ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 118 2018 № 1

МЕХАНИКА

УДК 539.3

К. А. Жамакочян

Применение метода степенных рядов для построения математической модели микрополярных упругих тонких балок со стесненным вращением

(Представлено чл.-кор. НАН РА С.О. Саркисяном 27/XI 2017)

Ключевые слова: *микрополярный, стесненное вращение, метод степенных рядов, модель, тонкие балки.*

Введение. Решение проблемы сведения трехмерных уравнений классической теории упругости к двумерным уравнениям теории пластин и оболочек осуществляется тремя основными методами [1-4]: (а) методом гипотез (классические гипотезы балок Бернулли – Эйлера [5], гипотезы Тимошенко [6, 7]); (б) методом разложений по толщине в степенные ряды [8]; (в) асимптотическим методом [1-4, 9].

В работах [10-13] построено асимптотическое решение трехмерной краевой задачи микрополярной теории упругости в тонких областях, а в работах [14-18] на основе качественных сторон асимптотического решения сформулированы адекватные гипотезы и построены прикладные теории статики, динамики и термоупругости микрополярных упругих тонких балок, пластин и оболочек.

В данной работе развивается метод разложений по толщине в степенные ряды для граничной задачи обобщенного плоского напряженного состояния микрополярной упругости для построения прикладной-одномерной модели изгибной деформации микрополярных упругих тонких балок и проведено сравнение с аналогичной моделью балок, построенной в работе [14] на основе метода гипотез и имеющей асимптотическое подтверждение.

1. Постановка задачи. Рассмотрим параллелепипед постоянной высоты $2h$, длины a и постоянной толщины $2h_1$. Координатную плоскость x_1x_3 разместим в срединной плоскости параллелепипеда, которая разделит толщину $2h_1$ на две симметричные части. Ось x_3 направим по высоте параллелепипеда (которая делит высоту $2h$ пополам), ось x_1 – по длине параллелепипеда. Будем считать, что в параллелепипеде по направлению оси

x_2 (по направлению толщины $2h_1$) осуществляется обобщенное плоское напряженное состояние и задача определения напряженно-деформированного состояния сводится к краевой задаче в срединной плоскости параллелепипеда x_1x_3 (т.е. к изучению задачи в прямоугольнике: $0 \le x_1 \le a$, $-h \le x_3 \le h$). Для дальнейшего рассмотрения примем, что $2h_1 = 1$. Будем исходить из основных уравнений задачи обобщенного плоского напряженного состояния микрополярной теории упругости со стесненным вращением [20-22]:

уравнения равновесия

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3}=0,\qquad \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}=0,\quad \frac{\partial\mu_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu_{32}}{\partial x_3}-(\sigma_{13}-\sigma_{31})=0; \quad (1.1)$$

физические соотношения упругости

$$\sigma_{11}=\frac{E}{1-\nu^2}(\gamma_{11}+\nu\gamma_{33}),\ \ \sigma_{33}=\frac{E}{1-\nu^2}(\gamma_{33}+\nu\gamma_{11}),\ \ \sigma_{13}+\sigma_{31}=2\mu\gamma_{13},$$
$$\mu_{12}=B\chi_{12},\quad \mu_{32}=B\chi_{32}; \quad (1.2)$$

геометрические соотношения

$$\gamma_{11}=\frac{\partial V_1}{\partial x_1},\ \ \gamma_{33}=\frac{\partial V_3}{\partial x_3},\ \ \gamma_{13}=\frac{\partial V_1}{\partial x_3}+\frac{\partial V_3}{\partial x_1},\ \ \ \chi_{12}=\frac{\partial\omega_2}{\partial x_1},\ \ \chi_{32}=\frac{\partial\omega_2}{\partial x_3},$$
$$\omega_2=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_1}{\partial x_3}-\frac{\partial V_3}{\partial x_1}\right). \quad (1.3)$$

Здесь $\sigma_{11},\sigma_{33},\sigma_{31},\sigma_{13}$ – силовые напряжения; μ_{12}, μ_{32} – моментные напряжения; $\gamma_{11},\gamma_{33},\gamma_{13},\gamma_{31}$ – деформации; χ_{12}, χ_{32} – изгибы-кручения; V_1,V_3 – перемещения, ω_2 – независимый поворот точек прямоугольника вокруг оси x_2; E,ν,α,B – упругие постоянные микрополярного тела со стесненным вращением.

На лицевых линиях прямоугольника $x_3=\pm h$ считаются заданными силовые и моментные граничные условия:

$$\sigma_{31}=\pm p_1^{\pm},\ \ \sigma_{33}=\pm p_3^{\pm},\ \ \ \mu_{32}=\pm m_2^{\pm},\ \text{при}\ x_3=\pm h. \quad (1.4)$$

Далее будем рассматривать задачу изгиба.

Граничные условия на кромках прямоугольника $(x_1=0, x_1=a)$ в зависимости от способа приложения внешней нагрузки или закрепления ее точек записываются в силовых и моментных напряжениях, либо в перемещениях и поворотах, либо в смешанном виде.

Будем считать, что $2h << a$ (рассматриваемый прямоугольник тонкий, т.е. балка тонкая).

2. Метод степенных рядов. Если выражения (1.3) подставим в формулы (1.2), получим, что силовые и моментные напряжения будут выражаться через перемещения V_1, V_3. Для построения прикладной модели изгибной деформации микрополярных балок со стесненным вращением применим метод степенных рядов [8]. Аппроксимируем V_1, V_3 степенными рядами относительно x_3:

$$V_1 = \sum_{n=0}^{\infty} V_{1,n} x_3^n, \quad V_3 = \sum_{n=0}^{\infty} V_{3,n} x_3^n. \tag{2.1}$$

Подставляя ряды (2.1) в основные уравнения и граничные условия (приведенные выше) плоской задачи микрополярной теории упругости со стесненным вращением, имеющим место в тонком прямоугольнике, получим рекуррентные соотношения и условия, связывающие коэффициенты частичных сумм (полиномов) (2.1) любой степени (причем число соотношений равно числу неизвестных коэффициентов).

Таким образом, на основании формул (1.2), (1.3) с учетом (2.1) для силовых и моментных напряжений получим:

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{dV_{1,n}}{dx_1} + \nu (n+1) V_{3,n+1} \right] x_3^n, \tag{2.2}$$

$$\sigma_{33} = \frac{E}{1-\nu^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1) V_{3,n+1} + \nu \frac{dV_{1,n}}{dx_1} \right] x_3^n, \tag{2.3}$$

$$\sigma_{13} + \sigma_{31} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sigma_{13,n} + \sigma_{31,n} \right] x_3^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2\mu \left[(n+1) V_{1,n+1} + \frac{dV_{3,n}}{dx_1} \right] x_3^n, \tag{2.4}$$

$$\mu_{12} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} B \left((n+1) \frac{dV_{1,n+1}}{dx_1} - \frac{d^2 V_{3,n}}{dx_1^2} \right) x_3^n, \tag{2.5}$$

$$\mu_{32} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} B \left((n+2)(n+1) V_{1,n+2} - (n+1) \frac{dV_{3,n+1}}{dx_1} \right) x_3^n. \tag{2.6}$$

Используя формулы (2.2)-(2.6) и имея в виду граничные условия (1.4) на лицевых линиях прямоугольника $x_3 = \pm h$, после некоторых преобразований приходим к следующим шести равенствам:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{31,2k} h^{2k} = \frac{p_1^+ - p_1^-}{2}, \tag{2.7}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{31,2k+1} h^{2k+1} = \frac{p_1^+ + p_1^-}{2}, \tag{2.8}$$

$$\frac{E}{1-\nu^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left[(2k+1) V_{3,2k+1} + \nu \frac{dV_{1,2k}}{dx_1} \right] h^{2k} = \frac{p_3^+ - p_3^-}{2}, \tag{2.9}$$

$$\frac{E}{1-\nu^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left[(2k+2) V_{3,2k+2} + \nu \frac{dV_{1,2k+1}}{dx_1} \right] h^{2k+1} = \frac{p_3^+ + p_3^-}{2}, \tag{2.10}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} B \left[(2k+1)(2k+2) V_{1,2k+2} - (2k+1) \frac{dV_{3,2k+1}}{dx_1} \right] h^{2k} = \frac{m_2^+ - m_2^-}{2}, \tag{2.11}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} B \left[(2k+3)(2k+2) V_{1,2k+3} - (2k+2) \frac{dV_{3,2k+2}}{dx_1} \right] h^{2k+1} = \frac{m_2^+ + m_2^-}{2}. \tag{2.12}$$

Подставляя (2.2)-(2.6) в уравнения равновесия (1.1), приходим к следующей системе дифференциальных уравнений относительно коэффициентов разложения (2.1):

$$\frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{d^2V_{1,n}}{dx_1^2}+\nu(n+1)\frac{dV_{3,n+1}}{dx_1}\right]+(n+1)\sigma_{31,n+1}=0, \tag{2.13}$$

$$\frac{E}{1-\nu^2}\left[(n+2)(n+1)V_{3,n+2}+\nu(n+1)\frac{dV_{1,n+1}}{dx_1}\right]+\frac{d\sigma_{13,n}}{dx_1}=0, \tag{2.14}$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}B\left[\frac{d^2V_{1,n+1}}{dx_1^2}(n+1)-\frac{d^3V_{3,n}}{dx_1^3}+V_{1,n+3}(n+1)(n+2)(n+3)-\right.\\ \left.-\frac{dV_{3,n+2}}{dx_1}(n+1)(n+2)\right]+\sigma_{31,n}-\sigma_{13,n}=0.\end{gathered} \tag{2.15}$$

Отметим, что уравнения (2.13)-(2.15) и условия (2.7)-(2.12) распадаются на две части: симметричную относительно x_3 (растяжение-сжатие) и обратно-симметричную (изгибная деформация).

Изгибная деформация микрополярного тонкого прямоугольника (балки) на основании перечисленных выше уравнений и условий в исходном приближении метода степенных рядов описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{gathered}\sigma_{31,2}+\sigma_{31,2}h^2=\frac{p_1^+-p_1^-}{2},\\ \frac{E}{1-\nu^2}\left[2V_{3,2}+\nu\frac{dV_{1,1}}{dx_1}\right]=\frac{p_3^++p_3^-}{2h},\\ \frac{1}{2}B\left[6V_{1,3}-2\frac{dV_{3,2}}{dx_1}\right]=\frac{m_2^++m_2^-}{2h},\\ \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{d^2V_{1,1}}{dx_1^2}+2\nu\frac{dV_{3,2}}{dx_1}\right]+2\sigma_{31,2}=0,\\ \frac{E}{1-\nu^2}\left[2V_{3,2}+\nu\frac{dV_{1,1}}{dx_1}\right]+\frac{d\sigma_{13,0}}{dx_1}=0,\\ \frac{1}{2}B\left[\frac{d^2V_{1,1}}{dx_1^2}-\frac{d^3V_{3,0}}{dx_1^3}+6V_{1,3}-2\frac{dV_{3,2}}{dx_1}\right]+\sigma_{31,0}-\sigma_{13,0}=0.\end{gathered} \tag{2.16}$$

Из уравнений $(2.16)_6$ и (2.4) получим выражения для $\sigma_{13,0}$. Подставляя $\sigma_{13,0}$ и имея в виду $(2.16)_2$, из уравнения $(2.16)_5$ получим

$$\begin{gathered}4\mu h\left(\frac{dV_{1,1}}{dx_1}+\frac{d^2V_{3,0}}{dx_1^2}\right)+Bh\left(\frac{d^3V_{1,1}}{dx_1^3}-\frac{d^4V_{3,0}}{dx_1^4}\right)=\\ =-2\left(p_3^++p_3^-\right)-\frac{d}{dx_1}\left(m_2^++m_2^-\right).\end{gathered} \tag{2.17}$$

Для случая изгиба в исходном приближении имеем

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}\left[2\nu V_{3,2} + \frac{dV_{1,1}}{dx_1}\right]x_3. \tag{2.18}$$

Для силового напряжения σ_{31} сначала примем

$$\overset{0}{\sigma}_{31} = \sigma_{31,0}. \tag{2.19}$$

Подставив выражение σ_{11} из (2.18) в первое уравнение равновесия (1.1), интегрируя по x_3, получим

$$\tilde{\sigma}_{31} = -\frac{x_3^2}{2}\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{d^2V_{1,1}}{dx_1^2} + 2\nu\frac{dV_{3,2}}{dx_1}\right) + \bar{\sigma}_{31}(x_1)\,, \tag{2.20}$$

где $\bar{\sigma}_{31}(x_1)$ – «постоянная интегрирования». Для определения этой величины потребуем, чтобы усредненная по высоте прямоугольника величина $\tilde{\sigma}_{31}$ была равна нулю:

$$\int_{-h}^{h}\tilde{\sigma}_{31}dx_3 = 0. \tag{2.21}$$

Подставив выражение (2.20) в (2.21), получим

$$\bar{\sigma}_{31}(x_1) = \frac{h^2}{6}\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{d^2V_{1,1}}{dx_1^2} + 2\nu\frac{dV_{3,2}}{dx_1}\right). \tag{2.22}$$

Таким образом, подставив (2.22) в (2.20), для $\tilde{\sigma}_{31}$ получим следующее выражение:

$$\tilde{\sigma}_{31} = -\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{x_3^2}{2} - \frac{h^2}{6}\right)\left(\frac{d^2V_{1,1}}{dx_1^2} + 2\nu\frac{dV_{3,2}}{dx_1}\right). \tag{2.23}$$

Итак, для σ_{31}

$$\sigma_{31} = \overset{0}{\sigma}_{31} + \tilde{\sigma}_{31}. \tag{2.24}$$

Подставив (2.19) и (2.23) в (2.24), получим окончательную формулу для σ_{31}:

$$\sigma_{31} = \sigma_{31,0} - \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{x_3^2}{2} - \frac{h^2}{6}\right)\left(\frac{d^2V_{1,1}}{dx_1^2} + 2\nu\frac{dV_{3,2}}{dx_1}\right), \tag{2.25}$$

где $V_{3,2}$ выражается с помощью $V_{1,1}$ $\left(V_{3,2} = \frac{1-\nu^2}{2E}\frac{p_3^+ + p_3^-}{2h} - \frac{\nu}{2}\frac{dV_{1,1}}{dx_1}\right)$.

При помощи формул (2.25) удовлетворяя соответствующему граничному условию из (1.4), получим

$$\begin{gathered}4\mu\left(\frac{dV_{3,0}}{dx_1} + V_{1,1}\right) - B\left(\frac{d^2V_{1,1}}{dx_1^2} - \frac{d^3V_{3,0}}{dx_1^3}\right) - \frac{4h^2}{3}E\frac{d^2V_{1,1}}{dx_1^2} - \\ -\nu\frac{2h}{3}\frac{d}{dx_1}\left(p_3^+ + p_3^-\right) = 2\left(p_1^+ - p_1^-\right) + \frac{1}{h}\left(m_2^+ + m_2^-\right).\end{gathered} \tag{2.26}$$

Объединив (2.17) и (2.26), окончательно приходим к следующей системе дифференциальных уравнений относительно $V_{3,0}$, $V_{1,1}$:

$$4\mu h\left(\frac{dV_{1,1}}{dx_1}+\frac{d^2V_{3,0}}{dx_1^2}\right)+Bh\left(\frac{d^3V_{1,1}}{dx_1^3}-\frac{d^4V_{3,0}}{dx_1^4}\right)=-2\left(p_3^+ + p_3^-\right)-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(m_2^+ + m_2^-\right),$$

$$4\mu\left(\frac{dV_{3,0}}{dx_1}+V_{1,1}\right)-B\left(\frac{d^2V_{1,1}}{dx_1^2}-\frac{d^3V_{3,0}}{dx_1^3}\right)-\frac{4h^2}{3}E\frac{d^2V_{1,1}}{dx_1^2}- \qquad (2.27)$$

$$\underline{-\nu\frac{2h}{3}\frac{d}{dx_1}}\left(p_3^+ + p_3^-\right)=2\left(p_1^+ - p_1^-\right)+\frac{1}{h}\left(m_2^+ + m_2^-\right).$$

Система уравнений (2.27) представляет собой математическую модель статики микрополярных упругих тонких балок со стесненным вращением при изгибной деформации. К системе (2.27) следует присоединить граничные условия на концах балки $(x_1 = 0, x_1 = a)$.

Теперь сравним полученную модель статики микрополярной упругой тонкой балки со стесненным вращением с аналогической моделью [19], построенной на основе метода гипотез и имеющей асимптотическое подтверждение:

уравнения равновесия

$$\frac{dN_{13}}{dx_1}=-2\tilde{p}_3,\quad N_{31}-\frac{dM_{11}}{dx_1}=2h\tilde{p}_1,$$
$$\frac{dL_{12}}{\partial x_1}+N_{31}-N_{13}=-2\tilde{m}_2; \qquad (2.28)$$

соотношения упругости

$$N_{13}+N_{31}=4h\mu\Gamma_{13},$$
$$M_{11}=\frac{2Eh^3}{3}K_{11},\quad L_{12}=2Bhk_{12}; \qquad (2.29)$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{13}=\frac{dw}{dx_1}+\psi_1,$$
$$K_{11}=\frac{d\psi_1}{dx_1},\quad k_{12}=\frac{d\Omega_2}{dx_1},\quad \Omega_2(x_1)=\frac{1}{2}\left(\psi_1-\frac{dw}{dx_1}\right). \qquad (2.30)$$

Если (2.30) подставить в соотношения упругости (2.29) и последние в уравнения равновесия (2.28), получим основные уравнения в перемещениях модели микрополярных упругих балок работы [19]. Сравнивая уравнения этой системы с полученными уравнениями (2.27) на основе метода степенных рядов $(V_{3,0}=w,\ V_{1,1}=\psi_1)$, легко убедиться, что разница только в подчеркнутом члене в (2.27). Но эта величина – результат того, что в физическом уравнении для γ_{11} было удержано силовое напряжение σ_{33}, которым, как известно, в теории тонких балок принято пренебрегать.

Таким образом, модель микрополярных упругих тонких балок, построенная в работе [19] на основе метода гипотез и являющаяся асимптотически точной, обосновывается также методом степенного разложения.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 15T-2C138.

Ширакский государственный университет им. М. Налбандяна
e-mail: knarikzhamakochan@mail.ru

К. А. Жамакочян

Применение метода степенных рядов для построения математической модели микрополярных упругих тонких балок со стесненным вращением

Рассматриваются уравнения статики обобщенного плоского напряженного состояния микрополярной теории упругости со стесненным вращением в тонком прямоугольнике. Принимая метод разложений по толщине прямоугольника в степенные ряды, на основе исходного приближения построена прикладная-одномерная модель статического изгиба микрополярных упругих тонких балок со стесненным вращением. Показано, что построенная модель полностью совпадает с аналогичной моделью микрополярных балок, построенной на основе асимптотически обоснованного метода гипотез.

Ք. Ա. Ժամակոչյան

Աստիճանային շարքերի մեթոդի կիրառումը միկրոպոլյար առաձգական բարակ հեծանների կաշկանդված պտույտներով մաթեմատիկական մոդելի կառուցման համար

Դիտարկվում են կաշկանդված պտույտներով միկրոպոլյար առաձգականության տեսության ընդհանրացված հարթ լարվածային վիճակի ստատիկայի հավասարումները բարակ ուղղանկյուն տիրույթում: Կիրառելով ըստ ուղղանկյան հաստության աստիճանային շարքերի վերլուծման մեթոդը՝ կառուցվում է կաշկանդված պտույտներով միկրոպոլյար առաձգական բարակ հեծանների ծռման դեֆորմացիայի ստատիկայի կիրառական-միաչափ մաթեմատիկական մոդելը: Ցույց է տրվում, որ կառուցված մոդելը լիովին համընկնում է միկրոպոլյար հեծանների անալոգ մոդելի հետ, որը կառուցված է ասիմպտոտիկ հիմնավորմամբ վարկածների մեթոդի հիման վրա:

K. A. Zhamakochyan

Application of the Method of Power Series for the Construction of a Mathematical Model of Micropolar Elastic Thin Bars with Constrained Rotation

Static equations of generalized plane stress state of the micropolar theory of elasticity with constrained rotation are considered in thin rectangle. Using the method of expansion to power series along the thickness of rectangle and based on the initial approximation, the applied one-dimensional model of a static bending with constrained

rotation of micropolar elastic thin bars is constructed. It is shown that the constructed model coincides with the analogical model of micropolar bars, constructed on the basis of the asymptotically justified hypotheses method.

Литература

1. *Голденвейзер А. Л.* – Прикладная математика и механика. 1968. Т. 32. Вып. 4. С. 684-695.
2. *Ворович И. И.* В сб.: Материалы I Всесоюзн. школы по теории и численным методам расчета оболочек и пластин. Тбилиси: Изд-во Тбилисск. ун-та, 1975. С. 51-149.
3. *Агаловян Л. А.* Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М. Наука. 1997. 414 с.
4. *Aghalovyan L. A.* Asymptotic theory of anisotropic plates and shells. World Scientific. 2015. 360 p.
5. *Тимошенко С. П., Гере Дж.* Механика материалов. СПб.-М. Лань. 2002. 672 с.
6. *Timoshenko S.* – Phil. Mag. 1921. Ser. 6. V. 41. № 245. P. 744-746.
7. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле. М. Наука. 1967. 444 с.
8. *Григолюк Э. И., Селезов И. Т.* – Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Серия «Механика твердых деформируемых тел». 1973. Т.5. 272 с.
9. *Саркисян С. О.* – Общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек. Ереван. Изд-во АН Армении. 1992. 260 с.
10. *Саркисян С. О.* – Физическая мезомеханика. 2008. Т. 11. № 5. С. 41-54.
11. *Саркисян С. О.* – Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72. Вып. 1. С. 129-147.
12. *Саркисян С. О.* – Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76. Вып. 2. С. 325-343.
13. *Sargsyan S. H.* – Advances in Pure Mathematics. August 2015. V. 5. № 10. P. 629-642.
14. *Sargsyan S. H.* – J. of Materials Science and Engineering. 2012. V. 2. № 1. P. 98-108.
15. *Саркисян С. О.* – Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т. 53. Вып. 2. С. 148-156.
16. *Саркисян С. О.* – Физическая мезомеханика. 2011. Т. 14. № 1. С. 55-66.
17. *Саркисян С. О.* – Доклады Российской академии наук. 2011. Т. 436. № 2. С. 195-198.
18. *Саркисян С. О.* В кн.: Упругость и неупругость. Материалы Междунар. науч. симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 100-летию со дня рождения А. А. Ильюшина. Москва, 20-21 января 2011 г. Изд-во Московского ун-та. 2011. С. 231-235.
19. *Саркисян С. О.* – Доклады НАН Армении. 2011. Т.111. № 2. С.121-128.
20. *Морозов Н. Ф.* Математические вопросы теории трещин. М. Наука. 1984. 256 с.
21. *Савин Г. Н.* Основы плоской моментной теории упругости. Киев. Изд-во Киевск. ун-та. 1965. 162 с.
22. *Nowacki W.* Theory of Asymmetric Elasticity. Pergamon Press. Oxford. New York. Toronto. Sydney. Paris. Frankfurt. 1986. P. 383.