ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 118 2018 № 3

МАТЕМАТИКА

УДК 514.752 .44

В. А. Мирзоян

Нормально плоские полусимметрические подмногообразия в евклидовых пространствах

(Представлено академиком В. С. Захаряном 16/V 2018)

Ключевые слова: *полусимметрические подмногообразия, конусы, эйнштейновы и полуэйнштейновы подмногообразия.*

1. Введение. Пусть M – m-мерное гладкое риманово многообразие с метрикой g, римановой связностью ∇ и тензором кривизны R. Тензор Риччи R_1 типа (1,1) определяется следующим образом: если $(e_1,\cdots,e_m)$ – локальный базис ортонормальных касательных векторных полей на M, то для любого касательного векторного поля X полагаем $R_1(X) = \sum_{i=1}^{m} R(X,e_i)e_i$. В каждой точке $x \in M$ тензор R_1 действует как симметрический эндоморфизм касательного пространства $T_x(M)$. При $R_1 = \lambda I$ ($\lambda = const$, I – тождественное преобразование) многообразие M называется эйнштейновым, а при $R_1 = 0$ – риччи-плоским. Операторы кривизны $R(X,Y) = \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$ действуют как дифференцирования тензорной алгебры на M, например,

$$\left(R(X,Y)R_1\right)Z = R(X,Y)R_1(Z) - R_1\left(R(X,Y)Z\right),$$

$$\left(R(X,Y)R\right)(U,V)W = R(X,Y)(R(U,V)W) - R\left(R(X,Y)U,V\right)W -$$
$$-R(U,R(X,Y)V)W - R(U,V)R(X,Y)W,$$

где X,Y,Z,U,V,W – произвольные касательные векторные поля на M. Тензорное поле T называется параллельным, если $\nabla_X T = 0$ для любого X. Если же $R(X,Y)T = 0$ для любых X,Y, то оно называется полупараллельным.

Римановы многообразия с параллельным тензором кривизны называются локально симметрическими, с полупараллельным тензором кривизны

– полусимметрическими, а с полупараллельным тензором Риччи – риччи-полусимметрическими. Верны импликации:

$$\nabla R = 0 \Rightarrow \nabla R_1 = 0 \Rightarrow R(X,Y)R_1 = 0,\ \nabla R = 0 \Rightarrow R(X,Y)R = 0 \Rightarrow R(X,Y)R_1 = 0.$$

Общая структурная теорема для полусимметрических многообразий была установлена З. Сабо [1], а для риччи-полусимметрических многообразий – автором [2]. Настоящая работа посвящена исследованию нормально плоских полусимметрических подмногообразий в евклидовых пространствах.

2. Пространства дефектности и относительной дефектности. Пусть M является m-мерным подмногооборазием n-мерного евклидова пространства E_n. Если $\tilde{\nabla}$ – риманова связность на E_n, то для любых касательных к M векторных полей X, Y и любого нормального к M векторного поля ξ имеем (см. [3, 4])

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha_2(X,Y), \quad \tilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi(X) + \nabla_X^\perp \xi,$$

где $\nabla_X Y$ и $A_\xi(X)$ в точке $x \in M$ принадлежат касательному пространству $T_x(M)$, а $\alpha_2(X,Y)$ и $\nabla_X^\perp \xi$ – нормальному пространству $T_x^\perp(M)$. Эти формулы определяют на M связность Леви-Чивита ∇, нормальную связность $\nabla^\perp$ и вторую фундаментальную форму α_2. Тензоры кривизны R и $R^\perp$ связностей ∇, $\nabla^\perp$ определяются равенствами

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,\quad R^\perp(X,Y)\xi = \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \xi - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \xi - \nabla_{[X,Y]}^\perp \xi.$$

При $R = 0$ подмногообразие M называется локально евклидовым, а при $R^\perp = 0$ – нормально плоском. Тензор Риччи R_1 подмногообразия M определяется через тензор кривизны R так же, как и для риманова многообразия. Вектор средней кривизны H определяется по формуле $H = tr\alpha_2$. Если $H = 0$, то подмногообразие называется минимальным.

Пространства дефектности $T_x^{(0)}$ и относительной дефектности T_x' подмногообразия M в точке x определяются, соответственно, формулами

$$T_x^{(0)} = \{X \in T_x(M) : R(X,Y) = 0\ \forall Y \in T_x(M)\},$$
$$T_x' = \{X \in T_x(M) : \alpha_2(X,Y) = 0) \forall Y \in T_x(M)\}.$$

Эти понятия были введены и использованы Чженем и Кюйпером [5]. Числа $\mu_x = \dim T_x^{(0)}$ и $\nu_x = \dim T_x'$ называются *индексом дефектности* и *индексом относительной дефектности* подмногообразия M в точке x. Имеет место включение $T_x' \subset T_x^{(0)}$. Интегральное многообразие $M^{(0)}$ распределения $T^{(0)}$ является локально евклидовым в индуцированной метрике и вполне геодезическим в M. Интегральное многообразие распределения T' представляет собой плоскость. Ортогональное дополнение $T_x^{(1)}$ пространства $T_x^{(0)}$ в $T_x(M)$ относительно римановой метрики на M называется пространством кодефектности в точке x, а его размерность – индексом кодефектности M в этой точке. Подмногообразие M с ненулевым индексом дефектности называется полуэйнштейновым, если тензор Риччи R_1 в каждой точке $x \in M$ имеет на $T_x^{(1)}$ только одно ненулевое собственное значение [2].

Изометрическое погружение $M \to E_n$ называется произведением погружений $M_\varphi \to E_{n_\varphi}$, если $M = M_1 \times \cdots \times M_r$, $E_n = E_{n_1} \times \cdots \times E_{n_r}$ и любые два подпространства E_{n_φ} и E_{n_ψ} $(\varphi \neq \psi)$ ортогональны в E_n. В этом случае говорят, что M является прямым произведением подмногообразий $M_1, \cdots, M_r$ или, просто, является приводимым как подмногообразие. Если изометрическое погружение $M = M_1 \times \cdots \times M_r \to E_n$ неприводимо в E_n как подмногообразие, то оно называется сплетающимся произведением подмногообразий $M_1, \cdots, M_r$ [6].

3. Редукция условий. Пусть $O(E_n)$ – главное расслоение ортонормированных реперов $\{x, e_1, \cdots, e_n\}$ в евклидовом пространстве E_n. Отождествляя точку x со своим радиус-вектором, будем иметь

$$dx = \omega^A e_A, \qquad d e_A = \omega_A^B e_B, \qquad \omega_B^A + \omega_A^B = 0, \; A, B, \cdots = 1, \cdots, n.$$

Отсюда, путем внешнего дифференцирования, получим следующие структурные уравнения: $d\omega^A = \omega^B \wedge \omega_B^A$, $d\omega_A^B = \omega_A^C \wedge \omega_C^B$. Если M – m-мерное подмногообразие в E_n, тогда расслоение $O(E_n)$ может быть приведено к главному расслоению $O(M, E_n)$ адаптированных ортонормреперов $\{x,\, e_1, \cdots,\, e_m, e_{m+1}, \cdots, e_n\}$, характеризуемых тем, что $e_i \in T_x(M)$, $(i, j, \cdots = 1, \cdots, m)$, $e_\alpha \in T_x^\perp(M)$, $(\alpha, \beta, \cdots = m+1, \cdots, n)$ (см. [4]). В силу этого по известной схеме (см. [7-9]) получим $\omega^\alpha = 0$, $\omega_i^\alpha = h_{ij}^\alpha \omega^j$, $h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha$, где функции h_{ij}^α – компоненты формы α_2. Компоненты R_{ikl}^{j}, $R_{\alpha k l}^{\beta}$, R_{ik} тензоров кривизны R, $R^\perp$ и тензора Риччи R_1 выражаются через h_{ij}^α по формулам

$$R_{ikl}^{j} = -\sum_\alpha h_{i[k}^\alpha h_{l]j}^\alpha, \quad R_{\alpha kl}^{\beta} = -\sum_i h_{i[k}^\alpha h_{l]i}^\beta, \quad R_{ik} = R_{ikl}^{l} = \sum_\alpha \left(h_{il}^\alpha h_k^{\alpha l} - H^\alpha h_{ik}^\alpha\right),$$

где $h_k^{\alpha l} = h_{kl}^\alpha$, а $H^\alpha = \sum_l h_{ll}^\alpha$ – компоненты вектора средней кривизны H.

Известно (см. [7-9]), что условия полупараллельности тензоров R, R_1, соответственно, имеют следующй вид: $R_{pjk}^{l}\Omega_i^p + R_{ipk}^{l}\Omega_j^p + R_{ijp}^{l}\Omega_k^p - R_{ijk}^{p}\Omega_p^l = 0$, $R_{kj}\Omega_i^k + R_{ik}\Omega_j^k = 0$, где Ω_k^j, Ω_α^β – формы кривизны связностей ∇, $\nabla^\perp$.

Пусть подмногообразие M является нормально плоским, т.е. $R_{\alpha ij}^{\beta} = 0$. Тогда все матрицы $\left\| h_{ij}^\alpha \right\|$ коммутируют между собой и в некотором ортонорепере одновременно могут быть приведены к диагональному виду $\left\| \lambda_i^\alpha \delta_{ij} \right\|$. Тогда $R_{ik} = \rho_i \delta_{ik}$, где $\rho_i = \sum_\alpha [\left(\lambda_i^\alpha\right)^2 - H^\alpha \lambda_i^\alpha]$. Нормальные векторы $n_i = \lambda_i^\alpha e_\alpha$ называются главными векторами кривизны (г.в.к.) нормально плоского подмногообразия в E_n. Очевидно, что $H = n_1 + \cdots + n_m$. Если $<,>$ – скалярное произведение в E_n, то прямым вычислением получим

$$\rho_j = \left|n_j\right|^2 - <H, n_j>, \quad k(e_i \wedge e_j) = -R_{ijij} = \sum_\alpha \lambda_i^\alpha \lambda_j^\alpha = <n_i, n_j>,$$

$$R_{ijkl} = (\delta_{il}\,\delta_{jk} - \delta_{ik}\,\delta_{jl}) \sum_\alpha \lambda_i^\alpha \lambda_j^\alpha = (\delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jl}) <n_i, n_j>, \tag{1}$$

где $k(e_i \wedge e_j)$ – секционная кривизна. Из (1) следует, что если секционная кривизна подмногообразия M постоянна, т.е. $k(e_i \wedge e_j) = q$, то $R_{jk} = = R_{ijkl}\delta^{il} = q(m-1)\delta_{jk}$. В этом случае M $(\dim M = m \geq 2))$ будет риччи-плоским тогда и только тогда, когда оно локально евклидово.

Для нормально плоского подмногообразия M условия полупараллельности тензора Риччи получены в [7] и [10]. Поскольку $\Omega_k^j = -\sum_\alpha \lambda_j^\alpha \lambda_k^\alpha \omega^k \wedge \omega^j = <n_j, n_k> \omega^j \wedge \omega^k$, то

$$\begin{aligned} &R_{p\,jkl}\,\Omega_i^p + R_{i\,p\,kl}\,\Omega_j^p + R_{i\,j\,pl}\,\Omega_k^p + R_{i\,j\,kp}\,\Omega_l^p = \\ &= \delta_{jk}(<n_l, n_j><n_i, n_l> - <n_i, n_j><n_l, n_i>)\omega^l \wedge \omega^i + \\ &+ \delta_{il}(<n_k, n_i><n_k, n_j> - <n_i, n_j><n_k, n_j>)\omega^k \wedge \omega^j + \\ &+ \delta_{jl}(<n_k, n_j><n_i, n_k> - <n_i, n_j><n_k, n_i>)\omega^i \wedge \omega^k + \\ &+ \delta_{ik}(<n_l, n_i><n_l, n_j> - <n_i, n_j><n_l, n_j>)\omega^j \wedge \omega^l. \end{aligned}$$

Преобразуя правую часть, будем иметь

$$\begin{aligned} &R_{p\,jkl}\,\Omega_i^p + R_{i\,p\,kl}\,\Omega_j^p + R_{i\,j\,pl}\,\Omega_k^p + R_{i\,j\,kp}\,\Omega_l^p = \\ &= \delta_{jk} <n_i, n_l><n_l - n_i,\, n_j> \omega^l \wedge \omega^i + \delta_{il} <n_k, n_j><n_k - n_j,\, n_i> \omega^k \wedge \omega^j + \\ &+ \delta_{jl} <n_i, n_k><n_k - n_i,\, n_j> \omega^i \wedge \omega^k + \delta_{ik} <n_l, n_j><n_l - n_j,\, n_i> \omega^j \wedge \omega^l. \end{aligned} \tag{2}$$

Рассмотрим несколько случаев. Если в (2) все индексы имеют попарно различные значения, то правая часть равна нулю и, следовательно, условие полусимметричности $R_{p\,jkl}\,\Omega_i^p + R_{i\,p\,kl}\,\Omega_j^p + R_{i\,j\,pl}\,\Omega_k^p + R_{i\,j\,kp}\,\Omega_l^p = 0$ выполняется. Легко проверить, что это условие также выполняется, если в (2) $k = l$ или $i = j$. Пусть в (2) $i \neq j,\, k \neq l,\, l = j$. Тогда из (2) получим

$$R_{p\,jkj}\,\Omega_i^p + R_{i\,pkj}\,\Omega_j^p + R_{i\,j\,pj}\,\Omega_k^p + R_{i\,j\,kp}\,\Omega_j^p = <n_i, n_k><n_k - n_i,\, n_j> \omega^i \wedge \omega^k.$$

Отсюда следует, что левая часть будет равна нулю тогда и только тогда, когда $<n_i, n_k><n_k - n_i,\, n_j> = 0$ для любых трёх различных значений индексов i, j, k. Точно такой же результат получим при $i \neq j,\, k \neq l,\, k = j$, а также при $i \neq j,\, k \neq l,\, l = i$ или $i \neq j,\, k \neq l,\, k = i$.

Таким образом, с учётом результатов, полученных в [7] и [10], заключаем, что для нормально плоского подмногообразия в E_n необходимые и достаточные условия полупараллельности тензора кривизны R и тензора Риччи R_1 имеют, соответственно, следующий вид:

$$<n_i - n_k,\, n_j><n_i, n_k> = 0, \tag{3}$$

$$<n_i - n_k,\, n_i + n_k - H> \cdot <n_i, n_k> = 0 \tag{4}$$

при любых различных значениях индексов. Условие (3) было приведено в [7] без доказательства. Покажем, что из (3) следует (4). Действительно, если в (3) $<n_i, n_k>=0$, то (4) выполняется. Если в (3) $<n_i, n_k>\neq 0$, то $<n_i - n_k,\, n_j>=0$. Суммируя последнее равенство по $j\,(j\neq i, j\neq k)$, получим $<n_i - n_k,\, n_i + n_k - H>=0$. Следовательно, условие (4) также выполняется.

Из (3) следует, что множество всех г.в.к. нормально плоского полусимметрического подмногообразия естественным образом разбивается на группы $W^{(0)}, W^{(1)}, \cdots, W^{(t)}$ так, что векторы, принадлежащие разным группам, ортогональны, а векторы, принадлежащие одной и той же группе, удовлетворяют условию $<n_i - n_k,\, n_j>=0$. Из приведённых выше равенств следует, что при соответствии, устанавливаемой формулой $\rho_j = \left|n_j\right|^2 - - <H, n_j>$, группы $W^{(0)}, W^{(1)}, \cdots, W^{(t)}$ соответствуют различным собственным значениям тензора Риччи. Будем считать, что группа $W^{(0)}$ соответствует нулевому собственному значению, а $W^{(1)}, \cdots, W^{(t)}$ соответствуют ненулевым собственным значениям $\rho_1, \cdots, \rho_t$ тензора Риччи R_1. Заметим, что некоторые из групп $W^{(\sigma)}$, $\sigma > 0$, вообще говоря, могут содержать взаимно ортогональные векторы. Речь идёт о тех векторах n_i, n_k из $W^{(\sigma)}$, которые удовлетворяют как условию $<n_i - n_k,\, n_j>=0$, так и условию $<n_i, n_k>=0$. Однако все векторы в $W^{(\sigma)}$ не могут быть взаимно ортогональны, поскольку в этом случае соответствующие компоненты тензора кривизны, а следовательно, и соответствующее собственное значение ρ_σ тензора Риччи будут нулевыми.

4. Полусимметрические эйнштейновы подмногообразия. В [6] для риччи-полусимметрических подмногообразий была доказана следующая

Теорема 1. *В евклидовом пространстве* E_n *нормально плоское подмногообразие M удовлетворяет условию* $R(X,Y)R_1 = 0$ *тогда и только тогда, когда оно является открытой частью одного из следующих подмногообразий: (1) нормально плоского двумерного подмногообразия, (2) нормально плоского эйнштейнова подмногообразия, (3) нормально плоского полуэйнштейнова подмногообразия, (4) нормально плоского сплетающегося произведения полуэйнштейновых подмногообразий и риччи-плоского подмногообразия (возможно размерности ноль), (5) прямого произведения перечисленных выше классов подмногообразий.*

В силу импликации $R(X,Y)R = 0 \Rightarrow R(X,Y)R_1 = 0$ и мультипликативности условия $R(X,Y)R = 0$ эта теорема справедлива также для полусимметрических подмногообразий. Однако поскольку обратная импликация $R(X,Y)R_1 = 0 \Rightarrow R(X,Y)R = 0$, вообще говоря, неверна, то каждое эйнштейново или полуэйнштейново подмногообразие, будучи риччи-полусимметрическим, может не быть полусимметрическим. Поэтому для полусимметрических подмногообразий теорему 1 можем перефразировать следующим образом.

Теорема 2. *В евклидовом пространстве E_n нормально плоское подмногообразие M удовлетворяет условию $R(X,Y)R=0$ тогда и только тогда, когда оно является открытой частью одного из следующих подмногообразий: (1) нормально плоского двумерного подмногообразия, (2) нормально плоского эйнштейнова полусимметрического подмногообразия, (3) нормально плоского полуэйнштейнова полусимметрического подмногообразия, (4) нормально плоского сплетающегося произведения полуэйнштейновых полусимметрических подмногообразий и риччи-плоского подмногообразия (возможно размерности ноль), (5) прямого произведения перечисленных выше классов подмногообразий.*

Поскольку нормально плоские двумерные подмногообразия автоматически являются полусимметрическими, то из теоремы 2 следует, что проблема исследования нормально плоских полусимметрических подмногообразий сводится к исследованию нормально плоских эйнштейновых и полуэйнштейновых полусимметрических подмногообразий.

Пусть M ($\dim M \geq 3$) является внутренне неприводимым нормально плоским эйнштейновым полусимметрическим подмногообразием в E_n с ненулевой эйнштейновой константой ρ. Тогда индекс дефектности равен нулю, т.е. $\mu=0$, и M допускает только одну группу главных векторов кривизны $W^{(1)}$. Покажем, что имеем право предположить, что в $W^{(1)}$ все векторы удовлетворяют условию $< n_i - n_k,\, n_j >= 0$. Действительно, предположим, что группа $W^{(1)}$ разбивается на подгруппы $W^{(1,1)},\cdots,W^{(1,t)}$ так, что векторы каждой подгруппы ортогональны векторам любой другой подгруппы, а векторы одной и той же подгруппы $W^{(1,\varphi)}$ $(\varphi,\psi=1,...,t)$ удовлетворяют, следовательно, условию $< n_i - n_k,\, n_j >= 0$. Докажем, что в этом случае подмногообразие M внутренне приводимо (т.е. приводимо как риманово многообразие). (В дальнейшем векторы подгруппы $W^{(1,\varphi)}$ будем снабжать субиндексом φ). Поскольку $< n_{i_\varphi},\, n_{j_\psi} >= 0$ при $\varphi \neq \psi$, то из (3) следует, что $R_{i_\varphi j_\psi k l}=0$. Тогда $R_{k l i_\varphi j_\psi}=0$ и $R_{i_\varphi j_\varphi k_\psi l} = -R_{i_\varphi k_\psi l j_\varphi} - R_{i_\varphi l j_\varphi j k_\psi}=0$. Это значит, что из компонент тензора кривизны ненулевые имеют вид $R_{i_\varphi j_\varphi k_\varphi l_\varphi}$. Следовательно, компоненты тензора кривизны разбиваются на блоки, соответствующие подгруппам $W^{(1,1)},\cdots,W^{(1,t)}$. Пусть $x \in M$ – фиксированная точка. В линейном пространстве кососимметрических линейных операторов $T_x(M) \to T_x(M)$ рассмотрим линейное подпространство h_x, натянутое на элементы $R_x(X,Y)$, где $X,Y \in T_x(M)$, т.е. $h_x = span\, R_x(X,Y)$. Для элементов $R_x(X,Y)$ и $R_x(Z,W)$ из h_x коммутатор определим по формуле $\left[R_x(X,Y),R_x(Z,W)\right] = \; = R_x(X,Y)\cdot R_x(Z,W) - R_x(Z,W)\cdot R_x(X,Y)$. Через $\overline{h}_x$ обозначим алгебру Ли, порождённую множеством h_x относительно этой операции, и пусть P_x — связная подгруппа группы изометрий в $T_x(M)$, определенная алгеброй Ли $\overline{h}_x$. Эта группа называется примитивной группой голономии в точке x. В силу того, что компоненты тензора кривизны разбиваются на блоки, алгебра $\overline{h}_x$ разлагается в прямую сумму своих подалгебр $\overline{h}_x^{\varphi}$. Следовательно группа P_x разлагается в прямое произведение своих подгрупп P_x^{φ}. Пусть $T_x(M)=V_x^{(1)}+\cdots+V_x^{(t)}$ является неприводимым разложением пространства $T_x(M)$ относительно P_x. Подпространства $V_x^{(\varphi)}$ инвариантны относительно действия P_x и попарно вполне ортогональны. Неприводимость указанного разложения относительно P_x означает неприводимость подпространства $V_x^{(\varphi)}$ относительно действия подгруппы P_x^{φ}. Поскольку подмногообразие M не является риччи-плоским, то его индекс дефектности равен нулю. В этом случае, согласно результатам З. Сабо [1], распределения $V^{(\varphi)}$ параллельны на M. Следовательно, M внутренне представляет собой прямое произведение интегральных многообразий распределений $V^{(\varphi)}$, которые также являются эйнштейновыми с той же константой ρ.

Если M является риччи-плоским подмногообразием, т.е. допускает только группу главных векторов кривизны $W^{(0)}$, и имеет нулевой индекс дефектности, то, рассуждая как и выше, получим, что оно внутренне является прямым произведением риччи-плоских (но не плоских) подмногообразий.

Итак, пусть M ($\dim M \geq 3$) является внутренне неприводимым нормально плоским эйнштейновым полусимметрическим подмногообразием с нулевым индексом дефектности в E_n. Если M – риччи-плоское (т.е. $\rho=0$), то оно допускает только группу главных векторов кривизны $W^{(0)}$, которая не содержит нулевые главные векторы кривизны. Если же $\rho \neq 0$, то оно допускает только группу главных векторов кривизны $W^{(1)}$. В обоих случаях все векторы в этих группах удовлетворяют условию $< n_i - n_k, n_j >= 0$. Тогда

$$< n_i, n_j >=< n_j, n_k >=< n_k, n_l >=< n_l, n_p >$$

и, следовательно, в фиксированной точке все секционные кривизны $k(e_i \wedge e_j)$ равны между собой, т.е. подмногообразие M является подвижным в смысле [4]. Тогда согласно известной теореме Шура (см. [3, 4]) эти кривизны не зависят также от точки и M является подмногообразием постоянной секционной кривизны. Отметим, что секционная кривизна M не может быть нулевой, так как в этом случае M автоматически будет локально евклидовым, что противоречит условию $\mu=0$. Следовательно, M является подмногообразием ненулевой постоянной секционной кривизны.

Если нормально плоское полусимметрическое подмногообразие M является риччи-плоским, то нетрудно доказать, что оно локально евклидово.

Теорема 3. *В евклидовом пространстве* E_n *нормально плоское эйнштейново полусимметрическое подмногообразие* M *(* $\dim M \geq 3$ *) с ненуле-*

вой эйнштейновой константой и нулевым индексом дефектности является подмногообразием ненулевой постоянной секционной кривизны или локально представляет собой прямое произведение таких подмногообразий. Если M – риччи-плоское полусимметрическое подмногообразие, то оно локально евклидово.

Подмногообразия ненулевой постоянной секционной кривизны изометричны эллиптическим и гиперболическим подмногообразиям, модели которых приведены в [3].

5. Полусимметрические полуэйнштейновы подмногообразия. Пусть M $(\dim M = m > 3)$ является нормально плоским полусимметрическим полуэйнштейновым подмногообразием в E_n с индексом дефектности μ. На пространстве дефектности $T_x^{(0)}$ тензор Риччи R_1 имеет нулевое собственное значение, а на пространстве кодефектности $T_x^{(1)}$ – ненулевое собственное значение ρ. Нулевому собственному значению соответствует группа главных векторов кривизны $W^{(0)}$, а собственному значению ρ – группа главных векторов кривизны $W^{(1)}$. Покажем, что и в этом случае имеем право предположить, что в $W^{(1)}$ все векторы удовлетворяют условию $< n_i - n_k, n_j >= 0$. Действительно, предположим, что группа $W^{(1)}$ разбивается на подгруппы $W^{(1,1)}, \cdots, W^{(1,t)}$ так, что векторы каждой подгруппы ортогональны векторам любой другой подгруппы, а векторы одной и той же подгруппы $W^{(1,\varphi)}$ $(\varphi, \psi = 1, ..., t)$ удовлетворяют, следовательно, условию $< n_i - n_k, n_j >= 0$, и будем рассуждать как и выше. В этом случае неприводимое разложение пространства $T_x(M)$ относительно примитивной группы голономии P_x будет иметь вид $T_x(M) = T_x^{(0)} + V_x^{(1)} + \cdots + V_x^{(t)}$, где подпространства $V_x^{(\varphi)}$ инвариантны относительно действия P_x, а на $T_x^{(0)}$ группа P_x действует тривиально [1]. Поскольку в настоящем случае индекс дефектности отличен от нуля, то распределения $V^{(\varphi)}$, вообще говоря, не являются параллельными на подмногообразии M. Однако методом З. Сабо [1] можем продолжить $V_x^{(\varphi)}$ за счёт подпространства $T_x^{(0)}$ и получить такие подпространства $\tilde{V}_x^{(\varphi)}$, что распределения $\tilde{V}^{(\varphi)}$ будут параллельными на M. Из самого метода построения подпространств $\tilde{V}_x^{(\varphi)}$ следует, что если какое-либо подпространство $V_x^{(\varphi)}$ не допускает продолжения, то распределение $V^{(\varphi)}$ параллельно, а его интегральное многообразие эйнштейново. Если же $V_x^{(\varphi)}$ допускает продолжение $\tilde{V}_x^{(\varphi)}$, то интегральное многообразие распределения $\tilde{V}^{(\varphi)}$ является полуэйнштейновым. Таким образом, M внутренне является прямым произведением эйнштейновых и полуэйнштейновых подмногообразий и, может быть, некоторого локально евклидова подмногообразия. Рассуждая точно так же, можно показать, что риччи-плоское подмногообразие с отличным от нуля индексом дефектности внутренне является прямым произведением риччи-плоских подмногообразий с нулевым индексом дефектности, риччи-плоских подмногообразий с ненулевым индексом дефектности и, может быть, некоторого локально евклидова подмногообразия.

Итак, пусть M является нормально плоским полуэйнштейновым полусимметрическим и внутренне неприводимым подмногообразием в E_n, т.е. простым полусимметрическим листом в смысле З. Сабо [1]. Если $m-\mu>2$, то μ может принимать только значения 0, 1, 2 ([1], лемма 4.5). Случай $\mu=0$ рассмотрен фактически в п. 4. Здесь мы рассмотрим только случай $\mu=1$. Из результатов З. Сабо ([1], лемма 4.6, теорема 4.4) следует, что в этом случае распределение кодефектности $T^{(1)}$ является интегрируемым, а его интегральное многообразие $M^{(1)}$ вполне омбилично в M. Тогда выполняются условия следующей теоремы [10]:

пусть $\tilde{M}$ – n-мерное риманово многообразие с индексом дефектности $\mu\neq 0$ и интегрируемым распределением кодефектности $\tilde{T}^{(1)}$, $\dim\tilde{T}^{(1)}=n-\mu\geq 2$. Если его интегральное многообразие $\tilde{M}^{(1)}$ является вполне омбилическим в $\tilde{M}$, то $\tilde{M}$ локально изометрично либо цилиндру над $\tilde{M}^{(1)}$, либо цилиндру с $(\mu-1)$-мерными образующими над конусом, построенным над $\tilde{M}^{(1)}$ и, более того, $\tilde{M}$ полуэйнштейново тогда и только тогда, когда $\tilde{M}^{(1)}$ эйнштейново.

Согласно этой теореме $M^{(1)}$ является эйнштейновым подмногообразием, а само подмногообразие M изометрично конусу над $M^{(1)}$. Более того, $M^{(1)}$ имеет плоскую нормальную связность (поскольку матрицы его второй фундаментальной формы во всех нормальных направлениях, т.е. в направлениях e_α и одномерном направлении $T_x^{(0)}$, имеют диагональный вид) и является неприводимым нормально плоским подмногообразием постоянной секционной кривизны (теорема 3). Таким образом, подмногообразие M локально изометрично эллиптическому или гиперболическому конусу.

Теорема 4. *В евклидовом пространстве E_n нормально плоское полусимметрическое полуэйнштейново и внутренне неприводимое подмногообразие M ($\dim M=m>3$) с индексом дефектности $\mu=1$ локально изометрично эллиптическому или гиперболическому конусу. Если в E_n нормально плоское полусимметрическое полуэйнштейново подмногообразие M внутренне разлагается в произведение неприводимых подмногообразий с единичными индексами дефектности, то оно локально изометрично прямому или сплетающемуся произведению эллиптических или гиперболических конусов.*

Отметим, что классификация полусимметрических гиперповерхностей в евклидовых пространствах была дана З. Сабо в [11], а риччи-полусимметрических гиперповерхностей – автором в [12]. Сформулированная ниже теорема показывает, насколько сложной может быть геометрическая структура полуэйнштейнова полусимметрического подмногообразия.

Теорема 5. *Пусть в евклидовом пространстве E_n m-мерное нормально плоское полуэйнштейново подмногообразие M индекса дефектности $\mu \geq 1$ имеет в каждой точке q $(3 \leq q \leq n-m+1)$ ненулевых главных векторов кривизны $n_1,\cdots,n_q$ с равными модулями и кратностями $p_1 \geq 2,\cdots,p_q \geq 2$ соответственно. Если соответствующие этим векторам собственные распределения $T,^{(1,1)}\cdots,T^{(1,q)}$ параллельны на M друг относительно друга (но не относительно распределения дефектности $T^{(0)}$), то*

(1) векторы $n_1,\cdots,n_q$ образуют попарно равные углы и $p_1 = \cdots = p_q (= p)$,

(2) M удовлетворяет условию $R(X,Y)R = 0$, т.е. является полусимметрическим, и локально представляет собой прямое произведение $E_{\mu-1} \times P$, где $E_{\mu-1}$ – плоскость размерности $\mu-1$, а подмногообразие P несёт $(q+1)$-компонентную ортогональную сопряжённую систему, состоящую из q одинаковых сфер $S_1^P(R),\cdots,S_q^P(R)$ ($p \geq 2$) и прямой L, и представляет собой конус (с образующей L в каждой точке) над прямым произведением $S_1^P(R)\times\cdots\times S_q^P(R)$, которое, в свою очередь, (а) является $(pq+1)$-мерным эйнштейновым подмногообразием евклидова пространства $E_{n-\mu+1}$, (б) принадлежит гиперсфере $S^{n-\mu}(\overline{R})$ пространства $E_{n-\mu+1}$; радиусы R и $\overline{R}$ связаны условием $\overline{R}^2 = q \cdot R^2$ и являются линейными (не постоянными) функциями на L.

Если условие равенства модулей векторов $n_1,\cdots,n_q$ заменить условием минимальности подмногообразия M, то утверждение (б) будет иметь следующую редакцию: принадлежит гиперсфере $S^{n-\mu}(\overline{R})$ пространства $E_{n-\mu+1}$ и является минимальным в этой гиперсфере.

Эта теорема доказывается с использованием результатов, полученных в [8] и [9].

Национальный политехнический университет Армении
e-mail: vmirzoyan@mail.ru

В. А. Мирзоян

Нормально плоские полусимметрические подмногообразия в евклидовых пространствах

Даётся геометрическое описание некоторых классов нормально плоских полусимметрических подмногообразий в евклидовых пространствах.

Վ. Ա. Միրզոյան

Նորմալ հարթ կիսասիմետրիկ ենթաբազմաձևությունները Էվկլիդեսյան տարածություններում

Տրվում է նորմալ հարթ կիսասիմետրիկ ենթաբազմաձևությունների որոշ դասերի երկրաչափական նկարագրությունը էվկլիդեսյան տարածություններում:

V. A. Mirzoyan

Normally Flat Semi-Symmetric Submanifolds in Euclidean Spaces

A geometric description of some classes of normally flat semisymmetric submanifolds in Euclidean spaces is given.

Литература

1. *Szabo Z. I.* – J. Differential Geom. 1982. V. 17. № 4. P. 531-582.
2. *Мирзоян В. А.* – Изв. вузов. Математика. 1992. № 6. С. 80-89.
3. *Chen B. Y.* Geometry of submanifolds. New York. Marcel Dekker. 1973. 298 p.
4. *Chern S. S., Chen W. H., Lam K. S.* Lectures on differential geometry. Singapore. World Scientific. 2000. 356 p.
5. *Chern S. S., Kuiper N. H.* – Ann. of. Math. 1952. V. 56. № 3. P. 422-430.
6. *Mirzoyan V. A.* – Reports of NAS RA. 2012. V. 112. № 1. P. 19-29.
7. *Lumiste Ü.* Semiparallel submanifolds in space forms. New York. Springer. 2009. 306 p.
8. *Мирзоян В. А.* – Матем. сб. 2006. Т. 197. № 7. С. 47-76.
9. *Мирзоян В. А.*– Изв. РАН. Сер. матем. 2011. Т. 75. № 6. С. 47-78.
10. *Мирзоян В. А.* – Изв. РАН. Сер. матем. 2003. Т. 67. № 5. С. 107-124.
11. *Szabo Z.I.* – Acta Sci. Math. 1984. V. 47. № 3-4. P.321-348.
12. *Мирзоян В.А.* – Матем. сб. 2000. Т. 191. № 9. С. 65-80.