ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 118 2018 № 1

МЕХАНИКА

УДК 539.3

В. М. Белубекян[1], С. В. Саркисян[2]

Задача Лява для полупространства с вязкоупругим покрытием

(Представлено чл.-кор. НАН РА А. С. Аветисяном 30/X 2017)

Ключевые слова: *сдвиговые волны, полупространство, вязкоупругое покрытие.*

Введение. В настоящей работе рассматриваются условия существования и характер распространения вязкоупругих сдвиговых поверхностных волн в упругом полупространстве с вязкоупругим покрытием. Исследуется влияние параметров задачи, в том числе вязкости покрытия, на распространение поверхностной волны.

Актуальность рассматриваемой задачи обусловлена рядом причин. В первую очередь широким распространением в современной технике конструкций с различного рода тонкими покрытиями: электроизоляционными, теплоизоляционными, демпфирующими, упрочняющими и др. Другой перспективной областью приложения исследований поверхностных волн являются модельные задачи волноводов. Отражением запросов техники стали современные исследования волн в слоистых структурах включая волны в многослойных покрытиях, электроупругие волны в покрытиях с различными электрическими характеристиками, волны у поверхностей с включениями. Работы, перечисленные в [1-13], являются далеко не полным списком исследований в данной области.

Таким образом, волны в структурах с вязкоупругим покрытием должны представлять особый интерес для исследований: с одной стороны следует ожидать, что вязкость будет препятствовать возникновению волн. С другой стороны всякое отличие в свойствах материала покрытия от материала основы может привести к возникновению поверхностных эффектов: возникновению поверхностной волны, или возникновению новой моды уже существующей волны, или к существенному изменению скорости затухания возмущений по глубине.

Рассматриваемая задача принадлежит к классу задач, где один из размеров упругих тел, в данном случае толщина слоя, намного меньше остальных размеров. Для решения подобных задач наибольшее распространение получили два следующих подхода.

В первом подходе предлагаются эвристические гипотезы относительно распределения искомых полей вдоль малого размера, и на основании этих гипотез снижается размерность уравнений задачи. Примером подобного подхода могут служить теория изгиба пластин Кирхгоффа, уточненная теория изгиба пластин С.А. Амбарцумяна [14], теория пограничного слоя в гидродинамике [15].

Второй подход заключается в нахождении решений задачи для произвольных размеров и последующем упрощении этих решений путем так называемого длинноволнового приближения, когда длина упругой волны принимается намного большей, чем длина малого размера, в данном случае больше, чем толщина слоя. Применимость и сравнение указанных подходов обсуждаются в [16, 17].

В настоящей работе используется второй подход: уравнения и граничные условия теории (вязко-)упругости записываются в трехмерной формулировке. Их общие решения приводят к характеристическим уравнениям, определяющим существование и характер распространения волн. Полученные уравнения упрощаются для длинноволнового приближения, и на основе исследования упрощенных уравнений становится возможным судить о качественном поведении волн в рассмотренной структуре.

1. Постановка задачи. Рассматриваются чисто сдвиговые упругие волны в системе слой-полупространство. Полупространство из упругого материала в прямоугольной системе координат (x, y, z) занимает область $-\infty < x < \infty$, $0 < y < \infty$, $-\infty < z < \infty$, а слой из вязкоупругого материала – область $-\infty < x < \infty$, $-h \le y < 0$, $-\infty < z < \infty$. Величины, относящиеся к слою, будут отмечаться индексом 1, соответствующие величины для полупространства будут без индексов.

Уравнение чисто сдвиговых волн в слое имеет вид [18]:

$$\frac{\partial \sigma_{13}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{23}^{(1)}}{\partial y} = \rho_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}, \qquad (1.1)$$

где связь напряжение-деформации для вязкоупругого материала принимается согласно модели Фойгта [19, 20]:

$$\sigma_{13}^{(1)} = \left(G_1 + \mu_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial w_1}{\partial x}, \qquad \sigma_{23}^{(1)} = \left(G_1 + \mu_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial w_1}{\partial y}. \qquad (1.2)$$

Соответствующее уравнение и материальные связи для полупространства следующие:

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \qquad (1.3)$$

$$\sigma_{13} = G \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \sigma_{23} = G \frac{\partial w}{\partial y}. \qquad (1.4)$$

Предполагается, что внешняя граница слоя свободна:

$$\sigma_{23}^{(1)} = 0 \quad \text{при} \quad y = -h. \qquad (1.5)$$

На плоскости контакта слоя и полупространства принимается непрерывность перемещения и напряжения

$$w_1 = w, \qquad \sigma_{23}^{(1)} = \sigma_{23}, \qquad \text{при } y = 0. \tag{1.6}$$

Требуется найти решения уравнений (1.1), (1.3), удовлетворяющие граничным условиям (1.5), (1.6) и условию затухания

$$\lim_{y\to\infty} w = 0. \tag{1.7}$$

2. Решение краевой задачи. Принимается, что слой достаточно тонкий, например, по сравнению с предполагаемой в дальнейшем длиной волны. Вначале уравнение (1.1) с учетом (1.2) записывается в виде

$$\left(G_1 + \mu_1 \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial \sigma_{23}^{(1)}}{\partial y} = \rho_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}. \tag{2.1}$$

Затем для уравнения (2.1) принимается, что $w_1 = w_1(x,t)$, и после этого уравнение (2.1) интегрируется по y в пределах от $-h$ до 0. В результате с учетом граничных условий (1.5) и (1.6) получается

$$h\left(G_1 + \mu_1 \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + G\frac{\partial w}{\partial y} = \rho_1 h \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \qquad \text{при } y = 0. \tag{2.2}$$

Таким образом, задача решения уравнения (2.1) для слоя приводится к граничному условию для уравнения (1.3).

Решение волнового уравнения (1.3) с учетом (1.4) представляется в виде

$$w = Ae^{kpy} \exp i\left(\omega t - kx\right), \tag{2.9}$$

где

$$p^2 - \left(1-\eta^2\right) = 0 \qquad \eta = \frac{\omega}{kC_t} \qquad C_t^2 = \frac{G}{\rho}. \tag{2.10}$$

Для того чтобы решение (2.9) удовлетворяло условию затухания (1.7), необходимо, чтобы имело место неравенство

$$\mathbb{R}ep < 0. \tag{2.11}$$

В случае волн Лява при отсутствии вязкости $(\mu_1 = 0)$ получается $\eta^2 < 1$ и $p = -\sqrt{1-\eta^2}$, т.е. для p получается действительное значение.

Если принять следующие комплексные выражения:

$$\omega = \alpha_1 + i\beta_1, \qquad p = r + iq, \tag{2.12}$$

то условию затухания будет удовлетворять корень уравнения (2.10)

$$p_1 = -\Gamma + i\alpha\beta / \Gamma. \tag{2.13}$$

В (2.13) приняты новые обозначения:

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{kC_t}, \qquad \beta = \frac{\beta_1}{kC_t},$$

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1-\alpha^2+\beta^2+\sqrt{\left(1-\alpha^2+\beta^2\right)^2+4\alpha^2\beta^2}\right]^{1/2}. \tag{2.14}$$

При этом решение (2.9) при $p = p_1$ из (2.13) будет удовлетворять условию затухания, если

$$0 < \alpha^2 < 1+\beta^2. \tag{2.15}$$

3. Дисперсионное уравнение и численные результаты. Подстановка (2.9), при значении корня $p = p_1$ из (2.13), в граничное условие (2.2) приводит к дисперсионному уравнению, которое после разделения на действительную и мнимую части преобразуется к системе алгебраических уравнений относительно искомых безразмерных параметров α, β

$$1-\varepsilon kh\beta+\gamma\left(kh\right)^{-1}\Gamma-\theta\left(\alpha^2-\beta^2\right)=0,$$
$$\varepsilon kh-\gamma\left(kh\Gamma\right)^{-1}\beta-2\theta\beta=0. \tag{3.1}$$

В (3.1) приняты следующие обозначения:

$$\varepsilon=\frac{\mu_1 C_t}{hG_1},\ \gamma=\frac{G}{G_1},\ \theta=\frac{C_t^2}{G_{t_1}^2},\ G_{t_1}^2=\frac{G_1}{\rho_1}. \tag{3.2}$$

Из (3.1) при неучете вязкости $(\varepsilon=0)$ следует $\beta=0$, и уравнение для α^2 будет [15]

$$1+\gamma\left(kh\right)^{-1}\sqrt{1-\alpha^2}-\theta\alpha^2=0. \tag{3.3}$$

Согласно (3.3) решение, удовлетворяющее условию затухания (2.15) при $\beta=0$, существует, если $\theta>1$.

При прямой подстановке решения (2.9) в граничные условия (2.2) получается следующее дисперсионное уравнение:

$$\gamma\sqrt{1-\eta^2}-kh\left(\theta\eta^2-1\right)+i\varphi kh\gamma\eta=0, \tag{3.4}$$

где

$$\varphi=\frac{\mu_i k}{\rho C_t}. \tag{3.5}$$

Уравнение (3.4) можно записать в виде

$$\sqrt{1-\eta}=\frac{1}{\gamma\sqrt{1+\eta}}\left[kh\left(\theta\eta^2-1\right)-i\varphi kh\gamma\eta\right], \tag{3.6}$$

что удобно для нахождения корня уравнения методом последовательных приближений:

$$\eta_n=1-\frac{1}{\gamma\left(1+\eta_{n-1}\right)}\left[kh\left(\theta\eta_{n-1}^2-1\right)-i\varphi kh\gamma\eta_{n-1}\right]. \tag{3.6}$$

В частности принимая $kh=0.1, \theta=2, \varphi=0.1$, при $\gamma=1$ получается $\eta_1\approx 0.98+0.002i$, а при $\gamma=1.5-$ $\eta_1\approx 0.91+0.001i$.

Численное решение уравнения (3.4) в частном случае значений параметров $kh=0.1, \theta=2, \varphi=0.01, 0.05, 0.1, 0.5$, $\gamma=1$ и 1.5 показывает, что наличие вязкости приводит к незначительному усилению затухания по глубине. Результаты расчетов приведены в таблице.

φ / γ	0.01	0.05	0.1	0.5
1	0.99518+0.00009i	0.99519+0.00047i	0.99522+0.00094i	0.99628+0.00475i
1.5	0.99786-0.0002i	0.99806-0.00098i	0.9983-0.00196i	1.0001-0.00987i

Заключение. В настоящей работе исследовано влияние вязкости материала покрытия, а также других параметров задачи на существование и характер распространения поверхностных сдвиговых волн в полупространстве. Полученно дисперсионное уравнение задачи. Условие существования поверхностной волны установлено в виде неравенства относительно параметров задачи. В случае длинноволнового приближения показано, что вязкость материала покрытия приводит к усилению затухания амплитуды поверхностной волны по глубине полупространства.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА и БРФФИ *(РБ)* в рамках совместных научных программ «Հ Բ 16-47».

[1]Институт механики НАН РА
[2]Ереванский государственный университет
e-mail:vas@ysu.am

В. М. Белубекян, С.В. Саркисян

Задача Лява для полупространства с вязкоупругим покрытием

Рассматриваются условия существования и характер распространения вязкоупругих сдвиговых поверхностных волн в упругом полупространстве с вязкоупругим покрытием. Исследуется влияние параметров задачи, в том числе вязкости покрытия, на распространение поверхностной волны.

Վ. Մ. Բելուբեկյան, Ս. Վ. Սարգսյան

Լյավի խնդիրը առաձգամածուցիկ ծածկույթով կիսատարածության համար

Դիտարկվում են առաձգամածուցիկ սահքային մակերևութային ալիքների տարածման գոյության պայմանները և բնույթը առաձգամածուցիկ ծածկույթով առաձգական կիսատարածությունում: Հետազոտվել է խնդրի պարամետրերի, ներառյալ ծածկույթի մածուցիկության, ազդեցությունը մակերևութային ալիքների տարածման վրա:

V. M. Belubekyan, S. V. Sarkisyan

Love Problem for a Half-Space with a Viscoelastic Coating

The existence conditions and the nature of propagation of viscoelastic shear surface waves are considered in an elastic half-space with a viscoelastic coating. The influence of the parameters of the problem, including the viscosity of the coating, on the propagation of the surface wave is investigated.

Литература

1. *Бирюков С. В, Гуляев Ю. В., Крылов В. В., Плесский В. П.* Поверхностные акустические волны в неоднородных средах. М. Наука, Физматлит. 1991. 416 с.
2. *Болотин В. В., Новичков Ю. Н.* Механика многослойных конструкций. М. Машиностроение. 1980. 376 с.

3. *Аветисян А. С., Камалян А. А.* – ДНАН Армении. 2014. Т. 114. №2. С. 108-115.
4. *Белубекян М. В., Белубекян В. М.* – Уч. записки ЕГУ. Сер. физика и математика. 2013. Вып. 3. С. 45–48.
5. *Белубекян М. В., Гаспарян А. Е.* – Изв. АН АрмССР. Механика. 1981. Т. 34. № 6. С. 27-35.
6. *Белубекян М. В., Геворкян А. Е.* – Мат. методы и физ.-мех. поля. 1983. № 18. С. 55-57.
7. *Гуляев Ю. В., Плесский В. П.* – Успехи физ. наук. 1989. Т. 157. №1. С. 85–127
8. *Даноян З. Н., Атоян Л. А., Саакян С. Л., Даноян Н. З* – Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т. 67. №4. С. 21-28.
9. *Даноян З. Н., Казарян К. Б., Атоян Л. А., Даноян Н. З.* – Изв. НАН Армении. Механика. 2013. Т. 66. №4. С. 29-37.
10. *Gasparyan D. K, Ghazaryan K. B.* – Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia. Mechanics. 2015.V. 68. №1. P. 57–65.
11. *Sarkisyan S. V., Jilavyan S. H., Khurshudyan As. Zh.* – Mechanics of Composite Materials. 2015. V. 51. №3, July. (Russian Original. 2015. V. 51 № 3, May-June). P. 277-284.
12. *Bernard C., Destrade M., Maugin G.*– European J. of Mechanics. A/Solids. 2006. V. 25. P. 695-706.
13. *Li Peng, Feng Jin*. – Smart Mater. Struct. 2012. V. 21. 045009 (9pp).
14. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин:прочность, устойчивость и колебания. М. Наука. 1987. 360 с
15. *Лойцянский Л. Г.* Ламинарный пограничный слой. М. Гос. изд-во физ.-мат. лит. 1962. 479 с.
16. *Белубекян М. В.* В сб.: Актуальные проблемы неоднородной механики. Изд-во ЕГУ. 1991. С. 66-71.
17. *Белубекян М. В.* – Изв. НАН Армении. Механика. 1991. Т. 44. №3 С. 7-10.
18. *Новацкий В.* Теория упругости. М. Мир. 1975. 256 с.
19. *Ватулян А. О., Юров В.О.* – Изв. РАН. МТТ. 2016. №5. С. 85-93.
20. *Можаровский В. В., Старжинский В. Е.* Прикладная механика слоистых тел из композитов: плоские контактные задачи. Минск. Наука и техника. 1988. 270 с.