ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 118 2018 № 2

**МЕХАНИКА**

УДК 539.3

**К. А. Жамакочян, член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян**

# Математическая модель микрополярных упругих тонких стержней со стесненным вращением и метод конечных элементов

(Представлено 16/III 2018)

**Ключевые слова:** *математическая модель, микрополярный упругий тонкий стержень, метод конечных элементов.*

**Введение.** Вопрос о математическом моделировании какого-либо объекта [1] порождает четкий план действий. Его можно условно разбить на три этапа: модель – алгоритм – программа.

Данная работа относится к математическому моделированию изгибной деформации упругого тонкого стержня в постановке моментной теории упругости со стесненным вращением, с учетом поперечных сдвиговых деформаций, и развитию метода конечных элементов для решения прикладных задач в этой области.

В первой части работы развивается уже разработанный подход [2-4], и исходя из уравнений плоской задачи моментной теории упругости со стесненным вращением [5] построена прикладная модель изгибной деформации тонкого стержня с выводом формулы для плотности потенциальной энергии деформации.

Среди численных методов особую популярность в настоящее время приобрел метод конечных элементов (МКЭ), который тесно связан с персональным компьютером и вполне ему соответствует. Для МКЭ в форме перемещений основным функционалом является полная потенциальная энергия системы [6, 7].

Для решения конкретных задач об определении напряженно-деформированного состояния изгибной деформации микрополярных упругих тонких стержней со стесненным вращением нами разработан МКЭ, который реализуется на персональном компьютере.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим изотропный микрополярно-упругий параллелепипед постоянной высоты $2h$, длины $a$ и толщины $2h_1 = 1$. Координатную плоскость $x_1x_3$ разместим в срединной плоскости параллелепипеда. Ось $x_3$ направим по высоте, а ось $x_1$ – по длине параллелепипеда, которая делит высоту $2h$ пополам. Предположим, что в направлении оси $x_2$ осуществлено обобщенное плоское напряженное состояние. Основные уравнения обобщенного плоского напряженного состояния микрополярной теории упругости со стесненным вращением приведены в работе [5].

Нашей целью является построение прикладной (одномерной) модели изгибной деформации тонкого стержня с учетом поперечных сдвиговых деформаций, принимая за основу уравнения двумерной теории обобщенного плоского напряженного состояния микрополярной упругости со стесненным вращением с применением уже разработанного подхода [2-4].

Описание закона изменения перемещений и поворота по толщине стержня принимаем линейным [2]:

$$V_3 = w(x_1), \quad V_1 = x_3\psi_1(x_1), \quad \omega_2 = \Omega_2(x_1), \tag{1.1}$$

В работах [2-4] кинематическая гипотеза (1.1) названа обобщенной на микрополярный случай гипотезой Тимошенко (т.к. формулы для перемещений в (1.1) совпадают с формулами кинематической гипотезы Тимошенко [8] в классической теории упругости).

В микрополярной теории упругости со стесненным вращением повороты частиц тела выражаются через перемещения так, как в классической теории упругости $\left(\vec{\omega} = \frac{1}{2} rot\vec{V}\right)$, так что в данном случае будем иметь

$$\omega_2 = \Omega_2(x_1) = \frac{1}{2}\left(\psi_1 - \frac{dw}{dx_1}\right). \tag{1.2}$$

Кроме кинематической гипотезы (1.1) для приведения двумерной задачи к одномерной в работе [2] разработаны и статические гипотезы.

На основе этих гипотез из указанной выше двумерной теории приходим к одномерной модели (прикладной модели) изгибной деформации микрополярных упругих тонких стержней со стесненным вращением, определяющие уравнения которой имеют вид:

уравнения равновесия (движения)

$$\begin{gathered} \frac{\partial N_{13}}{\partial x_1} = -2q(2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}), \quad \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} - N_{31} = -h\cdot 2q_1(\frac{2\rho h^3}{3}\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2}), \\ \frac{\partial L_{12}}{\partial x_1} + N_{31} - N_{13} = -2m_3(2Jh\frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial t^2}); \end{gathered} \tag{1.3}$$

соотношения упругости

$$\begin{gathered} N_{13} + N_{31} = 4h\mu\Gamma_{13}, \\ M_{11} = \frac{2Eh^3}{3}K_{11}, \quad L_{12} = 2Bhk_{12}; \end{gathered} \tag{1.4}$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{13}=\frac{\partial w}{\partial x_1}+\psi_1,$$
$$K_{11}=\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1},\quad k_{12}=\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1},\Omega_2=\frac{1}{2}\left(\psi_1-\frac{\partial w}{\partial x_1}\right). \tag{1.5}$$

Здесь $N_{13}, N_{31}$ – усредненные по толщине стержня усилия; $M_{11}, L_{12}$ – усредненные моменты от силового напряжения $\sigma_{11}$ и моментного напряжения $\mu_{12}$ по толщине стержня; $\Gamma_{13}$ – сдвиговая деформация; $K_{11}$ – изгибание оси стержня (связанного с изгибающим моментом $M_{11}$), а $k_{12}$ – изгибание оси стержня (связанного с изгибающим моментом $L_{12}$); $2q$ – интенсивность распределенной нагрузки, нормальной к оси стержня; $2q_1$ – интенсивность распределенной нагрузки, направленной параллельно к оси стержня; $2m_3$ – интенсивность распределенного внешнего момента; $E$ и $\mu$ – классические модули упругости и сдвига материала стержня; $B$ – новая упругая константа микрополярного материала стержня.

Граничные условия на торце стержня (на $x_1=0$ или $x_1=a$) имеют вид:

$$M_{11}=M_{11}^{*},\ \text{или}\ \psi_1=\psi^{*}{}_1,$$
$$N_{13}=N_{13}^{*},\ \text{или}\ w=w^{*}, \tag{1.6}$$
$$L_{12}=L_{12}^{*},\ \text{или}\ \Omega_2=\Omega_2^{*}.$$

Общий вид функционала полной потенциальной энергии системы выражается так:

$$U=\int_0^a\left(W-2q_1h\psi_1-2qw-2m_3\Omega_2\right)dx_1-$$
$$-\left((M_{11}\psi_1+N_{13}w+L_{12}\Omega_2)\big|_{x_1=a}-(M_{11}\psi_1+N_{13}w+L_{12}\Omega_2)\big|_{x_1=0}\right), \tag{1.7}$$

где

$$W=E\frac{h^3}{3}K_{11}^2+h\mu\Gamma_{13}^2+Bhk_{12}^2, \tag{1.8}$$

$W$ – линейная плотность потенциальной энергии деформации микрополярного стержня при изгибе ($\Omega_2$ выражается формулой (1.2)).

Минимизируя функционал (1.7), получим основные дифференциальные уравнения (1.3)-(1.5) и естественные граничные условия (1.6) для изгибной деформации микрополярной балки.

**2. Матрица жесткости конечного элемента микрополярной балки.** Рассмотрим вывод матрицы жесткости конечного элемента микрополярной балки.

Выберем для прогиба $w$ и полного поворота $\psi_1$ нормального элемента разложения в виде кубических полиномов:

$$w(x_1)=a_0+a_1x_1+a_2x_1^{\,2}+a_3x_1^{\,3},$$
$$\psi_1(x_1)=b_0+b_1x_1+b_2x_1^{\,2}+b_3x_1^{\,3}, \tag{2.1}$$

здесь $a_i, b_i$ – коэффициенты, которые выражаются через узловые перемещения и повороты. Узловые перемещения обозначим следующим образом:

$$\begin{aligned} &w(0)=\delta_1,\ \ w'(0)=\delta_2,\ \ \psi_1(0)=\delta_3,\ \ \psi_1{}'(0)=\delta_4,\\ &w(a)=\delta_5,\ \ w'(a)=\delta_6,\ \ \psi_1(a)=\delta_7,\ \ \psi_1{}'(a)=\delta_8. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Как видим, данный конечный элемент имеет восемь степеней свободы.

Подставив разложения (2.1) в (2.2), выразим коэффициенты $a_i, b_i$ через узловые перемещения и повороты $\delta_k$. Подставив $a_i, b_i$ в (2.1), имеем для перемещения и поворотов аппроксимации:

$$\begin{aligned} w(x_1) &= \sum_{i=1,2,5,6} \delta_i N_i(x_1),\\ \psi_1(x_1) &= \sum_{i=3,4,7,8} \delta_i N_i(x_1), \end{aligned} \tag{2.3}$$

где $N_i(x)$ – функции формы элемента, которые имеют вид:

$$\begin{aligned} &N_1 = N_3 = 1-\frac{3}{a^2}x_1{}^2+\frac{2}{a^3}x_1{}^3,\ \ N_2 = N_4 = x_1-\frac{2}{a}x_1{}^2+\frac{1}{a^2}x_1{}^3,\\ &N_5 = N_7 = \frac{3}{a^2}x_1{}^2-\frac{2}{a^3}x_1{}^3,\ \ N_6 = N_8 = -\frac{1}{a}x_1{}^2+\frac{1}{a^2}x_1{}^3. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Подставив (2.3) в функционал (1.7), после интегрирования получим функцию восьми независимых переменных $\delta_1,...,\delta_8$. Минимизация функционала (1.7) приводит к нахождению минимума функции восьми независимых переменных

$$\frac{\partial U}{\partial \delta_k} = 0 \qquad (\mathrm{k} = 1,2,3,...,8).$$

Вычислив соответствующие частные производные, получим систему линейных алгебраических уравнений

$$[K]\cdot\{\delta\} = \{P\}. \tag{2.5}$$

Здесь $K$ – матрица жесткости элемента размером $8\times 8$, представляющего собой важнейшее понятие метода конечных элементов; $\{\delta\}^T = \{\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4,\delta_5,\delta_6,\delta_7,\delta_8\}$ – вектор узловых перемещений и поворотов; $\{P\}^T$ – сосредоточенные узловые силы и моменты.

Ниже приведены выражения для элементов матрицы жесткости конечного элемента:

$$K_{11} = -K_{15} = K_{55} = \frac{6h(5B+2a^2\mu)}{5a^3},$$

$$K_{12} = K_{16} = -K_{25} = -K_{76} = \frac{3Bh}{a^2}+\frac{h\mu}{5},$$

$$K_{13} = K_{17} = -K_{35} = -K_{57} = -h\mu,$$

$$K_{14} = -K_{18} = -K_{23} = K_{27} = K_{36} = -K_{45} = K_{58} = -K_{67} = \frac{Bh}{2a}-\frac{ha\mu}{5},$$

$$K_{22}=K_{66}=\frac{2Bh}{a}+\frac{4ah\mu}{15},K_{24}=K_{68}=\frac{Bh}{4},K_{26}=\frac{Bh}{a}-\frac{ha\mu}{15},$$

$$K_{28}=-K_{46}=-\frac{Bh}{4}+\frac{a^2h\mu}{30},$$

$$K_{33}=K_{77}=\frac{h(21B+26a^2\mu+28h^2E)}{35a},$$

$$K_{34}=-K_{78}=\frac{h(21B+44a^2\mu+28h^2E)}{420},$$

$$K_{37}=\frac{h(-21B+9a^2\mu-28h^2E)}{35a},$$

$$K_{38}=-K_{47}=\frac{h(21B-26a^2\mu+28h^2E)}{420},$$

$$K_{44}=K_{88}=\frac{ah(21B+6a^2\mu+28h^2E)}{315},$$

$$K_{48}=-\frac{ah(21B+18a^2\mu+28h^2E)}{1260}.$$

**3. Модельный расчет микрополярных упругих стержней со стесненным вращением для задачи статики.** В качестве примера рассмотрим задачу изгиба стержня, когда вдоль оси $x_1$ приложена равномерно распределенная нагрузка интенсивности $q$ (в этом случае $q_1=0, q\neq 0, m_3=0$) а концы стержня шарнирно-оперты. Для граничных условий шарнирного опирания имеем

$$w=0,\ M_{11}=0,\ L_{12}=0,\ \text{при}\ x_1=0;a. \tag{3.1}$$

Имея в виду (3.1), для функционала (1.7) будем иметь

$$U=\int_0^a (W-2qw)dx_1.$$

После построения матрицы жесткости $K$ и вектора эквивалентных узловых сил и моментов $P$ с учетом граничных условий (3.1) составим систему линейных алгебраических уравнений (2.5), соответствующую рассматриваемой задаче при разных числах разбивания стержня на конечные элементы.

Рассмотрим случай, когда стержень разбит на два конечных элемента. Результат вычислений (максимальный прогиб) приведем для случая, когда физические постоянные имеют значения: $\mu=0,75\,МПа$, $E=191\,МПа$, $B=$ $=1000\,H$, нагрузка $q=0,5\cdot 10^3\ Па$, а геометрические размеры балки таковы: $a=8\ мм$, $h=0,2\ мм$ (приведем также результат по классической теории изгиба упругого тонкого стержня).

Как видно из табл. 1, учет микрополярности материала стержня приводит к повышению жесткости по сравнению с классическим случаем материала.

**Таблица 1**

**Максимальные прогибы микрополярного и классического стержня**

| | Микрополярный стержень | | | Классический стержень | | | $\frac{w_{\max}^{кл} - w_{\max}^{мик}}{w_{\max}^{кл}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Точное значение | Два конечных элемента | Четыре конечных элемента | Точное значение | Два конечных элемента | Четыре конечных элемента | |
| $w_{\max}$ м | $2.86\cdot10^{-8}$ | $2.59\cdot10^{-8}$ | $2.77\cdot10^{-8}$ | $4\cdot10^{-8}$ | $3.62\cdot10^{-8}$ | $3.86\cdot10^{-8}$ | 0.285 |

**4. Динамическая задача микрополярного упругого стержня со стеснённым вращением.** Приведем общий вид функционала полной механической энергии (сумма потенциальной энергии деформации и кинетической энергии) микрополярно-упругого стержня для изгибной деформации:

$$\tilde{U} = \int_0^a \left( W_0 + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \cdot w + \frac{\rho h^3}{3} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} \cdot \psi_1 + Jh \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial t^2} \cdot \Omega_2 \right) dx_1. \qquad (4.1)$$

Представим основные кинематические функции задачи при свободных колебаниях:

$$\begin{aligned} w(x_1,t) &= \left(a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3\right)\sin\omega t, \\ \psi(x_1,t) &= \left(b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_1^2 + b_3 x_1^3\right)\sin\omega t, \end{aligned} \qquad (4.2)$$

где $\omega$ частота собственных колебаний.

Подставляя (4.2) в (4.1), задачу минимизации функционала (4.1) приводим к нахождению минимума функции восьми независимых переменных $\left(\frac{\partial U}{\partial \delta_k} = 0,\ \ \mathrm{k} = 1,2,3,...,8\right)$.

Вычислив соответствующие частные производные, приходим к матричному уравнению:

$$\left(K - \omega^2 M\right)\cdot\{\delta\} = 0, \qquad (4.3)$$

где $K$ – матрица жесткости конечного элемента, $M$ – матрица масс конечного элемента.

Ниже приведены выражения для элементов матрицы массы конечного элемента:

$$M_{11} = M_{55} = \frac{3hJ}{5a} + \frac{26ha\rho}{35},\ \ M_{12} = -M_{56} = \frac{hJ}{20} + \frac{11ha^2\rho}{105},$$

$$M_{13} = M_{17} = -M_{35} = -M_{57} = \frac{hJ}{4},$$

$$M_{14} = -M_{18} = -M_{23} = M_{27} = M_{36} = -M_{45} = M_{58} = -M_{67} = \frac{ahJ}{20},$$

$$M_{15} = -\frac{3hJ}{5a} + \frac{9}{35}ah\rho, M_{16} = -M_{25} = \frac{h(21J - 26a^2\rho)}{420},$$

$$M_{22}=M_{66}=\frac{h(7aJ+2a^3\rho)}{105}, M_{24}=M_{68}=0$$

$$M_{26}=\frac{h(-14aJ-12a^3\rho)}{840}, M_{28}=-M_{46}=-\frac{a^2hJ}{120},$$

$$M_{33}=M_{77}=\frac{13}{210}ah(3J+4h^2\rho), M_{34}=-M_{78}=11a^2h(\frac{J}{420}+\frac{h^2\rho}{315}),$$

$$M_{37}=\frac{3}{140}ah(3J+4h^2\rho), M_{38}=-M_{47}=-\frac{13}{2520}a^2h(3J+4h^2\rho),$$

$$M_{44}=M_{88}=\frac{ha^3J}{210}+\frac{2}{315}h^3a^3\rho, M_{48}=-\frac{3ha^3J}{840}-\frac{1}{210}h^3a^3\rho.$$

Для определения частот свободных колебаний составим уравнение

$$\left|K^{-1}M-\frac{1}{\omega^2}E\right|=0.$$

Результат вычислений (когда стержень разбит на два конечных элемента) приведем для случая, когда физические постоянные стержня имеют значения предыдущей задачи, а $\rho=7700 кг/м^3, J=5{,}3\cdot10^{-6} кг/м.$

**Таблица 2**

**Наименьшая частота $\omega$ свободных колебаний**

| | | Микрополярный стержень, $с^{-1}$ | | Классический стержень, $с^{-1}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ ($м$) | $h$ ($м$) | Точное значение | Два конечных элемента | Точное значение | Два конечных элемента |
| $8\cdot10^{-3}$ | $0.2\cdot10^{-3}$ | $0.848\cdot10^5$ | $0.849\cdot10^5$ | $0.7181\cdot10^5$ | $0.7184\cdot10^5$ |
| $10^{-7}$ | $0.5\cdot10^{-9}$ | $0.1965\cdot10^{11}$ | $0.1969\cdot10^{11}$ | $0.1404\cdot10^{10}$ | $0.1408\cdot10^{10}$ |
| $10^{-8}$ | $0.5\cdot10^{-10}$ | $0.1965\cdot10^{12}$ | $0.1969\cdot10^{12}$ | $0.1404\cdot10^{11}$ | $0.1408\cdot10^{11}$ |

Как видно из приведенных таблиц, учет микрополярности материала стержня приводит к повышению расчетной собственной частоты, а в области наноразмеров эти частоты находятся в терагерцевом диапазоне.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 15T-2C138.

Ширакский государственный университет им. М. Налбандяна
e-mail: knarikzhamakochan@mail.ru, s_sargsyan@yahoo.com

**К. А. Жамакочян, член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян**

## Математическая модель микрополярных упругих тонких стержней со стесненным вращением и метод конечных элементов

Принимаются гипотезы, адекватным образом заменяющие свойства асимптотического решения граничной задачи обобщенного плоского напряженного состояния микрополярной теории упругости со стесненным вращением в тонкой двумерной области, на основе которых построена прикладная модель изгибной деформации тонких стержней. Разрабатывается соответствующий алгоритм метода конечных элементов для решения граничных задач статики и свободных колебаний изгибной деформации микрополярных упругих тонких стержней со стесненным вращением. На основе анализа полученных численных результатов устанавливаются некоторые эффективные свойства учета микрополярности материала по сравнению с классическим случаем.

**Ք. Ա. Ժամակոչյան, ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ս. Հ. Սարգսյան**

### Կաշկանդված պտույտներով միկրոպոլյար առաձգական բարակ ձողերի մաթեմատիկական մոդելը և վերջավոր էլեմենտների մեթոդը

Ընդունվում են վարկածներ, որոնք համարժեք փոխարինում են կաշկանդված պտույտներով միկրոպոլյար առաձգականության տեսության ընդհանրացված հարթ լարվածային վիճակի երկչափ բարակ տիրույթում եզրային խնդրի ասիմպտոտիկ լուծման հատկությունները, որոնց հիմքի վրա կառուցվում է բարակ ձողի ծռման դեֆորմացիայի կիրառական մոդելը: Միկրոպոլյար առաձգական կաշկանդված պտույտներով ձողերի ստատիկայի և ազատ տատանումների եզրային խնդիրների լուծման համար մշակվել է վերջավոր էլեմենտների մեթոդի համապատասխան ալգորիթմ: Ստացված թվային արդյունքների անալիզի հիման վրա հաստատվում են նյութի միկրոպոլյարության հաշվառման արդյունավետ յուրահատկությունները համեմատած դասական դեպքի հետ:

**K. A. Zhamakochyan, corresponding-member of NAS RA S. H. Sargsyan**

### Mathematical Model of Micropolar Elastic Thin Beams with Constrained Rotations and the Finite Element Method

In this paper hypotheses are accepted, which adequately replace properties of asymptotic solution of boundary-value problem of plane stress state of micropolar theory of elasticity with constrained rotation in thin two-dimensional region. On the basis of them applied model of bending deformation of thin beams is constructed. The appropriate algorithm of the finite element method is developed for solving boundary problems of statics and free oscillations of bending deformation of micropolar elastic thin beams with constrained rotation. On the basis of the analysis of the numerical results effective properties of the micropolarity of the material are established compared to the classical case.

**Литература**

1. *Самарский А. А., Михайлов А. П.* Математическое моделирование. М. Физматлит. 2005. 320 с.
2. *Sargsyan S. H.* – Journal of Materials Science and Engineering. 2012. V. 2. №1. P. 98-108.
3. *Саркисян С. О.* –Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т. 53. Вып. 2. С. 148-156.
4. *Саркисян С. О.* – Физическая мезомеханика. 2011. Т. 14. №1. С. 55-66.

5. *Nowacki W.* Theory of asymmetric elasticity. Oxford, etc. Pergamon-Press. 1986. 383 p.
6. *Трушин С. И.* Метод конечных элементов. Теория и задачи. М. Изд-во ассоциации строительных вузов. 2008. 256 с.
7. *Самогин Ю. Н., Хроматов В. Е., Чирков В. П.* Метод конечных элементов в задачах сопротивления материалов. М. Физматлит. 2012. 200 с.
8. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле. М. Наука. 1967. 444 с.