ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 118 2018 № 1

МЕХАНИКА

УДК 539.3

М. С. Григорян, член-корреспондент НАН РА С. М. Мхитарян

О контактном взаимодействии двух одинаковых стрингеров с упругой полубесконечной пластиной

(Представлено 3/XI 2017)

Ключевые слова: *стрингер, упругая полубесконечная пластина, контактная задача, условие хрупкого разрушения.*

1. **Введение.** Контактные задачи о взаимодействии тонкостенных элементов в виде стрингеров с массивными деформируемыми упругими телами составляют довольно обширную область математической теории упругости. Первые исследования в этой области восходят к известной работе [1], где рассмотрены две фундаментальные задачи. В дальнейшем эти задачи были обобщены и развиты в различных направлениях [2-7]. Многие результаты исследования указанного круга контактных задач изложены в [8], а довольно обстоятельный обзор первых работ и результатов этой области приведен в [9].

В настоящей статье с точки зрения возможного образования вертикальной краевой трещины в упругой полубесконечной пластине, когда система пластина – стрингеры подвержена воздействию растягивающих в горизонтальном направлении сил, рассматривается контактная задача о взаимодействии двух одинаковых симметрично расположенных стрингеров с такой пластиной. На основании решения этих задач в указанном случае симметрического нагружения системы пластина – стрингеры при помощи комплексных потенциалов Колосова – Мусхелишвили для упругой полуплоскости [10] определяются разрушающие нормальные напряжения на оси симметрии пластины, т.е. на ее вертикальной оси. Далее в этих напряжениях, достигающих своего максимума на границе пластины, записывается условие ее хрупкого разрушения. Показывается, что при достаточно близких расстояниях между ближними концами стрингеров условие хрупкого разрушения упругой полубесконечной пластины заведомо выполняется. В результате пластина растрескивается и образуется вертикальная краевая трещина. Это обстоятельство приводит к необходимости исследования в дальнейшем задач о напряженно-деформированном состоянии упругой полубесконечной пластины, усиленной на своей границе двумя одинаковыми симметрично расположенными стрингерами и ослабленной коллинеарной системой вертикальных трещин, в том числе и при наличии краевой трещины.

2. **О контактном взаимодействии двух одинаковых абсолютно жестких стрингеров с упругой полубесконечной пластиной.** Пусть отнесенная к прямоугольной системе координат Oxy упругая полубесконечная пластина, занимающая нижнюю полуплоскость $y \le 0$, обладает модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν. Пусть далее пластина на своей границе $y=0$ по двум отрезкам $[-a,-b]$ и $[b,a]$ одинаковых длин, расположенных симметрично относительно начала координат, усилена двумя абсолютно жесткими на растяжение-сжатие и абсолютно гибкими на изгиб стрингерами. В центрах концевых сечений $x=\pm a$ стрингеров действуют горизонтальные сосредоточенные растягивающие силы P. Сечения стрингеров $x=\pm b$ свободны от внешних сил. Предполагается, что стрингеры не сопротивляются изгибу, т.е. в вертикальном направлении они обладают абсолютной гибкостью. Тогда на контактных участках $L=\{y=0;\ b<|x|<a\}$ нормальными контатными напряжениями по отношению касательных контактных напряжений можно пренебречь, т.е. будем иметь

$$\sigma_y\big|_{y=-0}=0;\ \ \tau_{xy}\big|_{y=-0}=\tau(x)\ \ \left(x\in L;\ \tau(-x)=-\tau(x)\right).$$

Здесь σ_y и τ_{xy} – соответственно, компоненты нормальных и касательных напряжений.

При указанном симметрическом нагружении стрингеров и в предположении, что пластина находится в обобщенном плоском напряженном состоянии, требуется определить касательные контактные напряжения $\tau(x)$, отнесенные к единице ширины пластины.

Воспользовавшись комплексными потенциалами для упругой полуплоскости [10], когда на ее границе действуют только горизонтальные силы, решение описанной контактной задачи сведем к решению следующего интегрального уравнения (ИУ) Фредгольма первого рода:

$$\frac{2}{\pi E}\left(\int_{-a}^{-b}+\int_{b}^{a}\right)\ln\frac{1}{|x-s|}\tau(s)\,ds=\delta\, signx\quad \left(x\in(-a,-b)\cup(b,a)\right). \tag{1}$$

Здесь δ – величина жесткого горизонтального перемещения стрингеров.

Приняв во внимание нечетность функции $\tau(x)$, ИУ (1) можем преобразовать к виду

$$\frac{2}{\pi E}\int_{b}^{a}\ln\frac{x+s}{|x-s|}\tau(s)\,ds=\delta\quad (b<x<a). \tag{2}$$

Решение ИУ (2) должно удовлетворять условию равновесия правого стрингера

$$\int_b^a \tau(x)\,dx = P. \tag{3}$$

Теперь исходя из интегрального соотношения [11]

$$\int_b^a \ln\frac{x+s}{|x-s|}\frac{ds}{\sqrt{(a^2-s^2)(s^2-b^2)}} = \frac{\pi K}{a} \qquad (b<x<a),$$

получим следующее решение ИУ (2):

$$\tau(x) = (a\delta E/(2K))\Big/\left(\sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}\right) \qquad (b<x<a), \tag{4}$$

где $K=K(k)$ $(k=b/a)$ – полный эллиптический интеграл первого рода модуля k. Далее (4) подставим в (3) и для вычисления полученного интеграла по формуле $x=\sqrt{a^2-(a^2-b^2)t^2}$ $(0<t<1)$ от переменной x перейдем к переменной t. В результате установим зависимость между жестким смещением стрингеров δ и растягивающих их сил P:

$$\delta = (2P/E)(K/K') \qquad \left(K'=K(k');\ k'=\sqrt{1-k^2}\right). \tag{5}$$

Представляя выражение δ из (5) в (4), придем к формуле

$$\tau(x) = aP\Big/K'\sqrt{(a^2-x^2)(b^2-x^2)} \qquad (b<x<a). \tag{6}$$

Эта формула в форме

$$\tau(x) = aPsignx\Big/K'\sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)} \qquad (b<|x|<a) \tag{7}$$

ранее была получена в [12].

Исходя из (6) или (7) определим компоненты напряжений на верти— кальной оси упругой полуплоскости, т.е. на отрицательной полуоси Oy. С этой целью воспользуемся комплексными потенциалами Колосова —Мусхелишвили для нижней упругой полуплоскости в полярной системе координат r,ϑ. Тогда нижняя полуплоскость $y\le 0$ описывается следующим образом:

$$\Pi_- = \{0\le r<\infty;\ -\pi\le\vartheta\le 0\} \qquad (x=r\cos\vartheta,\ y=r\sin\vartheta).$$

Нужные нам формулы имеют вид [10] (с. 133)

$$\sigma_r+\sigma_\vartheta = 2\left[\Phi(z)+\overline{\Phi(z)}\right];\quad \sigma_r - i\tau_{r\vartheta} = \Phi(z)+\overline{\Phi(z)} - e^{2i\vartheta}\left[\overline{z}\Phi'(z)+\Psi(z)\right]; \tag{8}$$

где $\sigma_r,\sigma_\vartheta$ – в полярной системе координат компоненты нормальных напряжений в радиальном и в окружном направлении, соответственно, а $\tau_{r\vartheta}$ – компонента касательных напряжений. Здесь $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ – комплексные потенциалы, аналитические в нижней полуплоскости $\operatorname{Im} z<0$ функции. Из первого уравнения (8) определим σ_r и его выражение подставим во второе уравнение (8). В результате придем к формуле

$$\sigma_\vartheta + i\tau_{r\vartheta} = \Phi(z)+\overline{\Phi(z)} + e^{2i\vartheta}\left[\overline{z}\Phi'(z)+\Psi(z)\right]. \tag{9}$$

Но для нижней упругой полуплоскости ([10], с. 405, ф-ла (11) и с. 408, ф-ла (2))

$$\Psi(z) = -\Phi(z) - \overline{\Phi}(z) - z\Phi'(z) \quad \left(\overline{\Phi}(z)=\overline{\Phi(\overline{z})}\right);\quad \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(t)+iT(t)}{t-z}dt, \tag{10}$$

где $P(t)$ и $T(t)$ – интенсивности, соответственно, нормальных и касательных сил, приложенных на границе полуплоскости. В данном случае имеем

$$P(t)\equiv 0 \quad (-\infty<t<\infty); \quad T(t)=\begin{cases}\tau(t) & (t\in L);\\ 0 & (t\in(-\infty,\infty)\setminus L);\end{cases} \quad \Phi(z)=\frac{1}{\pi}\int_b^a\frac{t\tau(t)\,dt}{t^2-z^2}. \quad (11)$$

Выражение функции $\Psi(z)$ из (10) подставим в (9), в результате чего будем иметь

$$\sigma_\vartheta+i\tau_{r\vartheta}=\Phi(z)+\overline{\Phi(z)}+e^{2i\vartheta}\left[(\bar{z}-z)\Phi'(z)-\Phi(z)-\overline{\Phi}(z)\right].$$

Далее полагая в этой формуле $\vartheta=-\pi/2$ $(z=iy,\ y<0)$, при помощи (11) получим

$$\sigma_\vartheta\big|_{\vartheta=-\pi/2}=\frac{4}{\pi}\int_b^a\frac{t^3\tau(t)\,dt}{t^2+y^2}; \quad \tau_{r\vartheta}\big|_{\vartheta=-\pi/2}=0 \quad (0\le y<\infty). \quad (12)$$

При этом

$$\sigma_r\big|_{\vartheta=-\pi/2}=\left\{2\left[\Phi(z)+\overline{\Phi(z)}\right]-\sigma_\vartheta\right\}\Big|_{\vartheta=-\pi/2}=\frac{4y^2}{\pi}\int_b^a\frac{t\tau(t)\,dt}{\left(t^2+y^2\right)^2} \quad (0\le y<\infty). \quad (13)$$

Отметим, что по первой формуле (8) $\sigma_r+\sigma_\vartheta$ представляет собой двукратную вещественную часть аналитической в нижней полуплоскости функции $\Phi(z)$. Следовательно, $\sigma_r+\sigma_\vartheta$ гармоническая в этой полуплоскости функция и поэтому своего максимума достигает на границе полуплоскости. Но при $y=0$ по (13) $\sigma_r\big|_{\vartheta=-\pi/2}=0$, откуда следует

$$\max(\sigma_r+\sigma_\vartheta)=\max\sigma_\vartheta=\sigma_\vartheta\big|_{\substack{x=0;\\ y=0}}=\frac{4}{\pi}\int_b^a\frac{\tau(t)\,dt}{t}, \quad (14)$$

где принята во внимание первая формула (12). С другой стороны, по принципу симметрии возможное хрупкое разрушение упругого тела происходит по траектории максимальных нормальных напряжений, когда последние превосходят предел хрупкого разрушения для данного материала. Следовательно, в данном случае согласно (14) хрупкое разрушение упругой полубесконечной пластины происходит по ее вертикальной оси при условии

$$\frac{4}{\pi}\int_b^a\frac{\tau(t)\,dt}{t}\ge\sigma_b, \quad (15)$$

где σ_b – предел хрупкого разрушения материала пластины. В процессе разрушения в пластине образуется вертикальная краевая трещина.

Далее выражение касательных контактных напряжений из (6) подставим в (15):

$$\frac{4aP}{\pi K'}\int_b^a\frac{dt}{t\sqrt{\left(a^2-t^2\right)\left(t^2-b^2\right)}}\ge\sigma_b$$

и для вычисления этого интеграла от переменной t перейдем к переменной s, полагая $t=1/\sqrt{s}$. После простых преобразований условие (15) примет вид

$$kK(k')\le 2\sigma; \quad \sigma=P/a\sigma_b. \quad (16)$$

Для достаточно малых k соотношение (16) заведомо выполняется. В самом деле, воспользуемся известным представлением ([13], с. 919, ф-ла 8.113.3), в котором заменив k на k', будем иметь

$$\begin{gathered} K' = K(k') = \ln(4/k) + (1/2)^2 \left(\ln(4/k) - 2/1\cdot 2\right)k^2 + \ldots \;\Rightarrow \\ \Rightarrow \quad K' \sim \ln(4/k) \quad (k \to +0). \end{gathered} \tag{17}$$

На основании последнего

$$\lim_{k\to+0} k\,K(k') = \lim_{k\to+0}\left(k\ln(4/k)\right) = \lim_{k\to+0}\left((\ln 4 - \ln k)/(1/k)\right) = 0,$$

что и доказывает высказанное утверждение.

Отметим, что на основании (17) условие (16) можно представить в виде

$$k\ln(4/k) \le \sigma_b \quad (k \to +0).$$

В табл. 1 приведены значения функций $f(k) = k\,K(k')$; $\quad g(k) = k\ln(4/k)$.

Таблица 1

Значения функций $f(k)$ и $g(k)$

k	10^{-10}	10^{-8}	10^{-7}	10^{-6}	0. 0001	0.001	0.01	0.1	0.2	0.3	0.5
$f(k)$	2.44 x 10^{-9}	1.98x 10^{-7}	1.75 x 10^{-6}	0. 000016	0. 00109	0. 00864	0. 06338	0. 4038	0. 669832	0. 8844	1. 22067
$g(k)$	2.44 x 10^{-9}	1.98 x 10^{-7}	1.75 x 10^{-6}	0. 000015	0. 00106	0. 00829	0. 05991	0.368 89	0. 59915	0. 77708	1. 03972

При малых k они с большой точностью совпадают. Условие хрупкого разрушения пластины (16) можно выразить также через жесткие перемещения стрингеров δ. А именно, из (5) $P = EK'\delta/2K$, и подставляя это выражение P в (16), придем к условию

$$k\,K(k) \le \delta_0\sigma_0 \quad (\delta_0 = \delta/a;\; \sigma_0 = E/\sigma_b). \tag{18}$$

Так как $\lim\limits_{k\to+0} k\,K(k) = 0$, то для данного δ_0 и σ_0 условие (18) для достаточно малых k выполняется.

3. Контактная задача о взаимодействии двух одинаковых симметрично расположенных упругих стрингеров с упругой полубесконечной пластиной. Пусть описанная в предыдущем пункте упругая полубесконечная пластина, опять отнесенная к прямоугольной системе координат Oxy, на сей раз по совокупности отрезков своей границы L усилена двумя одинаковыми упругими стрингерами, симметрично расположенными относительно начала координат. Считается, что стрингеры обладают модулем упругости E_s, площадью поперечного сечения A_s, причем $A_s = hd_1$, где h − их высота, а d_1 − их ширина, в центрах их поперечных сечений $x = \pm a$ опять, как выше, действуют горизонтальные сосредоточенные растягивающие силы величины P. Сечения стрингеров $x = \pm b$ свободны от внешних сил, а по срединным линиям их верхних граней действуют горизонтальные растягивающие силы интенсивности $\tau_+(x)$ $\left(\tau_+(-x) = -\tau_+(x)\right)$. Кроме того пластина на бесконечности в горизонтальном направлении подвержена растяжению равномерно распределенными силами интенсивности P_0. Предполагается, что пластина находится в обобщенном плоском напряженном состоянии, а стрингеры, как обычно [1, 3], находятся в одноосном напряженном состоянии.

При этих предположениях требуется определить касательные контактные напряжения под стрингерами $\tau_-(x)$ и осевые напряжения в сечениях стрингеров $\sigma_s(x)$.

Приступим к выводу определяющих уравнений поставленной задачи, придерживаясь обозначений [8]. Рассматривая равновесие части $[b, x]$ правого стрингера, находим

$$\sigma_s(x) = \frac{1}{A_s}\left[d\int_b^x \tau_-(s)\,ds - \int_b^x \tau_+(s)\,ds\right] \qquad (b \le x \le a). \tag{19}$$

Здесь $d = \min(d_1, d_2)$ – эффективная ширина контактного участка [8], где d_2 – ширина пластины. Отсюда по закону Гука для осевой деформации получим

$$\varepsilon_s(x) = \frac{1}{A_s E_s}\left[d\int_b^x \tau_-(s)\,ds - \int_b^x \tau_+(s)\,ds\right] \qquad (b \le x \le a), \tag{20}$$

а полагая в (19) $x = a$, придем к условию равновесия правого стрингера:

$$d\int_b^a \tau_-(s)\,ds = Q; \qquad Q = P + \int_b^a \tau_+(s)\,ds. \tag{21}$$

Теперь отметим, что в интегралах (19) и (20) их пределы (b, x) можем заменить пределами (x, a), изменив при этом знаки интегралов на противоположные. В результате будем иметь

$$\sigma_s(x) = \frac{1}{2A_s}\left[d\int_b^a sign(x-s)\tau_-(s)\,ds - \int_b^a sign(x-s)\tau_+(s)\,ds\right] \quad (b \le x \le a); \tag{22}$$

$$\varepsilon_s(x) = \frac{1}{2A_s E_s}\left[d\int_b^a sign(x-s)\tau_-(s)\,ds - \int_b^a sign(x-s)\tau_+(s)\,ds\right]. \tag{23}$$

Далее запишем выражение производных горизонтальных перемещений граничных точек упругой полубесконечной пластины [8]:

$$\frac{du(x,0)}{dx} = \frac{2}{\pi E}\frac{d}{d_2}\int_b^a \frac{2s\tau_-(s)\,ds}{s^2 - x^2} + \frac{P_0}{E} \qquad (b < x < a). \tag{24}$$

Подставляя (24) и (23) в условие контакта стрингеров и пластины

$$du(x,0)/dx = \varepsilon_s(x) \qquad (b < x < a),$$

придем к следующему определяющему сингулярному интегральному уравнению (СИУ) рассматриваемой задачи:

$$\int_b^a \left[\frac{4d}{\pi E d_2}\frac{s}{s^2 - x^2} + \frac{d}{2E_s A_s} sign(s-x)\right]\tau_-(s)\,ds = \frac{1}{2E_s A_s}\int_b^a sign(s-x)\tau_+(s)\,ds -$$

$$-\frac{P_0}{E} \qquad (b < x < a), \tag{25}$$

откуда определяются неизвестные контактные касательные напряжения $\tau_-(x)$.

Решение СИУ (25) должно удовлетворять условию (21).

После решения СИУ (25) осевые напряжения будут определяться по формуле (22).

Отметим, что решение рассматриваемой здесь контактной задачи в несколько другой постановке в [8] сведено к решению интегродифференциального уравнения Прандтля.

Далее в СИУ (25) и условие (21) введем безразмерные величины, полагая

$$\xi = x/a,\ \eta = s/a;\ \tau(\xi) = d \cdot \tau_-(a\xi)/d_2 E;\ \tau_0(\xi) = \tau_+(a\xi)/d_2 E;$$
$$p_0 = P_0/E;\ \lambda = ad_2 E/2A_s E_s;\ k = b/a.$$

В результате СИУ (25) преобразуется к виду

$$\begin{gathered}\frac{2}{\pi}\int_k^1\left[\frac{2\eta}{\eta^2-\xi^2}+\frac{\pi\lambda}{2}sign(\eta-\xi)\right]\tau(\eta)\,d\eta = f_0(\xi) \qquad (k<\xi<1)\\ f_0(\xi) = -p_0 + \lambda\int_k^1 sign(\eta-\xi)\,\tau_0(\eta)\,d\eta;\end{gathered} \tag{26}$$

а условие (21) – к виду

$$\int_k^1 \tau(\eta)\,d\eta = Q_0; \qquad Q_0 = Q/ad_2 E. \tag{27}$$

При этом согласно (22) для безразмерных осевых напряжений $\sigma(\xi)$ будем иметь

$$\sigma(\xi) = \sigma_s(a\xi)/E_s = \lambda\left[\int_k^1 sign(\xi-\eta)\,\tau(\eta)\,d\eta - \int_k^1 sign(\xi-\eta)\,\tau_0(\eta)\,d\eta\right] \ (k \le \xi \le 1). \tag{28}$$

Наконец, в СИУ (26)-(27) от интервала $(k,1)$ перейдем к интервалу $(-1,1)$, полагая [8]

$$\xi = \sqrt{ct+d};\quad \eta = \sqrt{cu+d} \quad (-1<t,u<1);\quad c = (1-k^2)/2;\quad d = (1+k^2)/2.$$

После простых преобразований СИУ (26) перейдет в следующее СИУ:

$$\begin{gathered}\frac{2}{\pi}\int_{-1}^1\left[\frac{1}{u-t}+\frac{\pi\lambda c}{4\sqrt{cu+d}}sign(u-t)\right]\chi(u)\,du = f_0(t) \qquad (-1<t<1);\\ \chi(u) = \tau\left(\sqrt{cu+d}\right); \qquad f_0(t) = f\left(\sqrt{ct+d}\right);\end{gathered} \tag{29}$$

а условие (27) – в следующее условие:

$$\int_{-1}^1 \frac{\chi(u)\,du}{\sqrt{cu+d}} = Q_0/c. \tag{30}$$

При этом формула (28) преобразуется к виду

$$\begin{gathered}\sum(t) = \lambda c\left[\int_{-1}^1 sign(t-u)\frac{\chi(u)\,du}{\sqrt{cu+d}} - \int_{-1}^1 sign(t-u)\frac{\omega_0(u)\,du}{\sqrt{cu+d}}\right] \qquad (-1\le t\le 1);\\ \sum(t) = \sigma\left(\sqrt{ct+d}\right);\ \omega_0(u) = \tau_0\left(\sqrt{cu+d}\right).\end{gathered} \tag{31}$$

4. Решения СИУ (29)-(30). Решение эквивалентного этому СИУ интегродифференциального уравнения Прандтля в [8] методом многочленов Чебышева сведено к решению регулярной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Но весьма эффективное решение СИУ (29)-(30) можно построить также известным численно-аналитическим методом решения СИУ [14-16]. Следуя изложенной в этих работах процедуре, положим

$$\chi(u) = \mathrm{X}(u) \Big/ \sqrt{1-u^2} \qquad (-1 < u < 1), \tag{32}$$

где функция $\mathrm{X}(u)$ – гельдеровская функция на отрезке $[-1,1]$. В результате решение СИУ (29)-(30) сведется к следуюшей конечной СЛАУ:

$$\sum_{n=1}^{M} K_{mn} \mathrm{X}_n = c_m \quad \left(m = \overline{1,M}\right) \tag{33}$$

$$K_{mn} = \begin{cases} \dfrac{2}{M}\left[\dfrac{1}{u_n - t_m} + \dfrac{\pi\lambda c}{4\sqrt{cu_n + d}}\, sign\left(u_n - t_m\right)\right] & \left(n = \overline{1,M};\ m = \overline{1,M-1}\right); \\ \dfrac{\pi}{M}\dfrac{1}{\sqrt{cu_n + d}} \quad \left(n = \overline{1,M};\ m = M\right); & \mathrm{X}_n = \mathrm{X}\left(u_n\right); \end{cases}$$

$$c_m = \begin{cases} f_0\left(t_m\right) & \left(m = \overline{1,M-1}\right); \\ Q_0/c & \left(m = M\right); \end{cases} \qquad u_n = \cos\left[\frac{\pi\left(2n-1\right)}{2M}\right] \quad \left(n = \overline{1,M}\right);$$

$$t_m = \cos\left(\frac{\pi m}{M}\right) \quad \left(m = \overline{1,M-1}\right).$$

Здесь M – любое натуральное число, а u_n и t_m – чебышевские узлы, т.е. корни многочленов Чебышева первого рода $T_M(u)$ и второго рода $U_{M-1}(t)$ соответственно.

Теперь приведенные безразмерные контактные касательные напряжения согласно (32) будут выражаться через решение СЛАУ (33) формулой

$$\chi\left(u_n\right) = \mathrm{X}_n \Big/ \sqrt{1-u_n{}^2} \qquad \left(n = \overline{1,M}\right).$$

Аналогичной формулой будут выражаться безразмерные осевые напряжения (31).

Но более эффективное решение СИУ (29)-(30), как в [17], можно получить при помощи метода интерполяционного многочлена Лагранжа [18], полагая в (32)

$$\mathrm{X}(u) = P_{M-1}(u) = \frac{2}{M}\sum_{n=1}^{M} \mathrm{X}\left(u_n\right)\left[\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{M-1} T_j(u) T_j\left(u_n\right)\right] \quad (-1 \le u \le 1), \tag{34}$$

где $P_{M-1}(u)$ – названный многочлен по чебышевским узлам для функции $\mathrm{X}(u)$. Подставляя (32), где $\mathrm{X}(u)$ дается формулой (34), в СИУ (29), после элементарных преобразований и вычислений придем к следующей конечной СЛАУ:

$$V_m + \frac{\lambda c}{2\pi}\sum_{nj=1}^{M-1} L_{mj} V_j = b_m \quad \left(m = \overline{1,M-1}\right) \tag{35}$$

$$R_{mj}=\int_{-1}^{1}\frac{I_m(u)T_j(u)\,du}{\sqrt{cu+d}\sqrt{1-u^2}}\quad\left(m=\overline{1,M-1}\right);$$
$$f_m=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,f_0(t)U_{m-1}(t)\,dt;\qquad d_m=\int_{-1}^{1}\frac{I_m(u)\,du}{\sqrt{cu+d}\sqrt{1-u^2}};$$
$$b_m=\frac{M}{2\pi}f_m-\frac{\lambda c}{4\pi}W_M d_m\quad\left(d_m=R_{m0}\right);\quad W_m=\sum_{n=1}^{M}\mathrm{X}_n;\qquad V_m=\sum_{n=1}^{M}\mathrm{X}_nT_m(u_n);$$
$$I_m(u)=\int_{-1}^{1}sign(u-t)\sqrt{1-t^2}U_{m-1}(t)\,dt=\begin{cases}\sqrt{1-u^2}\left[\dfrac{U_m(u)}{m+1}-\dfrac{U_{m-2}(u)}{m-1}\right] & (m\neq1);\\ \pi/2-\arccos u+(1/2)\sqrt{1-u^2}U_1(u) & (m=1).\end{cases}$$

Решение (35) при правой части f_m обозначим через $V_m^{(1)}$, а при правой части d_m – через $V_m^{(2)}$. Тогда

$$V_m=(M/2\pi)V_m^{(1)}-(\lambda c/4\pi)W_MV_m^{(2)}\quad\left(m=\overline{1,M-1}\right).\tag{36}$$

Исходя из (35)-(36) и принимая во внимание условие (30), относительно неизвестных X_n придем к следующей конечной СЛАУ:

$$\sum_{n=1}^{M}R_{mn}\mathrm{X}_n=e_m\quad\left(m=\overline{1,M}\right)\tag{37}$$
$$R_{mn}=\begin{cases}T_m(u_n)+(\lambda c/4\pi)V_m^{(2)} & \left(n=\overline{1,M},\ m=\overline{1,M-1}\right);\\ A_0/M+(2/M)\displaystyle\sum_{m=1}^{M-1}A_mT_m(u_n) & \left(n=\overline{1,M},\ m=M\right);\end{cases}$$
$$A_m=\int_{-1}^{1}\frac{T_m(u)\,du}{\sqrt{cu+d}\sqrt{1-u^2}}\quad\left(m=\overline{0,M-1}\right);\qquad e_m=\begin{cases}(M/2\pi)V_m^{(1)} & \left(m=\overline{1,M-1}\right);\\ Q_0/c & (m=M).\end{cases}$$

Далее в рассматриваемом случае упругих стрингеров запишем условие хрупкого разрушения упругой полубесконечной пластины. В этом случае оно имеет вид

$$\frac{2Ec}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{X}(u)\,du}{(cu+d)\sqrt{1-u^2}}\geq\sigma_b\tag{38}$$

и при $k\to+0$ заведомо выполняется. Условие (38) через решение СЛАУ (33) и (37) выразится, соответсвенно, формулами

$$\frac{2c}{M}\sum_{n=1}^{M}\frac{\mathrm{X}_n}{cu_n+d}\geq\frac{\sigma_b}{E},$$
$$\frac{2c}{\pi M}\sum_{n=1}^{M}G_n\mathrm{X}_n\geq\frac{\sigma_b}{E},\quad G_n=B_0+2\sum_{m=1}^{M}B_mT_m(u_n);\quad B_m=\int_{-1}^{1}\frac{T_m(u)\,du}{(cu+d)\sqrt{1-u^2}}.$$

Интегралы A_m и B_m легко могут быть вычислены по квадратурным формулам Гаусса.

Институт механики НАН РА
e-mail: smkhitaryan39@rambler.ru

М. С. Григорян, член-корреспондент НАН РА С. М. Мхитарян

О контактном взаимодействии двух одинаковых стрингеров с упругой полубесконечной пластиной

С точки зрения возможного формирования вертикальной краевой трещины в упругой полубесконечной пластине, когда система пластина – стрингеры подвержена воздействию растягивающих в горизонтальном направлении сил, рассматривается контактная задача о взаимодействии двух одинаковых стрингеров с такой пластиной. При этом стрингеры считаются абсолютно жесткими или обычными одномерными упругими континуумами. На основании решения этих задач при помощи комплексных потенциалов Колосова – Мусхелишвили для упругой полуплоскости определяются разрушающие нормальные напряжения на оси симметрии пластины. Далее в этих напряжениях, достигающих своего максимума на границе пластины, записывается условие ее хрупкого разрушения. Показaнo, что при достаточно близких расстояниях между ближними концами стрингеров условие хрупкого разрушения упругой полубесконечной пластины заведомо выполняется.

Մ. Ս. Գրիգորյան, ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ս. Մ. Մխիթարյան

Երկու միատեսակ ստրինգերների հետ առաձգական կիսաանվերջ սալի կոնտակտային փոխազդեցության մասին

Կիսաանվերջ առաձգական սալում ուղղաձիգ եզրային ճաքի հնարավոր առաջացման տեսանկյունից, երբ սալ-ստրինգերներ համակարգը ենթարկված է հորիզոնական ուղղությամբ ձգող ուժերի ներգործությանը, հոդվածում դիտարկվում է երկու միատեսակ ստրինգերների հետ այդպիսի սալի փոխազդեցության մասին կոնտակտային խնդիրը: Ընդ որում ստրինգերները համարվում են բացարձակ կոշտ կամ սովորական միաչափ առաձգական հոծ մարմիններ: Այդ խնդիրների լուծման հիման վրա առաձգական կիսահարթության համար Կոլոսով-Մուսխելիշվիլու կոմպլեքս պոտենցիալների օգնությամբ որոշվում են սալի համաչափության առանցքի վրա գործող քայքայող նորմալ լարումները: Այնուհետև այդ լարումներով, որոնք սալի եզրագծի վրա հասնում են իրենց մաքսիմումին, գրվում է սալի փխրուն քայքայման պայմանը: Ցույց է տրվում, որ ստրինգերների մոտակա ծայրերի բավականաչափ փոքր հեռավորությունների դեպքում առաձգական կիսաանվերջ սալի փխրուն քայքայման պայմանը իրոք տեղի ունի:

M. S. Grigoryan,
corresponding member of NAS RA S. M. Mkhitaryan

On Contact Interaction of an Elastic Semi-Infinite Plate with Two Similar Stringers

In a semi-infinite elastic plate, from the point of view of the vertical boundary crack possible formation, when the plate stringer system is subjected to the horizontally stretching forces influence, the contact problem on the interaction of such plate with two similar stringers is considered. The stringers are considered to be absolutely rigid or ordinary one-dimensional elastic solid bodies. On the base of these

problems' solution with the help of Kolosov-Muskhelishvili complex potentials for an elastic half-plane, fracturing normal stresses, acting on the axis of the plate symmetry are determined. Then, with these stresses which on the boundary of the plate reach their maximum, the brittle fracturing condition of the plate is written. It is shown that in the case of the sufficiently small distances of the stringers nearest ends the brittle fracture condition of the elastic semi-infinite plate obviously takes place.

Литература

1. *Melan E.* – Ing. Arch. 1932. Bd. 3. N 2. S.123-129.
2. *Koiter W.* – J. T. Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1955. V. 8. N 2. P. 164-178.
3. *Bufler H.* – Ing.Arch. 1964. Bd. 18. N 3–4. S. 284-292.
4. *Bufler H.* – VDI Forschungsheft 485. 1961. Ausgabe B. 27. S. 5-44.
5. *Alblas J. R., Kaypers W.* – J. Appl. Scientific Res. 1965–1966. Sect. A. V. 15. N 6. P. 429-439.
6. *Muki R., Sternberg E.* – J. of Appl. Mech. Trans. ASME. 1967. Ser. E. V. 34. N 3. P. 233-242.
7. *Давтян З. А.,Мкртчян М. С., Мхитарян С. М.* – Изв. РАН. МТТ. 2016. N 1. С. 30-49.
8. *Александров В. М., Мхитарян С.М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М. Наука. 1983. 488 с.
9. Развитие теории контактных задач в СССР. М. Наука. 1976. 493 с.
10. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М. Наука. 1966. 708 с.
11. *Мхитарян С .М.* – Изв. АН АрмССР. Механика. 1982. Т. 35. N 6. С. 3-18.
12. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. М.–Л. Гостехиздат. 1949. 270 с.
13. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М. ФМ. 1963. 1100 с.
14. *Erdogan F., Gupta G. D. Cook T.S.* In: Mechanics of Fracture. V. 1. Methods of Analysis a Solution of Crack Problems. Publ. Leyden. Noordhoff Intern. 1973. P. 368-425.
15. *Theocaris P. S., Ioakimidis N. I.* – Quart. Appl Math. 1977. V. 35. N 1. P. 173-185.
16. *Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев. Наукова думка. 1976. 443 с.
17. *Mkhitaryan S. M., Mkrtchyan M. S., Kanetsyan E. G.* – ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2017. V. 97. Issue 6. P. 639-654.
18. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М. Наука. 1968. 720 с.