;\{a_n\})}\right|\right|=d>0,$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{|a_n|}^{1}\omega_1(x)dx=+\infty,$$

где $\omega_1(x)$ – любая неубывающая функция класса Ω_0^* такая, что

$$\frac{\omega_1(r)}{\omega(r)}\xrightarrow[r\to1-0]{}+\infty .$$

Далее доказываются следующие утверждения.

Теорема 6. *Пусть* $\omega(x) \in \Omega_0^*$ *и последовательность* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}$ *удовлетворяет условию (1) Бляшке – Джрбашяна. Тогда если для некоторого значения* φ, $\varphi \in [0;2\pi]$,

$$\overline{\lim_{z \to e^{i\varphi}}} \frac{1}{C(|z|;\omega)} \left| \log \left| \frac{B_\omega(z;\{a_n\})}{B_1(z;\{a_n\})} \right| \right| = d > 0,$$

то точка $e^{i\varphi}$ *является точкой сгущения для последовательности* $\{a_n\}$. *Более того,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left| e^{i\varphi} - a_n \right|} \int_{|a_n|}^{1} \omega(x)dx = +\infty.$$

Теорема 7. *Пусть* $\omega(x) \in \Omega_0^*$, *последовательность* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D$ *удовлетворяет условию (1) Бляшке–Джрбашяна и пусть* E *– множество тех точек* $e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0;2\pi]$, *для которых*

$$\overline{\lim_{z \to e^{i\varphi}}} \frac{1}{C(|z|;\omega)} \left| \log \left| \frac{B_\omega(z;\{a_n\})}{B_1(z;\{a_n\})} \right| \right| = d > 0,$$

тогда $cap_\omega E = 0$.

[1]Национальный политехнический университет Армении
[2]Ванадзорский государственный университет им. О. Туманяна
e-mail: mathdep@seua.am; tehmina1@yandex.ru

Академик В. С. Захарян, Т. В. Таварацян

О граничных значениях произведений М. М. Джрбашяна

Исследуется граничное поведение частного произведений B_ω, где $\omega(x) \in \Omega$, и $B_1 \equiv B$.

Ակադեմիկոս Վ. Ս. Զաքարյան, Թ. Վ. Տավարածյան

Մ. Մ. Ջրբաշյանի B_ω արտադրյալների եզրային արժեքների մասին

Ուսումնասիրվում է B_ω, $(\omega(x) \in \Omega)$, և $B_1 \equiv B$ արտադրյալների հարաբերության եզրային վարքը:

Academician V. S. Zakaryan, T. V. Tavaratsyan

On Boundary Properties of Products of B_ω M. M. Djrbashyan

In this work we investigate boundary properties partial products B_ω, $(\omega(x) \in \Omega)$ and $B_1 \equiv B$ -products Blaschke.

Литература

1. *Джрбашян М. М., Захарян В. С.* Классы и граничные свойства функций, мероморфных в круге. М. Наука. 1993. 217 с.
2. *Джрбашян М. М.*. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М. Наука. 1966. 672 с.
3. *Коллингвуд Э., Ловатер А.* Теория предельных множеств. М. Мир. 1971. 312 с.
4. *Захарян В. С.. Даллакян Р. В.* –Доклады НАН РА. 2016. Т. 116. № 3. С. 187-194.
5. *Джрбашян М. М.,Захарян В. С.* – Изв. АН СССР. Сер. матем. 1970. Т. 34. № 6. 1262-1339.
6. *Даллакян Р. В.* – Математика в высшей школе. 2012. Т. 8. С.30-37.