



I–II), впервые, по-видимому, детально исследованы в работе Вильямса еще в 1952 г. [1]

Представляя функцию напряжений Эри в виде

$$\Phi(r, \varphi) = r^{\lambda+1} [A \sin(\lambda+1)\varphi + B \cos(\lambda+1)\varphi + C \sin(\lambda-1)\varphi + D \cos(\lambda-1)\varphi], \quad (1)$$

где  $A, B, C, D$  – произвольные постоянные,  $\lambda$  – комплексный параметр, и удовлетворяя на сторонах сектора  $\varphi=0$  и  $\varphi=\alpha$  однородным граничным условиям, задачи о сингулярности напряжений сведены к исследованию корней соответствующих трансцендентных уравнений относительно комплексного параметра  $\lambda$  :4

$$(\sin \lambda\alpha + \lambda \sin \alpha)(\sin \lambda\alpha - \lambda \sin \alpha) = 0, \quad (\text{для случая I – I}), \quad (2)$$

$$(\sin \lambda\alpha + \lambda \sin \alpha/k)(\sin \lambda\alpha - \lambda \sin \alpha/k) = 0, \quad (\text{для случая II – II}), \quad (3)$$

$$\sin^2 \lambda\alpha + \lambda^2 \sin^2 \alpha/k + (\kappa+1)^2/4k = 0. \quad (\text{для случая I – II}). \quad (4)$$

Здесь  $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$ ,  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Граничные условия на дуговой части контура сектора исключаются из рассмотрения, так как они не влияют на характер напряжений в окрестности вершины сектора.

Уравнения (2), (3), (4) при определенных конкретных значениях  $\alpha, \kappa$  имеют бесконечное множество корней  $\lambda_n$  ( $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ ), которые могут быть пронумерованы по порядку возрастания их действительных частей.

Тогда функцию напряжений Эри можно представить в виде

$$\Phi(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} r^{\lambda_n+1} F(\varphi, \lambda_n), \quad (5)$$

где исключены слагаемые, соответствующие корням с отрицательными действительными частями, поскольку напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi(r, \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi(r, \varphi)}{\partial \varphi^2}, \quad \sigma_\varphi = \frac{\partial^2 \Phi(r, \varphi)}{\partial r^2}, \\ \tau_{r\varphi} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi(r, \varphi)}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi(r, \varphi)}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (6)$$

и соответствующие деформации, определяемые этими слагаемыми, соответствуют накоплению бесконечно большой энергии упругой деформации в малом объеме вблизи вершины сектора при ограниченной внешней нагрузке.

Напряжения вблизи вершины сектора, согласно (5), (6), примут вид

$$\sigma = r^{\lambda_1-1} \Psi(r, \varphi),$$

где  $\lambda_1$  – корень с наименьшей положительной действительной частью,  $\Psi(r, \varphi)$  – ограниченная и вообще не стремящаяся к нулю при  $r \rightarrow 0$  функция.

Если  $\text{Re } \lambda_1 > 1$ , в малой окрестности угловой точки имеет место нулевое напряженное состояние. Когда  $\text{Re } \lambda_1 < 1$ , вблизи угловой точки напря-

жения будут обладать сингулярностью (стремиться к бесконечности) порядка  $1 - \operatorname{Re} \lambda_1$ . При  $\operatorname{Re} \lambda_1 = 1$ , напряжения у вершины сектора конечны и вообще отличны от нуля [5].

В той же работе [1] построены кривые зависимости  $\operatorname{Re} \lambda_1$  от угла раствора сектора  $\alpha$ : кривые I-I, II-II и I-II при  $\nu = 0,3$  (рис.1), отсюда следует, что в задачах I-I и II-II предельный угол раствора клина  $\alpha^*$ , больше которого напряжения имеют сингулярность, равен  $\pi$ , а в задаче I-II этот угол  $\alpha^* \approx 63^\circ$  при  $\nu = 0,3$ . Максимальный порядок сингулярности напряжений возникает в последней задаче ( $1 - \operatorname{Re} \lambda_1 = 0.75$ ), когда  $\alpha = 2\pi$ .

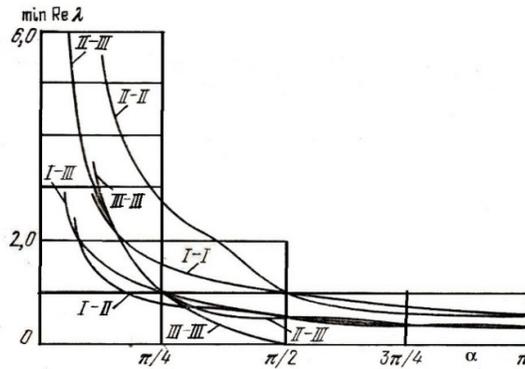


Рис. 1. График зависимости  $\operatorname{Re} \lambda_{\min}$  от угла раствора сектора для шести вариантов нагружения сторон сектора.

В 1969 г. А. И. Калландия [2], используя метод комплексных потенциалов Колосова–Мухелишвили, кроме указанных основных задач плоской теории упругости, рассмотрел также случай, когда на сторонах сектора осуществляются условия соприкасания с жестким штампом заданной формы без трения (задача III-III, гладкий контакт)

$$u_\varphi(r, \varphi) = f(r), \quad \tau_{r\varphi}(r, \varphi) = 0 \quad \text{при } \varphi = 0, \varphi = \alpha. \quad (7)$$

Рассмотрены и другие возможные виды граничных условий I-III и II-III (обозначения здесь очевидны). Получены соответствующие трансцендентные уравнения

$$(\sin \lambda \alpha + \sin \alpha)(\sin \lambda \alpha - \sin \alpha) = 0 \quad \text{(для случая III - III),} \quad (8)$$

$$\sin 2\lambda \alpha + \lambda \sin 2\alpha = 0 \quad \text{(для случая I - III),} \quad (9)$$

$$\sin 2\lambda \alpha - \lambda \sin 2\alpha/k = 0 \quad \text{(для случая II - III),} \quad (10)$$

и построены кривые зависимости  $\operatorname{Re} \lambda_1$  от угла  $\alpha$ : кривые III-III, I-III и II-III (рис. 1).

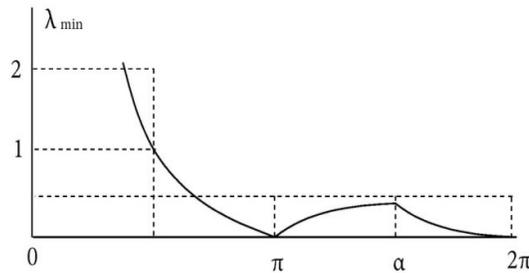


Рис. 2. График зависимости  $\lambda_{\min}$  от угла раствора сектора для задачи III–III

Заметим, однако, что кривая III–III была построена только в интервале  $0 < \alpha < \pi$ , а корень  $\lambda = 0$ , соответствующий  $\alpha = \pi$ , исключен из рассмотрения. В дальнейшем в работах [6, 7] продолжено исследование этого случая, и кривая сингулярности построена также в интервале  $\pi < \alpha < 2\pi$  (рис. 2); исходя из результатов работы [8] дана механическая интерпретация возникновения сингулярности напряжений, порядок которого стремится к единице при  $\alpha \rightarrow \pi$  и  $\alpha \rightarrow 2\pi$ , а коэффициенты при такой сингулярности в общем случае нагружения дуговой части контура отличны от нуля. Максимальный порядок сингулярности в задачах I–III и II–III возникает при  $\alpha = 2\pi$  и равен 0.75. Сингулярность напряжений возникает при любом угле  $\alpha$ , превосходящем предельный угол  $\alpha^* = \pi/2$ .

Наряду с граничными условиями (2) – (4) и (8) – (10) рассмотрим новый четвертый тип граничных условий (IV–IV), когда стороны сектора взаимодействуют с двумя абсолютно жесткими при растяжении и абсолютно гибкими при изгибе накладками (стрингерами), нагруженными растягивающими силами  $P_0$  и  $P_\alpha$ .

$$u_r(r, \varphi) = f(r), \quad \sigma_\varphi(r, \varphi) = 0 \quad \text{при } \varphi = 0, \varphi = \alpha. \quad (11)$$

Такие граничные задачи связаны с вопросами передачи нагрузок от тонкостенных элементов в виде стрингеров к массивным упругим телам [9, 10]. Задачу, в которой на одной стороне сектора заданы напряжения, а другая сторона взаимодействует со стрингером, обозначим через I–IV. Аналогично будем иметь и случаи II–IV, III–IV.

Поступая так же, как в работе [1], для определения комплексного параметра  $\lambda$  получим соответствующие уравнения

$$\sin(\lambda+1)\alpha \cdot \sin(\lambda-1)\alpha = 0 \quad (\text{для случая IV – IV}), \quad (12)$$

$$\sin 2\lambda\alpha - \lambda \sin 2\alpha = 0 \quad (\text{для случая I – IV}), \quad (13)$$

$$\sin 2\lambda\alpha + \lambda \sin 2\alpha/k = 0 \quad (\text{для случая II – IV}), \quad (14)$$

$$\cos(\lambda+1)\alpha \cdot \cos(\lambda-1)\alpha = 0 \quad (\text{для случая III – IV}). \quad (15)$$

Уравнение (12) получено также в работе [11], где исследовано упругое равновесие кругового сектора, стороны которого усилены стрингерами, а на дуговой части контура заданы внешние усилия. Установлено, что в окрестности угловой точки кругового сектора напряжения имеют особенность (стремятся к бесконечности) вида  $r^{-1+\varepsilon}$  ( $\varepsilon > 0$ ;  $\varepsilon \rightarrow 0$ ), ког-

да  $\alpha \rightarrow \pi$ ,  $\alpha \rightarrow 2\pi$ , а коэффициенты при такой особенности в общем случае нагружения дуговой части контура отличны от нуля, что с точки зрения механики хрупкого разрушения недопустимо. Однако подходящим подбором внешних усилий на дуговой части контура кругового сектора можно приравнять к нулю эти коэффициенты и исключить из решения «неинтегрируемые» особенности напряжений указанного вида.

Отметим, что уравнения (12) и (8) идентичны, т.к.

$$\sin(\lambda+1)\alpha \cdot \sin(\lambda-1)\alpha = -(\cos 2\lambda\alpha - \cos 2\alpha)/2 = \sin^2 \lambda\alpha - \sin^2 \alpha = 0.$$

Следовательно, в задачах III–III и IV–IV напряжения вблизи угловой точки сектора имеют одинаковый характер [6, 7].

Уравнение (13) совпадает с трансцендентным уравнением для бесконечного клина с углом раствора  $2\alpha$  ( $-\alpha \leq \varphi \leq \alpha$ ) при антисимметричном нагружении [3], когда нормальное напряжение нечетно, а касательное напряжение четно по переменной  $\varphi$ . Предельный угол в этом случае  $\alpha^* = 257^0$ . При симметричном нагружении бесконечного клина  $\alpha^* = 180^0$ , а соответствующее уравнение совпадает с уравнением (9). Очевидно, что в общем случае нагружения сторон клина  $\alpha^* = 180^0$  [3].

Таким образом, однородные граничные условия (11) являются условиями антисимметрии на средней линии упругого клина ( $\varphi = 0$ ), занимающего область  $-\alpha \leq \varphi \leq \alpha$ ,  $r \geq 0$ . А однородные граничные условия (7) – это хорошо известные условия симметрии на средней линии клина ( $\varphi = 0$ ).

Трансцендентное уравнение (14) было получено в работе [3] при рассмотрении второй основной задачи плоской теории упругости для бесконечного клина в антисимметричной постановке. Для симметричной задачи имеет место уравнение (10), т.е. и для второй основной задачи для клина однородные условия (11) являются условиями антисимметрии на средней линии упругого клина ( $\varphi = 0$ ).

Подробно исследуем действительные и простые корни уравнения (15):

$$\lambda_k = \frac{\pi}{2\alpha}(2k+1)+1, \quad \tilde{\lambda}_n = \frac{\pi}{2\alpha}(2n+1)-1, \quad \lambda_k > 0, \quad \tilde{\lambda}_n > 0. \quad (16)$$

С помощью анализа формул (16) легко определить  $\lambda_{\min}$ :

$$\lambda_{\min} = \begin{cases} \tilde{\lambda}_2 = 5\pi/2\alpha - 1 & \text{при } 0 < \alpha < 2\pi, \\ \tilde{\lambda}_0 = \pi/2\alpha - 1 & \text{при } 0 < \alpha < \pi/2, \\ \lambda_{-1} = 1 - \pi/2\alpha & \text{при } \pi/2 < \alpha < \pi, \\ \lambda_1 = 3\pi/2\alpha - 1 & \text{при } \pi < \alpha < 3\pi/2, \\ \lambda_{-2} = 1 - 3\pi/2\alpha & \text{при } 3\pi/2 < \alpha < 2\pi. \end{cases} \quad (17)$$

График изменения  $\lambda_{\min}$  от угла  $\alpha$  представлен на рис. 3.

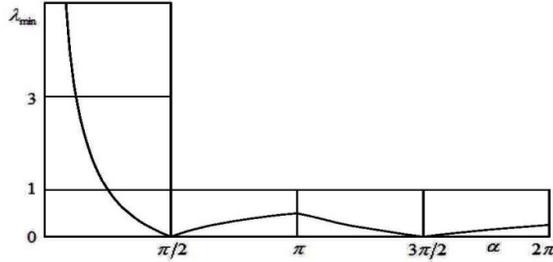


Рис.3. График зависимости  $\lambda_{\min}$  от угла  $\alpha$  для задачи III–IV.

Условия  $\lambda_k > 0$  и  $\tilde{\lambda}_n > 0$ , в зависимости от угла раствора сектора, ограничивают область изменения параметров  $k$  и  $n$ :

- а) при  $0 < \alpha < 2\pi$  имеем  $k = 0, 1, 2, \dots$ ;  $n = 2, 3, 4, \dots$ ; задача а),  
 б) при  $0 < \alpha < \pi/2$  имеем  $k = 0, 1, 2, \dots$ ;  $n = 0, 1, 2, \dots$ ; задача б),  
 в) при  $\pi/2 < \alpha < \pi$  имеем  $k = -1, 0, 1, \dots$ ;  $n = 1, 2, 3, \dots$ ; задача в), (18)  
 г) при  $\pi < \alpha < 3\pi/2$  имеем  $k = -1, 0, 1, \dots$ ;  $n = 1, 2, 3, \dots$ ; задача г),  
 д) при  $3\pi/2 < \alpha < 2\pi$  имеем  $k = -2, -1, 0, \dots$ ;  $n = 2, 3, 4, \dots$ ; задача д).

На рис. 4 приведены графики корней  $\lambda_k$  и  $\tilde{\lambda}_n$  ( $k = -2, -1$ ;  $n = 0, 1, 2, 3$ ;  $\lambda_k > 0, \tilde{\lambda}_n > 0$ ), дающие при определенных значениях  $\alpha$  бесконечные напряжения. На рисунке отчетливо видна также кривая  $\lambda_{\min}$ .

Пересечения графиков  $\lambda_k > 0$  и  $\tilde{\lambda}_n > 0$  с линией  $\lambda = 1$  (рис. 4) определяют предельные углы раствора сектора для задач а) – д).

Так, в задаче а) предельный угол раствора сектора в случае конкретного вида нагружения дуговой части контура равен  $\alpha_{a1}^* = 5\pi/4 = 225^\circ$ . Когда  $\alpha > \alpha_{a1}^*$ , напряжение при  $r \rightarrow 0$  имеет сингулярность, порядок которой равен  $1 - \tilde{\lambda}_2$ .

В научной литературе, по-видимому, отсутствует не зависящий от свойств материала такой предельный угол. Более того, в этой же задаче возникает второй тип сингулярности напряжений, связанный с корнем  $\tilde{\lambda}_3$  и имеющий порядок  $(1 - \tilde{\lambda}_3)$  (рис. 4). Если нагружение на дуговой части таково, что коэффициент при первой особенности становится равным нулю, возникает второй, также неизвестный предельный угол

$$\alpha_{a2}^* = 7\pi/4 = 315^\circ.$$

В задаче б) предельный угол  $\alpha_b^* = \pi/4$ , в задаче в) имеем  $\alpha_v^* = 3\pi/4$ , для задач г) предельный угол  $\alpha_g^* = 5\pi/4$ , а задача д) имеет предельный угол  $\alpha_d^* = 7\pi/4$ .

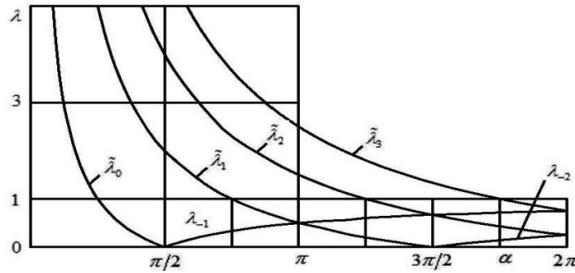


Рис. 4. График зависимости  $\lambda_k, \tilde{\lambda}_n$  от угла  $\alpha$ .

**3. Заключение.** В работе к имеющимся типам граничных условий, заданных на радиальных сторонах сектора (задачи I–I, II–II, I–II; III–III, I–III, II–III), добавляются еще один вид граничных условий (задача IV–IV) и случаи его сочетания с известными условиями (задачи I–IV, II–IV, III–IV), связанные с вопросами передачи нагрузок от тонкостенных элементов к деформируемым телам.

Установлено следующее:

- в зависимости от вида нагружения дуговой части контура сектора в задаче III–IV возможны четыре типа предельных углов –  $\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$ . В задаче III–III их три –  $\pi/2, \pi$  и  $3\pi/2$ .

- если в задачах I–III и II–III сингулярность напряжений может появиться при  $\alpha > \pi/2$ , то в задаче III–IV она возникает уже при  $\alpha > \pi/4$ ;

- в задаче III–IV порядок сингулярности напряжений стремится к единице, когда  $\alpha \rightarrow \pi/2$  и  $\alpha \rightarrow 3\pi/2$ . В задаче III–III напряжения имеют стремящийся к единице порядок при  $\alpha \rightarrow \pi$  и  $\alpha \rightarrow 2\pi$ .

Институт механики НАН РА

**А. М. Саргсян**

### Об однородных сингулярных задачах теории упругости

Исследуется поведение напряжений вблизи вершины упругого сектора, когда 1) обе радиальные стороны усилены абсолютно жесткими при растяжении и гибкими при изгибе накладками (задача IV–IV), 2) одна сторона усилена накладкой, а на другой стороне заданы либо напряжения (задача I–IV), либо перемещения (задача II–IV), либо условие гладкого контакта (задача III–IV). Граничные условия на дуговой части контура сектора исключены из рассмотрения, т.к. они не влияют на характер напряжений в окрестности вершины сектора. Установлены не зависящие от свойств материала новые предельные углы раствора сектора, меньше (больше) которых напряжения вблизи вершины стремятся к нулю (к бесконечности).

## Ա. Մ. Սարգսյան

### Առաձգականության տեսության համասեռ սինգուլյար խնդիրների մասին

Հետազոտվել է լարումների վարքը առաձգական սեկտորի զագաթի շրջակայքում, երբ 1. սեկտորի երկու շառավղային կողմերը ուժեղացված են ձգման նկատմամբ բացարձակ կոշտ, իսկ ծոման նկատմամբ՝ ձկուն վերդրակներով (խնդիր IV–IV), 2. մի կողմը ուժեղացված է վերդրակով, իսկ մյուսում տրված են կամ լարումները (խնդիր I–IV), կամ տեղափոխությունները (խնդիր II–IV), կամ ողորկ կոնտակտի պայման (խնդիր III–IV): Բացահայտված են նյութի հատկություններից անկախ սեկտորի բացվածքի նոր սահմանային անկյուններ, որոնցից փոքր (մեծ) անկյունների դեպքում լարումները սեկտորի զագաթի շրջակայքում ձգտում են զրոյի (անվերջության):

## A. M. Sargsyan

### On Homogeneous Singular Problems of Elasticity Theory

The behaviour of the stresses in the vicinity of the apex of the rigid circular sector, when: 1. the both sides are reinforced by absolutely rigid at tension and flexible at bending stringers (problem IV–IV); 2. one side is reinforced by a stringer and on the other side either stresses (problem I–IV), or displacements (problem II–IV), or the condition of the smooth contact (problem III–IV) are given, is investigated. The boundary conditions of the arch part are not considered, as they do not effect on the character of the stresses in the vicinity of the sector apex. Not dependent on the material properties, new limiting angles of the sector opening, less (more) of which the stresses in the vicinity of the sector apex vanish (tend to infinity), are established.

## Литература

1. *Williams M. L.* – J.Appl. Mech. 1952. V. 19. №4. P. 526-528.
2. *Каландия А. И.* – ПММ. 1969. Т. 33. №1. С. 132-135.  
*Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М. Л. Изд-во АН СССР. 1963. 367 с.
3. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М. Наука. 1974. 640 с.
4. *Чобанян К. С.* Напряжения в составных упругих телах. Ереван. Изд-во АН АрмССР. 1987. 338 с.
5. *Саргсян А. М.* – Изв. НАН Армении. Механика. 2008. Т. 61. №1. С. 48-53.
6. *Саргсян А. М.* О концентрации напряжений в упругом секторе и пьезоэлектрическом клине. Germany. LAB LAMBERT Academic Publishing. 2016. 77 с.
7. *Gevorgyan S. Kh., Manukyan E.H, Mkhitaryan S.M., Mkrtychyan M.S.* On a Mixed Problem for an Elastic Space with a Crack under Antiplane Deformations. Collection of Papers. Yerevan. 2005. 282 p.
8. *Melan E.* – Ing. Archiv. 1932. Bd. 3. Heft 2. P. 123.
9. *Александров В. М., Мхитарян С. М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М. Наука. 1983. 488 с.
10. *Саргсян А. М.* – МКМ. 2017. Т. 53. №1. С. 143-154.