ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր
Том 117 2017 № 4
Volume

МАТЕМАТИКА

УДК 517.51

К. А. Навасардян

Теоремы единственности для кратных рядов по системе Виленкина и обобщенной системе Хаара

(Представлено академиком Г.Г. Геворкяном 23/VIII 2017)

Ключевые слова: *метод суммирования, теорема единственности, мажоранта частичных сумм, система Виленкина, ряд Фурье.*

Вначале напомним некоторые определения. Пусть $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ – некоторая последовательность натуральных чисел с условием $p_k \ge 2$, $k \in N$. Положим $m_0 = 1$, $m_k = m_{k-1} p_k$, $k \in N$. Тогда любое неотрицательное целое число n единственным образом представляется в виде

$$n = \sum_{k=1}^{\infty} n_k m_{k-1}, \text{ где } n_k \in \{0,1,\dots,p_k - 1\},\ k \in N. \tag{1}$$

Любое число $x \in [0,1)$ тоже единственным образом представляется в виде

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{m_k}, \text{ где } x_k \in \{0,1,\dots,p_k - 1\},\ k \in N,$$

и для бесконечно многих $k \in N$ имеет место $x_k \ne p_k - 1$.

Для натурального числа $n = m_k + r(p_{k+1} - 1) + s - 1$, где $0 \le r \le m_k - 1$, $1 \le s \le p_{k+1} - 1$, положим

$$\chi_n(x) := \chi_{r,s}^{(k)}(x) := \begin{cases} \sqrt{m_k}\exp\left(2\pi i \dfrac{x_{k+1}}{p_{k+1}} s\right), & \text{когда } x \in \left[\dfrac{r}{m_k}, \dfrac{r+1}{m_k}\right), \\ 0, \text{ когда } x \notin \left[\dfrac{r}{m_k}, \dfrac{r+1}{m_k}\right). \end{cases} \tag{2}$$

Полагая $\chi_0(x) \equiv 1$, получим обобщенную систему Хаара $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, порожденную последовательностью натуральных чисел $p_k \ge 2$, $k \in N$. При $p_k = 2$, $k \in N$, эта система совпадает с классической системой Хаара.

Обобщенные функции Радемахера определяются по формуле

$$R_k(x) := \exp\left(2\pi i \frac{x_k}{p_k}\right), \quad k \in N.$$

Система Виленкина $\psi := \{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ определяется по правилу

$$\psi_0(x) \equiv 1 \quad \text{и} \quad \psi_n(x) := \prod_{k=1}^{\infty} R_k^{n_k}(x) = \exp\left(2\pi i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n_k x_k}{p_k}\right), \qquad (3)$$

где n имеет представление (1). В случае $p_k = 2$, $k \in N$, система Виленкина совпадает с системой Уолша. Эти системы определены в 1947 г. Н. Я. Виленкиным [1] и изучены многими математиками. При $\sup\limits_k p_k = \infty$ системы, определенные формулами (2) и (3), сильно отличаются от систем Уолша и Хаара. В работах [2, 3] введен один линейный метод суммирования для рядов по системам (2) и (3).

Обозначим

$$\Im_k := \left\{\left[\frac{j}{m_k}, \frac{j+1}{m_k}\right) : j = 0,1,\dots,m_k - 1\right\}, \quad k = 0,1,2,\dots.$$

Для интервала $J \in \Im_k$ обозначим через $\tilde{J}$ тот интервал из $\Im_{k-1}$, который содержит J. Определим интервалы $(J)_l$, $(l \in Z)$ следующим образом:

1) $(J)_0 = J$, $(J)_l \in \Im_k$, $(J)_l \subset \tilde{J}$,

2) правый конец интервала $(J)_l$ совпадает с левым концом интервала $(J)_{l+1}$, причем концы отрезка $\tilde{J}$ отождествляются, т.е. если правый конец интервала $(J)_l$ есть $\dfrac{j}{m_{k-1}}$, то левый конец интервала $(J)_{l+1}$ будет $\dfrac{j-1}{m_{k-1}}$.

Для каждого интервала $J \in \Im_k$ и натурального числа $q \le \dfrac{p_k}{2}$ положим

$$(J)^q = \bigcup_{l=-q}^{q} (J)_l, \quad (J)^0 = (J)_0 = J,$$

$$\phi_{k,x}^{(q)}(t) = \begin{cases} \dfrac{m_k}{q}\left(1 - \dfrac{|l|}{q}\right), & \text{когда } t \in (I_{k,x})_l, |l| < q, \\ 0, & \text{когда } t \notin (I_{k,x})^{q-1}. \end{cases}$$

где $x \in [0,1)$, а через $I_{k,x}$ обозначен интервал со свойствами: $I_{k,x} \in \Im_k$ и $x \in I_{k,x}$.

Далее будем считать, что $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ – одна из систем (2), (3). Учитывая определение системы $\{f_n\}$, очевидно, что при любом $\phi_{k,x}^{(q)}$ имеем

$$(f_n, \phi_{k,x}^{(q)}) := \int_0^1 f_n(t)\phi_{k,x}^{(q)}(t)dt = 0, \quad \text{когда} \quad n \ge m_k.$$

Поэтому для любого ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x), \qquad (4)$$

любого числа $x \in [0,1)$ и при любых натуральных k и q, $(2q < p_k)$, определены суммы

$$\sigma_{k,q}(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (f_n, \phi_{k,x}^{(q)}) .$$

Пусть

$$S_m(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n f_n(x)$$

частичная сумма ряда (4). Положим

$$S^*(x) = \sup_m |S_m(x)| \qquad \text{и} \qquad \sigma^*(x) = \sup_{k,q} |\sigma_{k,q}(x)| .$$

В работе [2] анонсированы следующие теоремы:

Теорема A. *Существует постоянная* $C > 0$*, не зависящая от последовательностей* a_n*,* $n \in N$*, и* p_k*,* $k \in N$*, такая, что*

$$\sigma^*(x) < C \cdot S^*(x) \qquad \text{для всех } x \in [0,1) .$$

И если ряд (4) сходится в точке x *и* $S(x)$ *– сумма ряда в этой точке, то* $\lim_{k\to\infty} \sigma_{k,q}(x) = S(x)$.

Теорема B. *Если суммы* $\sigma_{k,q}(x)$ *по мере сходятся к некоторой функции* $f(x)$ *при* $k \to \infty$ *и для некоторой последовательности* $\lambda_\nu \uparrow \infty$ *выполняется*

$$\lim_{\nu\to\infty} \lambda_\nu \operatorname{mes}\left\{x \in [0,1) : \sigma^*(x) > \lambda_\nu\right\} = 0 ,$$

то для всех n *имеет место*

$$a_n = \lim_{\nu\to\infty} \int_0^1 [f(x)]_{\lambda_\nu} \overline{f_n(x)} dx ,$$

где

$$[g(x)]_\lambda = \begin{cases} g(x), & \text{когда } |g(x)| \le \lambda, \\ 0, & \text{когда } |g(x)| > \lambda. \end{cases}$$

В работах [4, 5] доказаны теоремы единственности для простых рядов по обобщенной системе Хаара, порожденной ограниченной последовательностью p_k, $k \in N$, и кратных рядов по классической системе Хаара, мажоранты частичных сумм которых удовлетворяет некоторому условию.

В данной работе рассматриваются аналогичные вопросы для кратных рядов по системам (2) и (3).

Для $\overline{n} = (n_1, n_2, ..., n_d) \in N_0^d$ (N_0 – множество неотрицательных целых чисел), $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_d) \in [0,1)^d$, $\overline{k} = (k_1, k_2, ..., k_d) \in N^d$ и $\overline{q} = (q_1, q_2, ..., q_d)$ ($2q_i < p_{k_i}$, $i = 1, 2, ..., d$) обозначим

$$f_{\overline{n}}(\overline{x}) = f_{n_1}(x_1) f_{n_2}(x_2) ... f_{n_d}(x_d) ,$$

$$(f_{\overline{n}}, \phi_{\overline{k},\overline{x}}^{(\overline{q})}) := \prod_{i=1}^{d} \int_0^1 f_{n_i}(t_i) \phi_{k_i,x_i}^{(q_i)}(t_i) dt_i$$

и рассмотрим ряд

$$\sum_{\overline{n}\in N_0^d} a_{\overline{n}} f_{\overline{n}}(\overline{x}) = \sum_{\overline{n}\in N_0^d} a_{\overline{n}} f_{n_1}(x_1) f_{n_2}(x_2) ... f_{n_d}(x_d) . \qquad (5)$$

Пусть

$$\sigma_{\bar{k},\bar{q}}(\bar{x}) := \sum_{\bar{n}\in N_0^d} a_{\bar{n}}(f_{\bar{n}}, \phi_{\bar{k},\bar{x}}^{(\bar{q})}) \qquad \text{и} \qquad \sigma^*(\bar{x}) = \sup_{\bar{k},\bar{q}} |\sigma_{\bar{k},\bar{q}}(\bar{x})|\,.$$

Скажем, что ряд (5) суммируется почти всюду (по мере) к функции f, если $\sigma_{\bar{k},\bar{q}}(\bar{x})$ сходится почти всюду (по мере) к функции f при $\bar{k}\to\infty$ (т.е. $\min\{k_i\}\to\infty$).

Справедлива следующая

Теорема. *Если суммы $\sigma_{\bar{k},\bar{q}}(\bar{x})$ ряда (5) по мере сходятся к некоторой интегрируемой по Лебегу функции $f(\bar{x})$ при $\bar{k}\to\infty$ (т.е. $\min\{k_i\}\to\infty$) и выполняется*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\, \mathrm{mes}\left\{\bar{x}\in[0,1)^d : \sigma^*(\bar{x}) > \lambda\right\} = 0\,,$$

то ряд (5) является рядом Фурье функции f по системе $\{f_{\bar{n}}\}$, т.е.

$$a_{\bar{n}} = \int_{[0,1)^d} f(\bar{x})\overline{f_{\bar{n}}(\bar{x})}d\bar{x}\,.$$

Ереванский государственный университет
e-mail: knavasard@ysu.am

К. А. Навасардян

Теоремы единственности для кратных рядов по системе Виленкина и обобщенной системе Хаара

Дано определение одного метода суммирования кратных рядов по системам Виленкина и Хаара. Доказано, что если некоторый кратный ряд по этим системам суммируется приведенным методом к интегрируемой на $[0,1)^d$ функции и удовлетворяет некоторому условию, то он является рядом Фурье этой функции.

Կ. Ա. Նավասարդյան

Միակության թեորեմներ ըստ Վիլենկինի և Հաարի ընդհանրացված համակարգերով բազմապատիկ շարքերի համար

Սահմանվում է ըստ Վիլենկինի և Հաարի ընդհանրացված համակարգերի բազմապատիկ շարքերի գումարման մի մեթոդ: Ապացուցվում է, որ եթե ըստ այդ համակարգերի որևէ բազմապատիկ շարք նշված մեթոդով գումարվում է $[0,1)^d$ -ում ինտեգրելի ֆունկցիայի և բավարարում է որոշակի պայմանի, ապա այդ ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքն է:

K. A. Navasardyan

Uniqueness Theorems for Multiple Series with Respect to Vilenkin and Generalized Haar Systems

In the paper, a new method of summation is defined for multiple series with respect to Vilenkin and generalized Haar system. It is proved that if a multiple series with respect to these systems summable by the given method to an integrable function on $[0,1)^d$ and satisfies an extra condition, then it is the Fourier series of that function.

Литература

1. *Виленкин Н. Я.* – Изв. АН СССР. Сер. мат. 1947. Т. 11. N 4. С. 363-400.
2. *Геворкян Г. Г., Навасардян К. А.* – ДНАН РА. 2017. Т. 117. № 1. С. 3-8.
3. *Gevorkyan G. G., Navasardyan K. A.* – Proceedings of the YSU. 2017. V. 51. № 1. P. 3-7.
4. *Костин В. В.* - Мат. заметки. 2004. Т. 76. № 5. С. 740-747.
5. *Геворкян Г. Г.* – Изв. НАН Армении. Математика. 1995. Т. 30. № 5. С. 7-21.