ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 118 2018 № 1

МАТЕМАТИКА

УДК 517.53

Академик В. С. Захарян, С. Л. Берберян

О хордальных пределах потенциалов типа Грина

(Представлено 17/XII 2017)

Ключевые слова: *хордальные пределы, потенциал типа Грина, β-емкость множеств.*

Граничному поведению потенциалов типа Грина, введенных М. М. Джрбашяном (см.[1]), посвящены многочисленные работы. Отметим только часть из них [1-6]. Для дальнейшего изложения приведем некоторые обозначения и определения.

Пусть $f(x)$ – произвольная функция из класса $L(0,l)$, где $0<l<+\infty$. Интегралом от $f(x)$ порядка α $\left(0<\alpha<+\infty\right)$ с началом в точке $x=0$ принято называть функцию $D^{-\alpha}f(x)\equiv\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}f(t)dt$, $x\in(0,l)$. Если $f(x)\in L(0,l)$, то при любом α $\left(0<\alpha<+\infty\right)$ функция $D^{-\alpha}f(x)$ определена почти всюду на $(0,l)$ и принадлежит классу $L(0,l)$. При $\alpha=0$ принимают $D^0 f(x)=f(x)$. Рассмотрим при $z,\xi\in D$ функцию, введённую М. М. Джрбашяном (см.[1]) при построении им теории факторизации мероморфных в единичном круге D функций:

$$A_\alpha(z;a)=(1-\frac{z}{a})\exp\{-W_\alpha(z;a)\}, \text{ где } -1<\alpha<\infty$$

и

$$W_\alpha(z;a)=\int_{|\alpha|}^1\frac{(1-x)^\alpha}{x}dx-\sum_{k=1}^\infty\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)}\cdot$$

$$.\{a^{-k^{|\alpha|}}\int_0^{|\alpha|}(1-x)^\alpha x^{k-1}dx-a^{-k}\int_{|\alpha|}^1(1-x)^\alpha x^{-k-1}dx\}\cdot z^k.$$

Рассмотрим функцию $u_\alpha(z;a)=r^{-\alpha}D^{-\alpha}\log\left|A_\alpha(z;a)\right|$. Функцию $G_\alpha(z;a)=-u_\alpha(z;a)$ называют функцией типа Грина. При $\alpha=0$

$A_0(z;a)=\dfrac{a-z}{1-\bar{a}z}\cdot\dfrac{|a|}{a}$ и, следовательно, функция $G_0(z;a)=-\log\left|\dfrac{a-z}{1-\bar{a}z}\right|=$ $=\log\left|\dfrac{1-\bar{a}z}{z-a}\right|$ совпадает с обычной функцией Грина для круга D. Функция $\omega_\alpha(z)=\iint\limits_D G_\alpha(z;a)d\mu(a)$, где $-1<\alpha<+\infty$, называется потенциалом типа Грина. При $\alpha=0$ получаем классический потенциал Грина. Введём понятие ёмкости. Говорят (см.[7, 8]), что измеримое по Борелю множество E имеет положительную α-ёмкость, $0<\alpha<1$, если существует такая мера $\mu\prec E$, $\mu(E)=1$, для которой интеграл $V(e^{r,x})=\int\limits_E\dfrac{1}{\left|e^{i\theta}-re^{ix}\right|^\alpha}d\mu$ равномерно ограничен по x при $r\to1$. В случае отсутствия такой меры α-ёмкость множества E равна нулю. Обозначим α-ёмкость множества E через $cap_\alpha E$.

Сформулируем основной результат статьи.

Теорема 1. *Пусть* $\omega_\alpha(z)$ *– потенциал типа Грина, где* $\alpha\ge0$*, а неотрицательное распределение масс* $\mu(a)$ *удовлетворяет условию*

$$\Omega(r)=\iint\limits_{|a|<r}d\mu(a)=\mathrm{O}\left(\frac{1}{(1-r)^{\lambda+\alpha}}\right),\ \text{где}\ 0\le\lambda<1.$$

Тогда на Γ *можно указать такое множество E, где* $cap_\beta E=0$ *и* $\lambda<\beta<1$*, что для всех* $\xi\in\Gamma$*, кроме, быть может, множества E, для почти всех* $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ *у* $\omega_\alpha(z)$ *существуют хордальные пределы, равные нулю, т.е.* $\lim\limits_{\substack{z\to\xi\in\Gamma\setminus E\\ z\in h(\xi,\varphi)}}\omega_a(z)=0.$

Вычислительную часть доказательства выделим в виде леммы.

Лемма 1. *Пусть* $\omega_\alpha(z)$ *– потенциал типа Грина, где* $\alpha\ge0$*, а неотрицательное распределение масс* $\mu(a)$ *удовлетворяет условию*

$$\Omega(r)=\iint\limits_{|a|<r}d\mu(a)=\mathrm{O}\left(\frac{1}{(1-r)^{\lambda+\alpha}}\right),\ \text{где}\ 0\le\lambda<1.$$

Тогда на Γ *можно указать такое множество E, где cap E=0 и* $\lambda<\beta<1$*, что для всех* $\xi\in\Gamma\setminus E$*, для почти всех* $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ *справедлива оценка*

$$\omega_\alpha(z) \le \iint\limits_{\Delta^*_{\nu_0}} G_\alpha(z;a)\cdot d\mu(a) + \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \iint\limits_{\Delta_{\nu_0,\nu-1}} G_0(z;a)d\mu(a) +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \iint\limits_{\Delta_{\nu-1,\nu+2}} G_0(z;a)d\mu(a) + \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \iint\limits_{\Delta_{\nu+2}} G_0(z;a)d\mu(a) =$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

где $G_0(z;a) = \log\left|\frac{1-\bar{a}z}{z-a}\right|$ *– функция Грина для единичного круга* D, $\Delta_\nu = \left\{z : |z| < 1 \cap |z-1| < \frac{1}{2^\nu}\right\}$, $\Delta^*_{\nu_0}$ *– дополнение* Δ_{ν_0} *до единичного круга* D, *а* $\Delta_{\nu,\nu'} = \Delta_\nu - \Delta_{\nu'}$ *для любых натуральных значений, причем очевидно, что* $\nu < \nu'$.

Доказательство. В дальнейшем для доказательства воспользуемся оценкой

$$G_\alpha(z,a) \le \frac{(1-|a|)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \cdot G_0(z;a) \quad (0 \le \alpha < +\infty), \tag{1}$$

полученной Л. А. Сехпосяном (см.[9]). Обозначим через $d\sigma(a) = (1-|a|)^{1+\alpha} d\mu(a)$. Тогда

$$\iint\limits_{r\le|a|<1} d\sigma(a) = \int_r^1 (1-t)^{1+\alpha} d\Omega(t). \tag{2}$$

Принимая во внимание, что

$$\lim_{r\to 1}(1-r)^{1+\alpha}\Omega(r) \le (1-r)^{1+\alpha} \cdot \frac{const}{(1-r)^{\lambda+\alpha}} = 0$$

и

$$\int_r^1 \Omega(t)\cdot(1-t)^\alpha dt \le const \cdot \int_r^1 \frac{dt}{(1-t)^\lambda} = O\left((1-r)^{1-\lambda}\right),$$

из соотношения (2) получим

$$\iint\limits_{r\le|a|<1} d\sigma(a) = \mathrm{O}(1-r)^{1-\lambda}), \tag{3}$$

Обозначим $r_\nu = 1 - \frac{1}{2^\nu} (\nu = 1, 2, ...,)$. Тогда из (3) следует, что

$$\iint\limits_{r_\nu \le|a|<1} d\sigma(a) \le \frac{const}{2^{\nu(1-\lambda)}}. \tag{4}$$

Разделим круговое кольцо $r_\nu \le |z| < 1$ на 2^ν равных областей ω^I_ν, где $\omega^I_\nu : r_\nu \le |z| < 1$ и $\frac{2\pi}{2^\nu} I \le \arg z \le \frac{2\pi}{2^\nu}(I+1)$, $(I = 0, 1, 2, ..., 2^\nu - 1)$.

Тогда согласно (4) имеем, что

$$\sum_{I=0}^{2^\nu - 1} \sigma(\omega^I_\nu) \le \frac{const}{2^{\nu(1-\lambda)}}. \tag{5}$$

Пусть N – число из ω_ν^I, для которых $\sigma(\omega_\nu^I) \geq \frac{1}{2^{\nu(1+\delta)}}$, где $0<\delta<\beta-\lambda$. Из неравенства (5) следует, что

$$N \leq const \cdot \frac{2^{\nu(1+\delta)}}{2^{\nu(1-\lambda)}}.$$

Присоединим к каждой такой области ω_ν^I две смежные области $\omega_\nu^{I-1}, \omega_\nu^{I+1}$ и положим $\omega_\nu^{*I} = \omega_\nu^{I-1} \cup \omega_\nu^I \cup \omega_\nu^{I+1}$. Обозначим через $\gamma_{\nu I}$ дуги на Γ, соответствующие областям ω_ν^{*I} при фиксированных ν и I, а через F_ν^* – множество всех дуг на Γ, которое принадлежит границе $\{\omega_\varpi^{*I}\}$ при фиксированном ν. Положим $F^* = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_\nu^*$. Имеем оценку

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{I=1}^{N}\left|\gamma_{\nu I}\right|^{\beta} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{J=1}^{N}\left[3\cdot\left(\frac{2\pi}{2^\nu}(I+1)-\frac{2\pi}{2^\nu}I\right)\right]^{\beta} \leq \\ &\leq \sum_{\nu=1}^{\infty} 3^{\beta}\cdot\frac{(2\pi)^{\beta}}{2^{\nu\beta}}\cdot const\cdot\frac{2}{2^{\nu(-\lambda-\delta)}} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{const}{2^{\nu(\beta-\lambda-\delta)}} < +\infty. \end{aligned} \tag{6}$$

Последний ряд в (6) очевидно сходится, так как по предположению $\beta-\lambda-\delta>0$. Поэтому $\Lambda_\beta(F^*)=0$, и, следовательно, $cap_\beta(F^*)=0$.

Обозначим дополнение к F^* относительно Γ через F. Если $\xi = e^{i\theta} \in \Gamma$, то $\xi \in C(F_\nu^*)$, а значит, область $\omega_\nu(\theta)$, где

$$\omega_\nu(\theta): r_\gamma \leq |z| < 1,\ \theta - \frac{2\pi}{2^\nu} \leq \arg z \leq \theta + \frac{2\pi}{2^\nu},$$

содержится в объединении $\omega_\nu^I \cup \omega_\nu^{I+1}$, в которых

$$\sigma(\omega_\nu^I) \leq \frac{1}{2^{\nu(1+\delta)}},\ \sigma(\omega_\nu^{I+1}) \leq \frac{1}{2^{\nu(1+\delta)}}.$$

Поэтому

$$\sigma(\omega_\nu(\theta)) \leq \frac{2}{2^{\nu(1+\delta)}},\ (\text{где } \nu \geq \nu_0,\ 0<\delta<\beta-\lambda). \tag{7}$$

Без нарушения общности допустим, что точка $\xi=1$ принадлежит множеству F, и пусть $h(1,\varphi)$ – хорда, проходящая через точку $\xi=1$ и составляющая с радиусом в этой точке угол φ, где $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$.

Согласно (7)

$$\sigma(\Delta_\nu) \leq \frac{2}{2^{\nu(1+\delta)}} \quad (\nu \geq \nu_0,\ 0<\delta<\beta-\alpha). \tag{8}$$

Фиксируем $\varphi_0, 0<\varphi_0<\frac{\pi}{2}$. Тогда значения $\lambda_\nu(\varphi)$ при каждом $\varphi \in (-\varphi_0, \varphi_0)$ выражают σ-массу, сосредоточенную в секторе, ограниченном окружностью $|z-1| < \frac{1}{2^\nu}$ и хордами $h(1,-\varphi_0), h(1,\varphi_0)$. Таким образом,

$\lambda_\nu(\varphi)$ есть возрастающая функция от $\varphi, \lambda'_\nu(\varphi)$, существует почти всюду на $(-\varphi_0, \varphi_0)$ и

$$\int_{-\varphi_0}^{u_0} \lambda'_\nu(\varphi)d\varphi \le \lambda_\nu(\varphi_0) \le \sigma(\Delta_\nu) \le \frac{2}{2^{\nu(1+\delta)}}, \tag{9}$$

Пусть e^*_ν обозначает множество всех таких значений φ, для которых либо $\lambda'_\nu(\varphi)$ не существует, либо существует и $\lambda'_\nu(\varphi) \ge \frac{1}{2^\nu}$. Согласно (9) имеем $me^*_\nu \le \frac{2}{2^{\nu\delta}}$, и значит, множество $e^* = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{\nu=k}^{\infty} e^*_\nu$ имеет меру, равную нулю. Пусть e – дополнение к e^* до интервала $(-\varphi_0, \varphi_0)$. Предположим, что $\varphi_1 \in e$ и $z \in h(\xi, \varphi_1)$. Рассмотрим такие точки z, для которых $\frac{1}{2^{\nu+1}} \le |z-1| \le \frac{1}{2^\nu}$. Получим

$$\begin{aligned} \omega_\alpha(z) = &\iint\limits_{\Delta^*_{\nu_0}} G_\alpha(z;a)\cdot\frac{d\sigma(a)}{(1-|a|)^{1+\alpha}} + \iint\limits_{\Delta_{\nu_0,\nu-1}} G_\alpha(z;a)\cdot\frac{d\sigma(a)}{(1-|a|)^{1+\alpha}} + \\ &+ \iint\limits_{\Delta_{\nu-1,\nu+1}} G_\alpha(z;a)\cdot\frac{d\sigma(a)}{(1-|a|)^{1+\alpha}} + \iint\limits_{\Delta_{\nu+2}} G_\alpha(z;a)\cdot\frac{d\sigma(a)}{(1-|a|)^{1+\alpha}}. \end{aligned} \tag{10}$$

Имеем $\lim\limits_{z\to 1} I_1 = \lim\limits_{z\to 1} \iint\limits_{\Delta^*_{\nu_0}} G_\alpha(z;a)\frac{d\sigma(a)}{(1-|a|)^{1+\alpha}} = 0$.

Принимая во внимание оценку (1), из соотношения (10) следует, что

$$\begin{aligned} \omega_\alpha(z) \le I_1 + &\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\iint\limits_{\Delta_{\nu_0,\nu-1}} G_0(z;a)\cdot\frac{d\sigma(a)}{(1-|a|)} + \\ + &\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\iint\limits_{\Delta_{\nu-1,\nu+2}} G_0(z;a)\cdot\frac{d\sigma(a)}{(1-|a|)} + \\ + &\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\iint\limits_{\Delta_{\nu-2}} G_0(z;a)\cdot\frac{d\sigma(a)}{(1-|a|)} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned}$$

Утверждение леммы 1 доказано.

Для доказательства теоремы 1 воспользуемся оценкой, полученной М. Цудзи [10]. Его утверждение сформулируем в виде леммы.

Лемма Ц. *Пусть неотрицательное распределение масс* $\sigma(a)$ *удовлетворяет в области* $\Delta_\nu, \nu \ge \nu_0$ *неравенству (8) при* $0 < \delta < 1$, *и допустим, что* φ_1 *– произвольное значение угла, принадлежащее дополнению* e *множества* e^* *относительно интервала* $(-\varphi_0, \varphi_0)$. *Тогда в произвольной точке* $z \in h(0, \varphi_1)$, *принадлежащей кольцу* $\frac{1}{2^{\nu+1}} < |z-1| \le \frac{1}{2^\nu}$, $\nu \ge \nu_0$, *справедлива оценка*

$$I_2+I_3+I_4 \le \frac{const\cdot\nu}{2^{\nu\delta}}+\frac{const}{2^{\nu_0}},$$

где ν_0 может быть сколь угодно большим натуральным числом.

Доказательство теоремы 1. Воспользовавшись утверждениями лемм 1 и Ц, получим оценку

$$\omega_\alpha(z) \le I_1+\frac{const\cdot\nu}{2^{\nu\delta}}+\frac{const}{2^{\nu_0}}, \tag{11}$$

где $\lim\limits_{z\to 1} I_1=0,\ \nu\ge\nu_1,\ \nu_0$ – сколько угодно большое натуральное число и $\delta=\beta-\alpha>0$. Из оценки (11) непосредственно следует утверждение теоремы 1.

Замечание. Отметим, что при $\alpha=0$ утверждение теоремы 1, доказанное в [11], является уточнением соответствующего результата М. Цудзи [10].

Л. Сехпосяном [9] доказано существование хордальных пределов, равных нулю, у потенциалов типа Грина при $-1<\alpha<+\infty$ для почти всех $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ всюду на Γ, кроме, быть может, исключительного множества E, линейная мера которого равна нулю при условии, что неотрицательное распределение масс $\mu(a)$ удовлетворяет условию

$$\iint\limits_{|\xi|<1}\left(1-|\xi|\right)^{\alpha} d\mu(\xi)<+\infty. \tag{12}$$

Из соотношения (12) следует, что $\iint\limits_{|\xi|<r}\left(1-|\xi|\right)^{\alpha} d\mu(\xi)=\mathrm{O}(1)$.

Поэтому

$$\Omega(r)=\iint\limits_{|\xi|<r} d\mu(\xi)=\mathrm{O}\left(\frac{1}{(1-r)^{\alpha}}\right),$$

где $0\le\alpha<+\infty$.

Отсюда легко следует, что выполняются условия теоремы 1 при $\lambda=0$. Следовательно, из утверждения теоремы 1 вытекает уточнение утверждения теоремы, полученной Л. Сехпосяном [9]. Уточнение касается исключительных множеств. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $\omega_\alpha(z)$ – потенциал типа Грина, где $\alpha\ge 0$, а неотрицательное распределение масс $\mu(a)$ удовлетворяет условию (12).*

Тогда на Γ можно указать такое множество E, где $cap_\beta E=0$ и $0<\beta<1$, что для всех $\xi\in\Gamma$, кроме, быть может, множества E, для почти всех $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ существуют хордальные пределы, равные нулю, т.е. $\lim\limits_{\substack{z\to\xi\in\Gamma\setminus E\\ z\in h(\xi,\varphi)}}\omega_\alpha(z)=0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета по науке МОН РА в рамках научного проекта №15Т-1А083 и в рамках финансовой поддержки проекта развития Российско-Армянского Университета.

Национальный политехнический университет Армении
Российско-Армянский университет
e-mail: samvel357@mail.ru

Академик В. С. Захарян, С. Л. Берберян

О хордальных пределах потенциалов типа Грина

Доказывается существование хордальных пределов у потенциалов типа Грина $\omega_\alpha(z)$, где $\alpha \geq 0$, всюду на единичной окружности, кроме исключительного множества E, характеристика которого дана с помощью β-емкости, где $0 < \beta < 1$. Уточняется один результат, полученный Л. А. Сехпосяном.

Ակադեմիկոս Վ. Ս. Զաքարյան, Ս. Լ. Բերբերյան

Գրինի տիպի պոտենցիալների լարային սահմանների մասին

Ապացուցվել է լարային սահմանների գոյությունը $\omega_\alpha(z)$ Գրինի տիպի պոտենցիալների մոտ, որտեղ $\alpha \geq 0$, ամենուրեք միավոր շրջանագծի վրա, բացի այն բացառիկ E բազմությունից, որի բնութագիրը տրվածէ β-ունակության օգնությամբ, երբ $0 < \beta < 1$: Մասնավորապես ճշգրտվում է մի արդյունք, որը ստացվել է Լ. Ա. Սեխպոսյանի կողմից:

Academician V. S. Zakaryan, S. L. Berberyan

On the Chordal Limits of Potentials of the Green Type

The existence of chordal limits is proven for potentials of Green type, where $\alpha \geq 0$, everywhere on the unit circle, expect for the exceptional E set, which characteristic is given by the β-capacity, where $0 < \beta < 1$. In particular, a result obtained by L. A. Sekhposyan is specified.

Литература

1. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. 1966. М. Наука. 671 с.
2. *Джрбашян М. М* . В сб.:Современные проблемы теории аналитических функций (Материалы конф. по теории аналитических функций. Ереван, 1965). М. 1966. С 118-137.
3. *Захарян В. С.* – ДАН АрмССР. 1978. Т.66. №4. С. 212-215.
4. *Джрбашян М. М., Захарян В. С.* Классы и граничные свойства функций, мероморфных в круге. М. Изд. фирма «Физ.-мат. литература». 1993. 224 с.

5. *Берберян С. Л.* – Изв. АН Арм ССР. Математика. 1986. Т.21. №2. С. 187-197.
6. *Джрбашян А. М.* – Изв. НАН Армении. Математика. 1995. Т. 30. №2. С. 47-75.
7. *Носиро К.* Предельные множества. М. ИЛ. 1963. 253 с.
8. *Коллингвуд Э., Ловатер А.* Теория предельных множеств. М. Мир. 1971. 306 с.
9. *Сехпосян Л. А.* Граничные свойства некоторых классов мероморфных функций. Канд. дис.1981. Ереван. 73 с.
10. *Tsuji M.* Littlewoods theorem on subharmonic functions in a unit circle. Comment. Math.Univ. St. Pauli. 1956. V.5. №7. P. 3-16.
11. *БерберянС. Л.* – ДАН АрмССР. 1979. Т. 68. №2. С. 79-87.