ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 118 2018 № 1

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 510.64

С. М. Саядян, А. А. Чубарян

О свойстве немонотонности некоторых систем выводов классического исчисления высказываний

(Представлено чл.-кор. НАН РА И. Д. Заславским 19/I 2018)

Ключевые слова: *минимальная тавтология; «слабые» системы выводов; сложностные характеристики выводов; монотонные системы.*

1. Введение. В теории сложностей выводов важную роль играют минимальные тавтологии, т.е. тавтологии, которые не являются результатом подстановки в более короткие тавтологии. Традиционно считается, что минимальные тавтологии не могут выводится сложнее результатов подстановок в них, т.е. должна быть некоторая «естественная монотонность» выводов. Однако оказалось, что многие «строгие» пропозициональные системы выводов двузначных и многозначных логик не монотонны ни по шагам, ни по длине выводов [1, 2]. В настоящей работе для некоторых «слабых» систем выводов двузначной логики исследованы соотношения между сложностями выводов минимальных тавтологий и результатов подстановок в них. Показано, что существует последовательность пар минимальных тавтологий φ_n и формул ψ_n, являющихся результатом подстановок в φ_n таких, что: 1) длины φ_n и ψ_n по порядку равны, 2) для каждого n количество шагов выводов ψ_n ограничено константой, длины тех же выводов в двух системах ограничены константой, а в третьей ограничены линейной функцией от длины формул, в то время как 3) и количество шагов, и длины выводов φ_n во всех системах по порядку не менее экспоненты от длины формул.

2. Предварительные понятия. Для представления основных результатов напомним некоторые понятия и обозначения, введенные в [3]. Мы пользуемся общепринятыми понятиями единичного n-мерного булева куба B^n, пропозициональной формулы, тавтологии. Длина формулы φ определяется как количество всех вхождений в нее пропозициональных переменных. Литералом считается переменная или ее отрицание. Конъюнкт K может быть представлен как множество литералов, причем это множество не может содержать переменную и ее отрицание одновременно.

Для произвольной формулы ψ следующие тривиальные эквивалентности называются ***правилами замещения***:

$0\&\psi=0,\qquad \psi\&0=0,\qquad 1\&\psi=\psi,\qquad \psi\&1=\psi,$

$0\vee\psi=\psi,\qquad \psi\vee 0=\psi,\qquad 1\vee\psi=1,\qquad \psi\vee 1=1,$

$0\supset\psi=1,\qquad \psi\supset 0=\overline{\psi},\qquad 1\supset\psi=\psi,\qquad \psi\supset 1=1.$

$\overline{0}=1,\qquad \overline{1}=0,\qquad \overline{\overline{\psi}}=1,$

Применение правил замещения к некоторому слову заключается в замене какого-либо его подслова, имеющего вид левой части одного из указанных эквивалентностей, правой частью.

Пусть φ – пропозициональная формула, $P=\{p_1,p_2\ldots,p_n\}$ – множество всех ее переменных, а $P'=\{p_{i_1},p_{i_2}\ldots,p_{i_m}\}(1\le m\le n)$ – некоторое подмножество P.

Определение 2.1. Для некоторого $\sigma=\{\sigma_1,\sigma_2\ldots,\sigma_m\}\in B^m$ конъюнкт $K^\sigma=\{p_{i_1}^{\sigma_1},p_{i_2}^{\sigma_2},\ldots,p_{i_m}^{\sigma_m}\}$ называется φ-определяющим, если, подставляя в φ вместо каждой переменной p_{ij} значение $\sigma_j\,(1\le j\le m)$ и последовательно применяя правила замещения, получаем значение формулы φ (0 или 1) вне зависимости от значений остальных переменных.

Определение 2.2. Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) $D=\{K_1,K_2,\ldots,K_r\}$ называется φ-определяющей для формулы φ, если каждый конъюнкт из D является $\varphi-1$-определяющим и $\varphi=D$.

Определяющую ДНФ будем обозначать через оДНФ.

2.1. Описания рассматриваемых систем. В [3] описана следующая система доказательств ***E***. Аксиомы системы ***E*** не фиксируются. Для каждой формулы φ в качестве аксиом берутся конъюнкты из некоторой оДНФ. ***Элиминационное правило*** вывода (э-правило) выводит конъюнкт $K'\cup K''$ из конъюктов $K'\cup\{p\}$ и $K''\cup\{\neg p\}$ для произвольной пропозициональной переменной p. *E*-выводом называется такая конечная последовательность конъюнктов, каждый из которых или является одной из зафиксированных аксиом, или получается из предыдуших по э-правилу.

Очевидно, что ДНФ $D=\{K_1,K_2,\ldots,K_l\}$ является тавтологией, если, применяя э-правило, можно вывести пустой конъюнкт $(\varnothing)$ из аксиом $\{K_1,K_2,\ldots,K_l\}$.

Известная пропозициональная система резолюций ***R*** направлена на установление тавтологичности заданной формулы путем установления противоречивости некоторой системы дизъюнктов, строящейся по заданной формуле. Г.С. Цейтиным в [4] описан метод построения соответствующей системы дизъюнктов для произвольной формулы φ. Аксиомы системы ***R*** не фиксируются. Для каждой формулы φ в качестве аксиом берутся дизъюнкты из построенной упомянутым способом системы. ***Правило резолюции*** (р-правило) выводит дизъюнкт $D'\cup D''$ из дизъюнктов

$D' \cup \{p\}$ и $D'' \cup \{\neg p\}$ для произвольной пропозициональной переменной p. Если, применяя правило вывода к дизъюнктам построенной по φ системе, а также ко вновь полученным дизъюнктам, мы в конце концов получим пустой дизъюнкт Λ, то формула φ является тавтологией.

Система обобщенных расщеплений ***OP*** введена в [5]. Обобщенный метод расщеплений (о.м.р.) позволяет каждой формуле φ сопоставить некоторое помеченное бинарное дерево расщепления (д.р.), корню которого приписана сама формула φ, конечным узлам приписаны значения 0 или 1, а сыновьям каждого узла v, которому приписана некоторая формула φ_v, приписаны результаты расщепления φ_v по некоторой переменной p, входящей в φ_v следующим образом: при расщеплении тавтологии φ по литералу α делаем пометку α на ребре, ведущем от узла с пометкой φ к узлу с пометкой $\varphi[\alpha]$, где формула $\varphi[\alpha]$ строится по φ следующим образом: если $\alpha = p(\alpha = \overline{p})$, то всюду в φ вместо переменной p подставляем значение $1(0)$ и применяем правила замещения или до получения формулы, не содержащей константы, или до получения константы. Естественно, что меняя порядок переменных, по которым производится расщепление, можно получать различные д.р. Очевидно также, что тавтологиям соответствуют деревья, конечным узлам которых приписаны только единицы. Соответствующая система, основанная на о.м.р. с одной аксиомой-тавтологией -1 и одним правилом вывода $\varphi[p]$, $\varphi[\overline{p}] \| -\varphi$, обозначена через ***OP***.

2. 2. Сложностные характеристики выводов. Основными сложностными характеристиками выводов являются: *t*-сложность, определяемая как количество различных формул в выводе, и *l*-сложность, определяемая как сумма длин всех различных формул в выводе [2]. Пусть ϕ является некоторой системой выводов, а φ – некоторая тавтология. Через $t^{\phi}(\varphi)$ $\left(l^{\phi}(\varphi)\right)$ обозначим минимально возможное значение *t*-сложности (*l-сложности*) всевозможных выводов тавтологии φ в системе ϕ. Если система ϕ зафиксирована, то будем обозначать просто $t(\varphi)\left(l(\varphi)\right)$.

Определение 2.2.1. Тавтология называется ***минимальной,*** если она не может быть получена подстановкой из более короткой тавтологии.

Обозначим через $S(\varphi)$ множество всех формул, являющихся результатом подстановки в минимальную тавтологию φ.

Определение 2.2.2. Система выводов называется ***t-монотонной (l-монотонной)***, если для каждой минимальной тавтологии φ и для каждой формулы ψ из $S(\varphi)$ $t^{\phi}(\varphi) \le t^{\phi}(\psi)\left(l^{\phi}(\varphi) \le l^{\phi}(\psi)\right)$.

2.3. Важные формулы. В дальнейших рассмотрениях важную роль играют тавтологии $TTM_{n,m} = V_{(\sigma_1,\dots,\sigma_n)\in E^n} \mathop{\&}\limits_{j=1}^{m} \mathop{V}\limits_{i=1}^{n} p_{ij}^{\sigma_i}$ $\left(n \ge 1, 1 \le m \le 2^n - 1\right)$.

Пусть $A_n = TTM_{n,2^n-1}$. Заметим, что длина формулы A_n есть $n2^n\left(2^n-1\right)$, а в [3] и [5] доказано, что в системах ***E, R*** и ***OP*** $l\left(A_n\right) \geq t\left(A_n\right) \geq 2^{2^n-1}$.

3. Основные результаты. В качестве исследуемых здесь последовательностей формул зафиксируем тавтологии: $\varphi_n = p \supset q \vee A_n$ и $\psi_n = p \supset \left(p \supset p\right) \vee A_n$. Нетрудно убедиться, что для каждого $n \geq 1$ формула φ_n является минимальной тавтологией и $\psi_n \in S\left(\varphi_n\right)$.

Лемма 3.1. *Для любого* $n \geq 1$ *в каждой из систем* ***E, R*** *и* ***OP***

$$l\left(\varphi_n\right) \geq t\left(\varphi_n\right) \geq 2^{2^n-1}.$$

Доказательство. Учитывая, что каждая оДНФ формул φ_n получается объединением множества $\{\neg p, q\}$ с некоторой оДНФ формул A_n, а переменные p и q не входят в формулу A_n, а значит не входят ни в одну оДНФ формулы A_n, получаем, что количество различных формул в выводе $\varnothing$ из оДНФ формулы φ_n не может быть меньше количества различных формул в выводе $\varnothing$ из оДНФ формулы A_n. Для оценки сложностных характеристик выводов каждой из формул φ_n в системе резолюций допустим, что подформуле A_n приписана переменная γ, подформуле $q \vee A_n$ – переменная α, а самой формуле φ_n – переменная β, тогда система дизъюнктов формулы φ_n должна состоять из системы Σ дизъюнктов формулы A_n и из дизъюнктов $\gamma q \neg\alpha$, $\neg\gamma\alpha$, $\neg q\alpha$, $p\beta$, $\neg\alpha\beta$, $\neg\beta\neg p\alpha$ и $\neg\beta$. Если переменной γ придать значение 0, то нетрудно убедиться, что можно подобрать значения остальных переменных α, β, ϕ и p таким образом, что все семь указанных дизъюнктов примут значение 1, а значит из системы Σ должен быть выведен дизъюнкт γ, после чего, используя дизъюнкты $\neg\gamma\alpha$, $\neg\alpha\beta$ и $\neg\beta$, можно вывести Λ. В [3] показано, что любой вывод Λ из системы дизъюнктов, построенных по методу Цейтина для тавтологии, которой приписана переменная γ, может быть преобразован без увеличения количества шагов и длины таким образом, чтобы правило резолюции с использованием дизъюнкта $\neg\gamma$ было последним. Таким образом, количество различных формул в опровержении формулы φ_n в системе ***R*** не может быть меньше количества различных формул в опровержении формулы A_n.

Рассмотрим вывод формулы φ_n в системе ***OP.*** Если начать расщепление с переменной p, то на выходящих узлах получим 1 и $q \vee A_n$, далее, расщепляя последнюю формулу по переменой q, получим на выходящих узлах 1 и A_n. Если сначала расщеплять по переменой q, затем по переменной p, мы получим сначала 1 и $p \supset A_n$, затем 1 и A_n. Если же начать расщепление с переменных формулы A_n, быть может иногда перемежая расщеплениями по p или q, то мы получим не менее 2^{2_n-1} указанных в [5] различных формул F, быть может, «обрамленных» одним из следующих видов: $p \supset q \vee F$, $p \supset F$ или $q \vee F$. Таким образом, количество различных формул в д.р. формулы φ_n не может быть меньше количества различных формул в д.р. формулы A_n.

Лемма 3.2. *а) Для любого* $n \geq 1$ *в каждой из систем* ***E, R*** *и* ***OP*** $t(\psi_n)$ *ограничено некоторой константой. б) Для любого* $n \geq 1$ *в каждой из систем* ***E*** *и* ***R*** $l(\psi_n)$ *ограничено некоторой константой, а* $l^{OP}(\psi_n) = |\psi_n| + 1$.

Доказательство. Утверждения для системы ***E*** очевидны, так как одной из оДНФ формулы ψ_n является $\{p, \neg p\}$. Утверждения для системы ***OP*** также очевидны, так как расщепляя по переменной p, мы сразу получим две единицы и в д.р. будут только две различные формулы: сама ψ_n и 1. Утверждения для системы ***R*** также нетрудно доказать, так как если подформулам A_n, $(p \supset p)$, $(p \supset p) \vee A_n$ и самой формуле $p \supset (p \supset p) \vee A_n$ приписать соответственно переменные β, α, γ и q, то в соответствующей системе дизъюнктов будут, в частности, $p\alpha$, $\neg p\alpha$, $\neg\gamma q$, $\neg q$ и $\neg\alpha\gamma$. Из первых двух можно вывести α, из двух следующих – $\neg\gamma$, используя которое с последним, можно вывести $\neg\alpha$ и далее Λ.

Теорема. *Ни одна из систем* ***E, R*** *и* ***OP*** *не является ни* ***t-монотонной,*** *ни* ***l-монотонной.***

Доказательство следует из утверждений лемм 1 и 2 и оценок из [3, 5], указанных непосредственно перед пунктом 3. Действительно, в каждой из систем ***E, R*** и ***OP*** $l(\varphi_n) \geq t(\varphi_n) = \Omega\left(2^{2^n}\right)$, а $t(\psi_n) = O(1)$. В каждой из систем ***E*** и $l(\psi_n) = O(1)$, а $l^{OP}(\psi_n) = O\left(n2^{2n}\right)$.

Ереванский государственный университет
e-mails: sayadyan@gmail.com, achubaryan@ysu.am

С. М. Саядян, А. А. Чубарян

О свойстве немонотонности некоторых систем выводов классического исчисления высказываний

Для некоторых «слабых» пропозициональных систем выводов классической логики доказано, что минимальные тавтологии могут выводиться гораздо сложнее, чем результаты подстановок в них.

Ս. Մ. Սայադյան, Ա. Ա. Չուբարյան

Դասական տրամաբանության ասույթային հաշվի որոշ համակարգերի ոչ մոնոտոնիկ հատկության մասին

Ապացուցվել է, որ դասական ասույթային հաշվի որոշ «թույլ» համակարգերում մինիմալ նույնաբանությունները կարող են ունենալ էապես ավելի բարդ արտածում-ներ, քան նրանցից ստացված տեղադրման արդյունքները:

S. M. Sayadyan, A. A. Chubaryan

On Some no Monotonous Property of Some Propositional Proof Systems of Classical Logic

For some "weak" propositional systems of classical logic it is proved that minimal tautologies can be deduced essentially harder, than results of substitutions in them.

Литература

1. *Chubaryan A., Petrosyan G.* Evolutio, Естественные науки. Вып 3, 2016, P.12-14.
2. *Chubaryan A., Khamisyan A., Petrosyan G.* On some systems for two versions of many-valued logics and its properties, Lambert Academic Publishing (LAP), 2017, 80 pages.
3. *Чубарян А.* – Изв. НАН РА. Математика. 2002. Т. 37. N 5. С. 71-84.
4. *Цейтин Г.* – Записки научных семинаров ЛОМИ. Т. 8. Л. Наука. 1968. С. 234-259.
5. *Чубарян Ан., Чубарян Арм.* – НАУ. Отечественная наука в эпоху изменений: постулаты прошлого и теории нового времени. Ч. 10. 2(7). 2015. С.11-14.