ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր
Том 118 2018 № 1
Volume

МЕХАНИКА

УДК 539.3

Член-корреспондент НАН РА С. М. Мхитарян

О напряженном состоянии упругой бесконечной пластины с конечной трещиной, взаимодействующей с абсолютно жестким тонким включением

(Представлено 23/XI 2017)

Ключевые слова: *упругая бесконечная пластина, трещина, тонкое абсолютно жесткое включение, контактные напряжения.*

Введение. Необходимость исследования вопросов взаимодействия концентраторов напряжений типа трещин и абсолютно жестких тонких включений в деформируемых массивных телах обусловлена растущими запросами прикладной механики и инженерной практики. Они часто возникают в геомеханике, термоупругости, в механике композитов и во многих других областях.

Ввиду их теоретической и практической значимости исследованию этих вопросов посвящены многочисленные работы. Особенно много работ опубликовано по вопросам взаимодействия круговых трещин с массивными или тонкими включениями, из которых здесь укажем на работы [1, 2]. Различные случаи сочетания трещин и жестких включений в композитах рассматривались в [3]. Многие результаты по указанной тематике подытожены в монографиях [4, 5], а также в справочниках по коэффициентам интенсивности напряжений (КИН) [6, 7].

В монографии [8], а также ранее в статье [9] в комплексных потенциалах построено замкнутое решение смешанной граничной задачи для упругой плоскости с произвольным конечным числом трещин, на верхних берегах которых заданы компоненты внешних напряжений, а на нижних берегах – компоненты перемещений. В [8] рассмотрен частный случай одной трещины, верхний берег которой свободен от внешних сил, а в ее нижний берег по всей его длине под действием центрально вертикальной силы вдавливается жесткая полоска-включение, сцепленная с упругой матрицей. Чтобы выяснить вопросы распространения трещины, та же смешанная задача в более общей постановке, когда в центральную часть нижнего берега трещины по симметричному отрезку, меньшему полного отрезка нижнего ее берега, вдавливается тонкое абсолютно жесткое включение в форме сильно сплюснутого полуэллипса, была рассмотрена в [10]. При этом на верхнем берегу трещины заданы внешние напряжения, остальные отрезки нижнего берега вне включения также нагружены распределенными силами, а пластина на бесконечности в вертикальном направлении, перпендикулярном линии трещины, растягивается равномерно распределенными силами. В контактной зоне учитываются силы сцепления.

Решение этой задачи в [10] сведено к решению сингулярного интегрального уравнения (СИУ), которое в свою очередь сведено к решению двухмерной метрической краевой задаче Римана–Гильберта. Построено точное решение последней и, следовательно, точное решение определяющего СИУ, вычислены КИН в концевых точках трещины и другие характеристики задачи. Одновременно в [10] отдельно и предельным переходом получено также точное решение поставленной задачи при полном контакте включения с нижним берегом трещины. Показано, что при приближении концевых точек включения к концевым точкам трещины КИН бесконечно возрастают, вследствие чего трещина распространится раньше, чем концевые точки включения дойдут до концевых точек трещины.

Однако для сравнительного анализа соответствующих характеристик рассматриваемой задачи в случаях неполного и полного контакта необходимо в явном виде определить их в случае полного контакта. С этой целью в настоящей статье в несколько более общей постановке вновь рассматривается упомянутая выше смешанная задача из [8] в случае полного контакта. Простым способом, несколько отличным от примененных в [8] и [10] методов, построено замкнутое решение определяющего СИУ задачи и определены характеристики задачи: комплексная комбинация контактных напряжений, плотность дислокаций на берегах трещины, раскрытие трещины, напряжения вне трещины на линии ее расположения.

1. Пусть упругая бесконечная пластина модуля упругости E, коэффициента Пуассона ν и высоты h, отнесенная к прямоугольной системе координат Oxy, на горизонтальной оси Ox вдоль отрезка $[-a,a]$ содержит трещину. Пусть далее на верхнем (+) берегу трещины действуют нормальные силы интенсивности $p_+(x)$ $\left(p_+(-x)=p_+(x)\right)$, касательные силы отсутствуют, а нижний (-) берег по его центральной части $[-b,b]$ $(b<a)$ под действием центрально вертикальной силы P вдавливается абсолютно жесткое тонкое включение, контактирующая поверхность которого описывается уравнением $y=f(x)$, причем $f(x)>0$, $f(-x)=f(x)$ и $\max f(x)<<b$ $(-b\le x\le b)$. Это может быть, в частности, центральная часть сплюснутого в вертикальном направлении полуэллипса

$$y=f(x)=d-\frac{d}{c}\sqrt{c^2-x^2}\ (d<<c;\ -b\le x\le b;\ b<c<a)$$

или полоска постоянной высоты δ, т.е. $f(x)=\delta$ $(\delta<<b;\ -b\le x\le b)$. Кроме того будем считать, что пластина на бесконечности в вертикальном на-

правлении, перпендикулярном к трещине, растягивается равномерно распределенными силами интенсивности p.

В предположении, что пластина находится в обобщенном плоском напряженном состоянии и включение по отрезку $[-b,b]$ нижнего берега трещины сцеплено с пластиной, т.е. в контактной зоне $-b \le x \le b$ действуют силы сцепления, требуется определить касательные и нормальные контактные напряжения, соответственно $\tau_-(x)$ и $p_-(x)$ $(-b \le x \le b)$, плотность дислокаций на берегах трещины, раскрытие трещины, разрушающие касательные и нормальные напряжения $\tau(x)$ и $\sigma(x)$, соответственно, вне трещины на ее линии расположения, т.е. при $|x| > a$ и $y = 0$ и КИН. Отметим, что неизвестные функции $\tau_-(x)$ и $p_-(x)$ должны удовлетворить условию сцепления $|\tau_-(x)/p_-(x)| < \rho$ $(-b < x < b)$, где ρ – коэффициент сухого трения между контактируемыми телами.

Укажем схему вывода основных уравнений поставленной задачи. С этой целью бесконечную пластину по горизонтальной оси разрежем на верхнюю (+) и нижнюю (-) упругие полуплоскости и введем следующие обозначения:

$$\sigma_y\Big|_{y=\pm 0} = -\Sigma_\pm(x) = \begin{cases} -p_\pm(x) - p & (|x| < a); \\ -\sigma(x) & (|x| > a); \end{cases}$$

$$\tau_{xy}\Big|_{y=\pm 0} = -T_\pm(x) = \begin{cases} -\tau_\pm(x) & (|x| < a); \\ -\tau(x) & (|x| > a); \end{cases} \tag{1.1}$$

где σ_y и τ_{xy} – соответственно нормальные и касательные напряжения в пластине, отнесенные к единице ее высоты h, $\tau_+(x) \equiv 0$ при $|x| < a$, а $\tau_-(x) = p_-(x) = 0$ при $b < |x| < a$. Далее исходя из комплексных потенциалов в случае сосредоточенных сил на границе упругой полуплоскости ([8], с. 343) известным способом для производных комплексных комбинаций горизонтальных $(u_\pm(x))$ и вертикальных $(v_\pm(x))$ перемещений граничных точек верхней (+) и нижней (-) упругих полуплоскотей будем иметь

$$w_\pm(x) = u_\pm'(x) + iv_\pm'(x) = \pm\vartheta_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Omega_\pm(s)\,ds}{s - x} + 2i\vartheta_2\Omega_\pm(x) - Q \qquad (-\infty < x < \infty) \tag{1.2}$$

$$\vartheta_1 = 2/\pi E, \quad \vartheta_2 = (1-\nu)/2E, \quad Q = \nu p/E, \quad \Omega_\pm(x) = T_\pm(x) + i\sum\nolimits_\pm(x).$$

Теперь введем в рассмотрение функции

$$w(x) = \frac{1}{2}\left[w_+(x) + w_-(x)\right]; \qquad \Phi(x) = \frac{1}{2}\left[w_+(x) - w_-(x)\right];$$
$$\Psi(x) = u_+(x) - u_-(x) + i\left[v_+(x) - v_-(x)\right];$$
$$\Omega(x) = \frac{1}{2}\left[\Omega_+(x) + \Omega_-(x)\right]; \qquad \mathrm{X}(x) = \frac{1}{2}\left[\Omega_+(x) - \Omega_-(x)\right]; \qquad (-\infty < x < \infty)$$

и безразмерные величины

$$\xi = x/a,\ \ \eta = s/a;\quad \omega(\xi) = \mathrm{X}_-(a\xi)/E = \tau(\xi) + ip(\xi);$$
$$\left(\mathrm{X}_-(x) = \tau_-(x) + ip_-(x)\quad (-b < x < b)\right);$$
$$\tau(\xi) = \tau_-(a\xi)/E;\quad p(\xi) = p_-(a\xi)/E;\quad p_+^0(\xi) = p_+(a\xi)/E;\quad p_0 = p/E;$$
$$P_0 = P/aE;\quad P_0^+ = P^+/aE\quad \left(P^+ = \int_{-a}^{a} p_+(x)\,dx\right);\quad k = b/a.$$
$$\Psi_0(\xi) = \left\{\left[u_+(a\xi) - u_-(a\xi)\right] + i\left[v_+(a\xi) - v_-(a\xi)\right]\right\}/a.$$

Тогда исходя из (1.1)-(1.2) при помощи интегрального преобразования Фурье по переменной x после несложных выкладок придем к следующему определяющему СИУ поставленной задачи:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-k}^{k}\left(1 + \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)\frac{\omega(\eta)\,d\eta}{\eta - \xi} - 2i\nu_0\omega(\xi) = g(\xi)\qquad (-k < \xi < k)$$

$$g(\xi) = \frac{\nu_0\left(P_0 - P_0^+\right) + 2i\pi p_0\xi}{\pi\sqrt{1-\xi^2}} - p_0 - if'(a\xi) + \frac{i}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(\eta + \xi)\,p_+^0(\eta)\,d\eta}{\sqrt{1-\xi^2}\left(\sqrt{1-\eta^2} + \sqrt{1-\xi^2}\right)}\qquad (1.3)$$

$$\left(\nu_0 = (1-\nu)/2\right).$$

Решение СИУ должно удовлетворять условию равновесия включения в безразмерной форме

$$\int_{-k}^{k}\omega(\xi)\,d\xi = iP_0.\qquad (1.4)$$

Случай СИУ (1.3)-(1.4) подробно расмотрен в [10]. Здесь будем считать $k = 1$, и характеристики задачи выразим через решение СИУ (1.3)-(1.4) при $k = 1$. Тогда для плотности дислокаций на берега трещины будем иметь

$$\varphi_0(\xi) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-\xi^2}}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\eta^2}\left[\omega(\eta) + ip_+^0(\eta)\right]d\eta}{\eta - \xi} - 2i\nu_0\omega(\xi) - 2\nu_0 p_+^0(\xi) -$$
$$-\frac{2\nu_0\left(P_0 - P_0^+\right) + 4i\pi p_0\xi}{\pi\sqrt{1-\xi^2}}\qquad (-1 < \xi < 1);\ \ \varphi_0(\xi) = \varphi(a\xi) = \varphi(x) = \Phi(x)(-a < x < a);$$

для безразмерного раскрытия –

$$\Psi_0(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln\frac{1 - \xi\eta + \sqrt{\left(1-\xi^2\right)\left(1-\eta^2\right)}}{1 - \xi\eta - \sqrt{\left(1-\xi^2\right)\left(1-\eta^2\right)}}\left[\omega(\eta) + ip_+^0(\eta)\right]d\eta -$$
$$-\nu_0\int_{-1}^{1} sign(\xi - \eta)\left[p_+^0(\eta) + i\omega(\eta)\right]d\eta - -\frac{2\nu_0}{\pi} +$$
$$+4ip_0\sqrt{1-\xi^2}\qquad \left(\Psi_0(\xi) = \Psi(a\xi)/a;\ \ -1 \le \xi \le 1\right);$$

а для безразмерных напряжений вне трещины –

$$\tau_0(\xi)+i\sigma_0(\xi)=\frac{1}{\sqrt{\xi^2-1}}\left\{\frac{sign\xi}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\eta^2}\left[\omega(\eta)+ip_+^0(\eta)\right]d\eta}{\eta-\xi}-\frac{\nu_0\left(P_0-P_0^+\right)}{2\pi}sign\xi-\right.$$

$$\left.-\frac{ip_0}{|\xi|+\sqrt{\xi^2-1}}+\frac{\nu_0}{2\pi}\sqrt{1-\xi^2}\int_{-1}^{1}\frac{p_+^0(\eta)d\eta}{\eta-\xi}\right\};\ (|\xi|>1;\ \tau_0(\xi)=\tau(a\xi)/E;\ \sigma_0(\xi)=\sigma(a\xi)/E).$$

2. Перейдем к решению СИУ (1.3)-(1.4) при $k=1$ и с этой целью введем в рассмотрение кусочно-голоморфные функции комплексной переменной $z=\xi+i\eta$:

$$\Phi_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{\omega(\eta)d\eta}{\eta-z},\quad \Phi_2(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\eta^2}\omega(\eta)d\eta}{\eta-z},$$

аналитические в комплексной плоскости z, разрезанной по отрезку вещественной оси $[-1,1]$. По формулам Сохоцкого–Племеля для граничных значений этих функций имеют место соотношения

$$\Phi_1^+(\xi)+\Phi_1^-(\xi)=\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{\omega(\eta)d\eta}{\eta-\xi};\quad \Phi_2^+(\xi)+\Phi_2^-(\xi)=\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\eta^2}\omega(\eta)d\eta}{\eta-\xi};\tag{2.1}$$

$$\Phi_1^+(\xi)-\Phi_1^-(\xi)=\omega(\xi);\quad \Phi_2^+(\xi)-\Phi_2^-(\xi)=\sqrt{1-\xi^2}\omega(\xi)\qquad(-1<\xi<1).$$

При помощи этих соотношений решение СИУ (1.3) при $k=1$ сводится к решению следующей двумерной матричной краевой задаче Римана– Гильберта:

$$\begin{cases}\Phi_1^+(\xi)=\dfrac{\nu_0}{\nu_0-1}\Phi_1^-(\xi)+\dfrac{\Phi_2^-(\xi)}{(\nu_0-1)\sqrt{1-\xi^2}}+\dfrac{ig(\xi)}{2(\nu_0-1)} & (-1<\xi<1)\\ \Phi_2^+(\xi)=\dfrac{1}{\nu_0-1}\sqrt{1-\xi^2}\Phi_1^-(\xi)+\dfrac{\nu_0}{\nu_0-1}\Phi_2^-(\xi)+\dfrac{i\sqrt{1-\xi^2}g(\xi)}{2(\nu_0-1)}. & \end{cases}\tag{2.2}$$

Теперь обе части второго уравнения (2.2) разделим на $\sqrt{1-\xi^2}$ и введем в рассмотрение функцию комплексного переменного $\Omega_1(z)=$ $=\Phi_2(z)/\sqrt{z^2-1}$ $(z=\xi+i\eta)$.

В комплексной плоскости z, разрезанной по отрезку вещественной оси $[-1,1]$, выберем ту однозначную ветвь функции $F(z)=\sqrt{z^2-1}$, которая в окрестности бесконечно удаленной точки имеет поведение $F(z)=z+O(1/z)$ $(z\to\infty)$. На верхнем $(+)$ и нижнем $(-)$ берегах этого разреза для граничных значений $F^{\pm}(\xi)$ имеем $F^{\pm}(\xi)=\pm i\sqrt{1-\xi^2}$ $(-1<\xi<1)$.

В результате краевая задача (2.2) преобразуется в следующую краевую задачу с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \Phi_1^+(\xi) = -\dfrac{1-\nu}{1+\nu}\Phi_1^-(\xi) + \dfrac{2i}{1+\nu}\Omega_1^-(\xi) - \dfrac{ig(\xi)}{1+\nu} \\ \Omega_1^+(\xi) = -\dfrac{2i}{1+\nu}\Phi_1^-(\xi) + \dfrac{1-\nu}{1+\nu}\Omega_1^-(\xi) - \dfrac{g(\xi)}{1+\nu} \end{cases} \qquad (-1<\xi<1).$$

После перехода к постоянной Мусхелишвили

$$\chi = (3-\nu)/(1+\nu) \qquad (\nu = (3-\chi)/(1+\chi))$$

эта задача примет вид

$$\begin{cases} \Phi_1^+(\xi) = \dfrac{1-\chi}{2}\Phi_1^-(\xi) + \dfrac{1+\chi}{2}i\Omega_1^-(\xi) - \dfrac{1+\chi}{4}ig(\xi) \\ \Omega_1^+(\xi) = \dfrac{1+\chi}{2}i\Phi_1^-(\xi) - \dfrac{1-\chi}{2}\Omega_1^-(\xi) - \dfrac{1+\chi}{4}g(\xi) \end{cases} \qquad (-1<\xi<1) \qquad (2.3)$$

Далее при помощи линейного преобразования краевую задачу (2.3) преобразуем в краевую задачу с диагональными матричными коэффициентами. С этой целью найдем собственные числа матрицы

$$A = \begin{pmatrix} (1-\chi)/2 & (1+\chi)i/2 \\ (1+\chi)i/2 & -(1-\chi)/2 \end{pmatrix}$$

Легко видеть, что характеристический многочлен этой матрицы имеет корни $\lambda_1 = i\sqrt{\chi}$ и $\lambda_2 = -i\sqrt{\chi}$. Следовательно, элементы матрицы

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

искомого линейного преобразования будут определяться из матричного равенства

$$BA = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sqrt{\chi} & 0 \\ 0 & -i\sqrt{\chi} \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим

$$b_{11} = b_{22} = -(1-\chi)i/2\sqrt{\chi}, \quad b_{12} = -b_{21} = (1+\chi)/2\sqrt{\chi}$$

и, следовательно,

$$B = \begin{pmatrix} -(1-\chi)i/2\sqrt{\chi} & (1+\chi)/2\sqrt{\chi} \\ -(1+\chi)/2\sqrt{\chi} & -(1-\chi)i/2\sqrt{\chi} \end{pmatrix}.$$

Теперь (2.3) запишем в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \Phi_1^+(\xi) \\ \Omega_1^+(\xi) \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} \Phi_1^-(\xi) \\ \Omega_1^-(\xi) \end{pmatrix} - \frac{1+\chi}{4}\begin{pmatrix} ig(\xi) \\ g(\xi) \end{pmatrix}$$

и к обеим частям этого равенства слева применим матрицу B. Будем иметь

$$-\frac{1-\chi}{2\sqrt{\chi}}i\Phi_1^+(\xi) + \frac{1+\chi}{2\sqrt{\chi}}\Omega_1^+(\xi) = i\sqrt{\chi}\Phi_1^-(\xi) - \frac{1-\chi^2}{8\sqrt{\chi}}g(\xi) - \frac{(1+\chi)^2}{8\sqrt{\chi}}g(\xi);$$

$$-\frac{1+\chi}{2\sqrt{\chi}}\Phi_1^+(\xi) - \frac{1-\chi}{2\sqrt{\chi}}i\Omega_1^+(\xi) = -i\sqrt{\chi}\Omega_1^-(\xi) + \frac{(1+\chi)^2}{8\sqrt{\chi}}ig(\xi) + \frac{1-\chi^2}{8\sqrt{\chi}}ig(\xi).$$

$$(-1<\xi<1) \qquad (2.4)$$

Исходя из (2.4) введем голоморфные в верхней полуплоскости $\Pi_+ = \{-\infty < \xi < \infty, 0 < \eta < \infty\}$ функции

$$\Psi_1^+(z) = -\frac{1-\chi}{2\sqrt{\chi}} i\Phi_1^+(z) + \frac{1+\chi}{2\sqrt{\chi}}\Omega_1^+(z); \quad X_1^+(z) = -\frac{1+\chi}{2\sqrt{\chi}}\Phi_1^+(z) - \frac{1-\chi}{2\sqrt{\chi}} i\Omega_1^+(z) \quad (2.5)$$

и голоморфные в нижней полуплоскости $\Pi_- = \{-\infty < \xi < \infty, -\infty < \eta < 0\}$ функции

$$\Psi_1^-(z) = \Phi_1^-(z), \quad X_1^-(z) = \Omega_1^-(z). \quad (2.6)$$

Тогда из (2.4) получим следующие простейшие раздельные одинарные краевые задачи Римана–Гильберта:

$$\Psi_1^+(\xi) = i\sqrt{\chi}\Psi_1^-(\xi) + g_1(\xi) \qquad (-1 < \xi < 1); \quad (2.7)$$

$$X_1^+(\xi) = -i\sqrt{\chi}X_1^-(\xi) + h_1(\xi) \qquad (-1 < \xi < 1); \quad g_1(\xi) = ih_1(\xi) = -\frac{1+\chi}{4\sqrt{\chi}} g(\xi) \quad (2.8)$$

Приступив к решению задачи (2.7), находим, что согласно известным результатам [8] (с. 392) каноническое решение соответствующей однородной краевой задачи имеет вид

$$X(z) = (z-1)^{-3/4-i\alpha}(z+1)^{-1/4+i\alpha},$$

откуда

$$X^\pm(\xi) = e^{\mp 3\pi i/4} e^{\pm\pi\alpha}\omega_\alpha(\xi); \quad \alpha = \frac{1}{4\pi}\ln\chi; \quad \omega_\alpha(\xi) = (1-\xi)^{-3/4-i\alpha}(1+\xi)^{-1/4+i\alpha}$$
$$(-1 < \xi < 1). \quad (2.9)$$

Далее, следуя известной процедуре, изложенной в [8], решение краевой задачи (2.7) представим формулой

$$\Psi_1(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{g_1(\eta)d\eta}{(\eta - z)X^+(\eta)} + C_1 X(z),$$

где C_1 – пока неизвестная постоянная. Отсюда

$$\Psi_1^\pm(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{g_1(\eta)d\eta}{(\eta - z)X^+(\eta)} + C_1 X(z) \quad (z \in \Pi_\pm). \quad (2.10)$$

Но по (2.6)

$$\Psi_1^-(z) = \Phi_1^-(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{\omega(\eta)d\eta}{\eta - z} = -\frac{P_0}{2\pi z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \quad (z \to \infty, z \in \Pi_-),$$

где использовано условие (1.4) при $k = 1$. Теперь сравнением порядков левых и правых частей в (2.10) при $z \to \infty$ получим $C_1 = P_0/2\pi$.

Вполне аналогичным образом решение краевой задачи (2.8) представим формулой

$$X_1(z) = \frac{X_0(z)}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{h_1(\eta)d\eta}{(\eta - z)X_0^+(\eta)} + C_0 X_0(z),$$

откуда

$$X_1^\pm(z) = \frac{X_0(z)}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{h_1(\eta)d\eta}{(\eta - z)X_0^+(\eta)} + C_0 X_0(z) \quad (z \in \Pi_\pm);$$

$$X_0(z)=(z-1)^{-\frac{1}{4}-i\alpha}(z+1)^{-\frac{3}{4}+i\alpha};\;\; X_0^{\pm}(\xi)=e^{\mp i\pi/4}e^{\pm\pi\alpha}\gamma_\alpha(\xi);$$
$$\gamma_\alpha(\xi)=(1-\xi)^{-\frac{1}{4}-i\alpha}(1+\xi)^{-\frac{3}{4}+i\alpha}\quad(-1<\xi<1). \tag{2.11}$$

После того как найдены функции $\Psi_1^+(z)$ и $X_1^+(z)$, выражающиеся формулами (2.10)–(2.11), из (2.5) определим функции $\Phi_1^+(z)$ и $\Omega_1^+(z)$:

$$\Phi_1^+(z)=-\frac{1}{2\sqrt{\chi}}\left[(1+\chi)X_1^+(z)+i(1-\chi)\Psi_1^+(z)\right];$$
$$\Omega_1^+(z)=\frac{1}{2\sqrt{\chi}}\left[(1+\chi)\Psi_1^+(z)-i(1-\chi)X_1^+(z)\right].\qquad (z\in\Pi_+) \tag{2.12}$$

Исходя из (2.10) и (2.11) по формулам Сохоцкого–Племеля вычислим граничные значения $\Psi_1^{\pm}(\xi), X_1^+(\xi)$ на разрезе:

$$\Psi_1^+(\xi)=-\frac{1+\chi}{8\sqrt{\chi}}g(\xi)+\frac{1+\chi}{8\pi\sqrt{\chi}}i\omega_\alpha(\xi)\int_{-1}^{1}\frac{g(\eta)d\eta}{(\eta-\xi)\omega_\alpha(\eta)}+\frac{(1+i)\sqrt{2}}{4\pi}\sqrt[4]{\chi}P_0\omega_\alpha(\xi)$$
$$(-1<\xi<1); \tag{2.13}$$

$$\Phi_1^-(\xi)=\Psi_1^-(\xi)=-\frac{1+\chi}{8\chi}ig(\xi)+\frac{1+\chi}{8\pi\chi}\omega_\alpha(\xi)\int_{-1}^{1}\frac{g(\eta)d\eta}{(\eta-\xi)\omega_\alpha(\eta)}+\frac{(1-i)\sqrt{2}}{4\pi\sqrt[4]{\chi}}P_0\omega_\alpha(\xi)$$
$$(-1<\xi<1); \tag{2.14}$$

$$X_1^+(\xi)=\frac{1+\chi}{8\sqrt{\chi}}ig(\xi)+\frac{1+\chi}{8\pi\sqrt{\chi}}\gamma_\alpha(\xi)\int_{-1}^{1}\frac{g(\eta)d\eta}{(\eta-\xi)\gamma_\alpha(\eta)}+\frac{(1-i)\sqrt{2}}{2\pi}\sqrt[4]{\chi}C_0\gamma_\alpha(\xi). \tag{2.15}$$

Функцию $\Phi_1^+(\xi)$ вычислим по первой формуле (2.12) при помощи (2.13) и (2.15). После элементарных преобразований находим

$$\Phi_1^+(\xi)=-\frac{1+\chi}{8}ig(\xi)+\frac{1+\chi}{16\pi\chi}\left[(1-\chi)\omega_\alpha(\xi)\int_{-1}^{1}\frac{g(\eta)d\eta}{(\eta-\xi)\omega_\alpha(\eta)}-(1+\chi)\gamma_\alpha(\xi)\times\right.$$
$$\left.\times\int_{-1}^{1}\frac{g(\eta)d\eta}{(\eta-\xi)\gamma_\alpha(\eta)}\right]+\frac{(1-i)\sqrt{2}(1-\chi)}{8\pi\sqrt[4]{\chi}}P_0\omega_\alpha(\xi)-\frac{(1-i)\sqrt{2}(1+\chi)}{4\sqrt[4]{\chi}}C_0\gamma_\alpha(\xi)$$
$$(-1<\xi<1)\,. \tag{2.16}$$

Далее по третьей формуле (2.1) при помощи (2.14) и (2.16) вычислим решение исходного СИУ (1.3). Получим

$$\omega(\xi)=\frac{1-\chi^2}{8\chi}ig(\xi)-\frac{(1+\chi)^2}{16\pi\chi}\omega_\alpha(\xi)\int_{-1}^{1}\frac{g(\eta)d\eta}{(\eta-\xi)\omega_\alpha(\eta)}-$$
$$-\frac{(1+\chi)^2}{16\pi\chi}\gamma_\alpha(\xi)\int_{-1}^{1}\frac{g(\eta)d\eta}{(\eta-\xi)\gamma_\alpha(\eta)}-\frac{\sqrt{2}(1-i)(1+\chi)}{8\pi\sqrt[4]{\chi}}P_0\omega_\alpha(\xi)-\frac{\sqrt{2}(1-i)(1+\chi)}{4\sqrt[4]{\chi}}C_0\gamma_\alpha(\xi)$$
$$(-1<\xi<1), \tag{2.17}$$

где функции $\omega_\alpha(\xi)$ и $\gamma_\alpha(\xi)$ выражаются формулами из (2.9) и (2.11).

Для определения постоянной C_0 опять воспользуемся условием (1.4) при $k=1$. Приняв во внимание выражения интегралов

$$1)\int_{-1}^{1}\omega_\alpha(\xi)\,d\xi=\Gamma(1/4-i\alpha)\Gamma(3/4+i\alpha)=\pi/\sin[\pi(1/4-i\alpha)];$$

$$2)\int_{-1}^{1}\gamma_\alpha(\xi)\,d\xi=\Gamma(3/4-i\alpha)\Gamma(1/4+i\alpha)=\pi/\sin[\pi(1/4+i\alpha)];$$

$$3)\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\gamma_\alpha(\xi)\,d\xi}{\eta-\xi}=\beta_0\gamma_\alpha(\eta)\ \ (\beta_0=\mathrm{ctg}[\pi(1/4+i\alpha)]);$$

$$4)\ \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\omega_\alpha(\xi)\,d\xi}{\eta-\xi}=\delta_0\omega_\alpha(\eta)\ \ (\delta_0=-\mathrm{tg}[\pi(1/4+i\alpha)]);\qquad (-1<\eta<1)$$

причем последние два интеграла вычислены по формуле Коши для бесконечной области ([8], с.. 252, ф–ла (3')), после несложных преобразований находим

$$C_0=A_0(\chi,\alpha)/B_0(\chi,\alpha);\quad A_0(\chi,\alpha)=\frac{1+\chi}{16\chi}G_0\{(1+\chi)\mathrm{ctg}[\pi(1/4+i\alpha)]-$$

$$-2(1-\chi)-(1+\chi)\mathrm{tg}[\pi(1/4+i\alpha)]\}+i\left[1-\frac{\sqrt{2}(1+i)(1+\chi)}{8\sqrt[4]{\chi}}\frac{1}{\sin[\pi(1/4-i\alpha)]}\right]P_0;$$

$$B_0(\chi,\alpha)=\frac{\sqrt{2}(i-1)(1+\chi)}{4\sqrt[4]{\chi}}\frac{\pi}{\sin[\pi(1/4+i\alpha)]};\ G_0=\int_{-1}^{1}g(\eta)\,d\eta.$$

Здесь $\Gamma(x)$ – известная гамма-функция Эйлера.

Отметим, что если формально считать $\nu=1$ и, следовательно, $\chi=1$, то (2.17) совпадает с соответствующим результатом из [11].

Институт механики НАН РА
e-mail: smkhitaryan39@rambler.ru

Член-корреспондент НАН РА С. М. Мхитарян

О напряженном состоянии упругой бесконечной пластины с конечной трещиной, взаимодействующей с абсолютно жестким тонким включением

Рассмотрена контактная задача о вдавливании абсолютно жесткого тонкого включения в нижний берег трещины конечной длины, содержащейся в пластине, с учетом сил сцепления. Решение задачи сведено сначала к решению сингулярного интегрального уравнения (СИУ), а затем эквивалентной краевой двумерной матричной задачи Римана–Гильберта. Построено точное решение последней, и все основные характеристики задачи в явном виде представлены через решение определяющего СИУ.

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ս. Մ. Մխիթարյան

Բացարձակ կոշտ բարակապատ ներդրակի հետ փոխազդող վերջավոր ճաքով առաձգական սալի լարվածային վիճակի մասին

Հարակցման ուժերի հաշվառումով դիտարկված է առաձգական անվերջ սալում պարունակվող վերջավոր երկարության ճաքի ստորին ափին բացարձակ կոշտ բարակապատ ներդրակի սեղմման կոնտակտային խնդիրը: Խնդրի լուծումը սկզբում բերված է սինգուլյար ինտեգրալ հավասարման (ՍԻՀ) լուծման, իսկ այնուհետև՝ համարժեք Ռիման-Հիլբերտի երկչափ մատրիցային եզրային խնդրի լուծման: Կառուցված է վերջինիս ճշգրիտ լուծումը, և խնդրի հիմնական բնութագրիչները ներկայացված են որոշիչ ՍԻՀ լուծման միջոցով:

Corresponding member of NAS RA S. M. Mkhitaryan

On the Stressed State of an Elastic Infinite Plate with a Finite Crack Interacting with an Absolutely Rigid Thin Inclusion

The contact problem on indentation of an absolutely rigid thin inclusion into the lower edge of a plate crack of finite length is considered taking into account adhesion forces. The solution of the problem is first reduced to the solution of the SIE, and then to the solution of an equivalent Riemann-Hilbert boundary-value two-dimensional matrix problem. The exact solution of the problem is constructed and all main characterristics of the problem are represented explicitly through the solution of the governing SIE.

Литература

1. *Selvadural A.S.P., Singh B.M.* – International Journal of Fracture. 1984. V. 25. P. 69-77.
2. *Hwu, Liang Y.K., Yen W. I.* – International Journal of Fracture. 1995. V. 79(4). P. 301-323.
3. *Черепанов Г. П.* Механика разрушения композиционных материалов. М. Наука. 1983. 296 с.
4. *Бережницкий Л. Т. Панасюк В. В, Стащук Н. Г.* Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле. Киев. Наукова думка. 1983. 288 с.
5. *Hakobyan V.N.* Stress concentration near defects in homogeneous and compuned bodies. LAP LAMBERT Academic Publishing, Germany, 2011. 168 p.
6. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. Т.1, 2. Под ред. Ю. Мураками. 1990. М. Мир. 1013 с.
7. *Саврук М.П.* Коэффициенты интенсивности напряжений для тел с трещинами. Справочник в 4 томах. Киев. Наукова думка. 1988. 620 с.
8. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М. Наука. 1966. 707 с.
9. *Шерман Д. И.* – Доклады АН СССР. 1940. Т. 27. № 4. С. 330-334.
10. *Antipov Y.A., Mkhitaryan S.M.* – Q. J. Mechanics Appl. Math. 2017. V. 70 (2). P. 153-185.
11. *Бардзокас Д. И., Мхитарян С. М.* В кн.: Труды междунар. конф., посвященной 95-летию академика Н.Х. Арутюняна. 25-28 сентября 2007 г. Цахкадзор. Ереван. Гитутюн. С. 91-94.