ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր
Том 118 2018 № 1
Volume

МАТЕМАТИКА

УДК 517.946

С. О. Абелян

Об эффективном решении задачи Дирихле в единичном круге

(Представлено академиком В. С. Захаряном 25/XI 2017)

Ключевые слова: *дефектные числа, нетривиальные решения однородной задачи Дирихле, правильно эллиптическое уравнение.*

Пусть $D = \{z = x + iy : |z| = r < 1\}$ – единичный круг, а $\Gamma = \partial D$. В области D рассмотрим правильно эллиптическое уравнение шестого порядка

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \mu\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial z} - \nu\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^3 u = 0. \qquad (1)$$

Здесь $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ – операторы комплексного дифференцирования, а ν, μ – постоянные числа такие, что $\mu\nu \neq 0$, $0 < |\nu| < 1$, $0 < |\mu| < 1$. Предполагается, что искомое решение u шесть раз непрерывно дифференцируемо в D и вместе с производными до второго порядка удовлетворяет условию Гельдера вплоть до границы, т.е. $u \in C^{(2,\alpha)}\left(\bar{D}\right)$. Для уравнения (1) рассмотрим задачу Дирихле в классической постановке. На границе $\Gamma = \partial D$ неизвестная функция u удовлетворяет условиям Дирихле

$$u|_\Gamma = f_0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_\Gamma = f_1, \quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right|_\Gamma = f_2. \qquad (2)$$

Здесь заданные функции f_j принадлежат классу $C^{(2-j,\alpha)}(\Gamma)$. В [1] было доказано, что условия (2) эквивалентны условиям

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial z^{2-j}\partial \bar{z}^j}\right|_\Gamma = F_j, \qquad j = 0,1,2,$$
$$u(1,0) = f_0(1,0), \quad u_r = f_1(1,0), \quad u_\theta = f_{0\theta}(1,0). \qquad (3)$$

Здесь $F_k \in C^{(\alpha)}(\Gamma)$ – заданные функции, однозначно определяемые по функциям f_0, f_1, f_2.

Рассмотрим задачу (1), (3). Как известно (см. [2, 3]), задача (1), (3) фредгольмова. Целью работы является определение дефектных чисел этой задачи, т.е. количество линейно независимых решений однородной задачи Дирихле и количество линейно независимых условий на граничные функции, необходимых и достаточных для разрешимости неоднородной задачи Дирихле. Случай двукратных корней для уравнения типа (1) четвертого порядка был рассмотрен в [4].

Доказывается следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $\zeta = \mu\nu$. *Тогда задача Дирихле (1), (3) однозначно разрешима, если*

$$Q_n(\zeta) = \sum_{k=0}^{n-3}(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)\zeta^k +$$

$$+\sum_{k=0}^{n-4}(n-k-3)(n-k-2)(n-k-1)\left(n^2+11n+8nk+k^2-k\right)\zeta^{n-2+k} \neq 0,\ n=4,5\ldots,\quad (4)$$

Если условия (4) не выполняются при некотором n_0, *то однородная задача (1), (3) имеет нетривиальное решение, которое является полиномом порядка* n_0+2. *При этом для разрешимости соответствующей неоднородной задачи необходимо одно линейно независимое условие на граничные функции* f_j. *Поэтому дефектные числа задачи (1), (3) равны числу параметров* $n \geq 4$, *для которых* $Q_n(\zeta)=0$.

Доказательство. В [1] показано, что общее решение уравнения (1) представляется в виде

$$u(z,\bar z) = \Phi_1(z) + \sum_{k=2}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^{k-2}\Phi_k(z+\mu\bar z) + \sum_{k=0}^{2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^{k}\Psi_{k+1}(\bar z+\nu z), \qquad (5)$$

где Φ_j, Ψ_j – искомые функции. Функция Φ_1 аналитична в D, а Φ_j $(j=2,3)$ и Ψ_k $(k=1,2,3)$ аналитичны в областях $D_1(\mu)=\{z+\mu\bar z \mid z\in D\}$ и $D_2(\nu)=\{\bar z+\nu z \mid z\in D\}$ соответственно, $\dfrac{\partial}{\partial\theta}$ – производная по аргументу комплексного числа ($z=re^{i\theta}$). Подставим функцию (5) в граничные равенства (3).

Используя операторное тождество [1]

$$\frac{\partial^{k+m}}{\partial z^k\partial\bar z^m}\frac{\partial^l}{\partial\theta^l} = \left(\frac{\partial}{\partial\theta}+(k-m)iI\right)^l\frac{\partial^{k+m}}{\partial z^k\partial\bar z^m},$$

получим при $j=0$

$$\Phi_1''(z)+\sum_{k=2}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+2iI\right)^{k-2}\Phi_k''(z+\mu\bar z)+\sum_{k=0}^{2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+2iI\right)^{k}\Psi_{k+1}''(\bar z+\nu z)\nu^2 = F_0;\ (6)$$

при $j=1,2$

$$\sum_{k=2}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+(2-2j)iI\right)^{k-2}\Phi_k''(z+\mu\overline{z})\mu^j+\sum_{k=0}^{2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+(2-2j)iI\right)^{k}\Psi_{k+1}''(\overline{z}+\nu z)\nu^{2-j}=F_j. \quad (7)$$

Представим Φ_j'' и Ψ_j'' на окружности Γ, используя представление, полученное в [2]:

$$\Phi_1''(z)=\sum_{k=0}^{\infty}A_{1k}z^k,\ \Phi_j''(z+\mu\overline{z})=\varphi_j(z)+\varphi_j(\mu\overline{z})=\sum_{k=0}^{\infty}A_{jk}z^k+\sum_{k=0}^{\infty}A_{jk}\mu^k z^{-k},\quad j=2,3$$

$$\Psi_j''(\overline{z}+\nu z)=\psi_j(\overline{z})+\psi_j(\nu z)=\sum_{k=0}^{\infty}B_{jk}z^{-k}+\sum_{k=0}^{\infty}B_{jk}\nu^k z^k,\qquad j=1,2,3. \quad (8)$$

Так как подлежащие определению функции φ_j, ψ_j и Φ_1'' аналитичны в круге D, то они определяются своими коэффициентами Тейлора A_{jk} и B_{jk}. Разложим функции F_0, F_1, F_2 на окружности Γ в ряд Фурье

$$F_j(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}d_{kj}z^k,\qquad j=0,1,2 \quad (9)$$

и для определения коэффициентов Тейлора A_{jk} и B_{jk} подставим разложения (8) и (9) в граничные условия (3).

При $j=0$ получим

$$\sum_{k=0}^{\infty}A_{1k}z^k+\sum_{l=2}^{3}\left(\sum_{k=0}^{\infty}A_{1k}(ik+2i)^{l-2}z^k+\sum_{k=0}^{\infty}A_{1k}\mu^k(-ik+2i)^{l-2}z^{-k}\right)+$$
$$+\sum_{l=1}^{3}\left(\sum_{k=0}^{\infty}B_{lk}(-ik+2i)^{l-1}z^{-k}\nu^2+\sum_{k=0}^{\infty}B_{lk}(ik+2i)^{l-1}\nu^{2+k}z^k\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}d_{k0}z^k,$$

а при $j=1,2$ имеем

$$\sum_{l=2}^{3}\left(\sum_{k=0}^{\infty}A_{lk}\left(ik+(2-2j)i\right)^{l-2}\mu^j z^k+\sum_{k=0}^{\infty}A_{lk}\left(-ik+(2-2j)i\right)^{l-2}\mu^{j+k}z^{-k}\right)+$$
$$+\sum_{l=1}^{3}\left(\sum_{k=0}^{\infty}B_{lk}\left(-ik+(2-2j)i\right)^{l-1}z^{-k}\nu^{2-j}+\sum_{k=0}^{\infty}B_{lk}\left(ik+(2-2j)i\right)^{l-1}\nu^{2-j+k}z^k\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}d_{kj}z^k.$$

Приравняем коэффициенты при соответствующих степенях z и $\overline{z}$. Получим системы для определения неизвестных A_{jk} и B_{jk}. При $k\ge 1$ получим систему пяти уравнений относительно неизвестных A_{2k}, A_{3k}, B_{jk}, $j=1,2,3$:

$$A_{2k}\mu^{k+2}+A_{3k}\mu^{k+2}(-ik-2i)+B_{1k}+B_{2k}(-ik-2i)+B_{3k}(-ik-2i)^2=d_{-k2},$$
$$A_{2k}\mu^{k+1}+A_{3k}\mu^{k+1}(-ik)+\nu B_{1k}+B_{2k}(-ik)\nu+B_{3k}\nu(-ik)^2=d_{-k1},$$
$$A_{2k}\mu^{k}+A_{3k}\mu^{k}(-ik+2i)+\nu^2 B_{1k}+B_{2k}(-ik+2i)\nu^2+B_{3k}(-ik+2i)^2\nu^2=d_{-k0}, \quad (10)$$
$$A_{2k}\mu^{2}+A_{3k}\mu^{2}(ik-2i)+\nu^k B_{1k}+B_{2k}(ik-2i)\nu^k+B_{3k}(ik-2i)^2\nu^k=d_{k2},$$
$$A_{2k}\mu+A_{3k}\mu ik+\nu^{k+1}B_{1k}+B_{2k}ik\nu^{k+1}+B_{3k}(ik)^2\nu^{k+1}=d_{k1}.$$

Рассмотрим детерминант этой системы

$$\Omega_k = \begin{vmatrix} \mu & ik\mu & \nu^{k+1} & ik\nu^{k+1} & (ik)^2 \nu^{k+1} \\ \mu^2 & \mu^2(ik-2i) & \nu^k & (ik-2i)\nu^k & (ik-2i)^2 \nu^k \\ \mu^k & \mu^k(-ik+2i) & \nu^2 & (-ik+2i)\nu^2 & (-ik+2i)^2 \nu^2 \\ \mu^{k+1} & \mu^{k+1}(-ik) & \nu & -ik\nu & (-ik)^2 \nu \\ \mu^{k+2} & \mu^{k+2}(-ik-2i) & 1 & -ik-2i & (-ik-2i)^2 \end{vmatrix}$$

После преобразований получим

$$\Omega_k = 8(\zeta-1)^6 \zeta^3 Q_k(\zeta).$$

Предположим, что выполнены условия (4). В этом случае коэффициенты A_{2k}, A_{3k} и B_{jk} при $k \geq 3$ определены однозначно. Для $k = 0,1,2$ соответствующие коэффициенты могут быть найдены для произвольных граничных функций, но не однозначно, после чего из (6) определяем Φ_1''. Следовательно, в этом случае решение неоднородной задачи (1),(3) существует, а решение соответствующей однородной задачи является многочленом порядка не более четырёх. Однако из однородных условий (2) следует, что ненулевое решение однородной задачи (1), (3) необходимо делится на $(1-z\bar{z})^3$ (см. [5], т.5.1, с.84), т.е. является многочленом порядка не менее шести. Поэтому задача (1),(3) однозначно разрешима. И, наконец, учитывая, что $\Omega_k \to -4i\mu^2\nu^3(1-2i) \neq 0$ для $k \to \infty$, мы видим, что коэффициенты A_{jk} и B_{jk} имеют такую же скорость роста в бесконечности, как d_{jk}, поэтому функции Φ_{jk}'', Ψ_{jk}'' удовлетворяют условию Гёльдера в замкнутом круге D. Это означает, что решение u задачи (1), (3) принадлежит заданному классу $C^{(2,\alpha)}(\bar{D})$. Первая часть теоремы доказана.

Предположим, что $Q_n(\zeta) = 0$. В этом случае однородная система (10) будет иметь нетривиальное решение, поэтому функция, построенная по этим коэффициентам, представляет собой нетривиальное решение задачи (1), (3).

Например, если $Q_4(\zeta) = 0$, то $\zeta = \frac{1}{3}\left(-3+\sqrt{6}\right)$. В этом случае $c\left(1-z\bar{z}\right)^3$ будет нетривиальным решеним однородной задачи. При этом для того, чтобы неоднородная система (10) имела решение, необходимо, чтобы правая часть удовлетворяла одному условию разрешимости:

$$\frac{6-\sqrt{6}}{\mu^2}\int_{-\pi}^{\pi} F_0(\theta) e^{-4i\theta} d\theta + \int_{-\pi}^{\pi} F_1(\theta)\left(\frac{-3\sqrt{6}}{\mu^5} e^{4i\theta} - \frac{3\sqrt{6}-6}{\mu} e^{-4i\theta}\right) d\theta +$$
$$+\int_{-\pi}^{\pi} F_2(\theta)\left(3e^{-4i\theta} + \frac{8\sqrt{6}-3}{\mu^4} e^{-4i\theta}\right) d\theta = 0.$$

Национальный политехнический университет Армении

С. О. Абелян

Об эффективном решении задачи Дирихле в единичном круге

Рассматривается задача Дирихле в единичном круге для правильно эллиптического уравнения шестого порядка. Предполагается, что характеристическое уравнение имеет три различных корня: один простой корень – мнимая единица, один двукратный корень с положительной мнимой частью и один трехкратный корень с отрицательной мнимой частью. Получена новая формула для определения дефектных чисел. Условия разрешимости и решения однородной задачи определяются в явном виде.

Ս. Հ. Աբելյան

Դիրիխլեի խնդրի արդյունավետ լուծումը միավոր շրջանում

Դիտարկվում է Դիրիխլեի խնդիրը միավոր շրջանում վեցերորդ կարգի ճշգրիտ էլիպսական հավասարման համար: Ենթադրվում է, որ բնութագրիչ հավասարումն ունի երեք տարբեր արմատներ, որոնցից մեկը կեղծ միավոր է, երկրորդը կրկնակի արմատ է դրական կեղծ մասով, իսկ երրորդը՝ եռապատիկ արմատ՝ բացասական կեղծ մասով: Ստացվել է նոր բանաձև՝ դեֆեկտային թվերը որոշելու համար: Համասեռ խնդրի լուծումը և լուծելիության պայմանները որոշվում են արդյունավետ:

S. H. Abelyan

On the Effective Solution of the Dirichlet Problem in the Unit Disk

In the paper the Dirichlet problem in a unit disc for a sixth order properly elliptic equation is considered. It is supposed that the characteristic equation has three different roots. One simple root is an imaginary unit, one double root with a positive imaginary part and one triple root with a negative imaginary part. A new formula for determining defective numbers is obtained. The conditions for the solvability and solution of the homogeneous problem are determined in explicit form.

Литература

1. *Babayan A. H.* – Mathematica Montisnigri. 2015. V. 32. P. 66-80.
2. *Tovmasyan N. E.* Non-Regular Differential Equations and Calculations of Electromagnetic Fields. World Scientific Publishing Co.Ltd. Singapore, London. Hong-Kong. 1998.
3. *Lions J.-L., Magenes E.* Problèmes aux limites non homogènes et applications. V. 1. Dunod. Paris. 1968.
4. *Бабаян А.О.* – Изв. НАН Армении. Математика. 2003. Т. 38 №6. С.39-48.
5. *Axler S., Bourdon P., Ramay W.* Harmonic Function Theory, Springer-Verlag.Inc, New York, 2001.