ՀԱՅԱUSԱՆԻ ԳԻSՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 117 2017 № 3

МЕХАНИКА

УДК 539.3

А. А. Саркисян[1], член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян[1], Л. И. Маневич[2], С. А. Тиман[2]

Прикладная теория изгибной деформации упругой тонкой балки на основе моментной теории со стесненным вращением и ее приложение к полимерам

(Представлено 26/V 2017)

Ключевые слова: *прикладная теория, изгиб, балка, моментная теория, полимеры.*

В определенных приложениях, в частности, при моделировании полимерных макромолекул, необходимо будет включать в модель не геометрические точки, а малые, но конечные объёмы, которым приписаны смещения и повороты, так же, как и силы и моменты межмолекулярного взаимодействия [1-5]. В работе [6] построена моментная континуальная модель деформации полуэтиленовых цепей исходя из их молекулярной модели и определены ее физические постоянные через параметры молекулярной структуры цепей [7, 8]. В работе [9] устанавливается феноменологическая моментная теория упругости со стесненным вращением, которая адекватна континуальной модели полиэтиленовой цепи [6].

В данной статье на основе трехмерной модели работы [9] построена прикладная теория изгибной деформации микрополярной упругой тонкой балки со стесненным вращением.

1. Трехмерная континуальная моментная теория упругости со стесненным вращением. Основные уравнения моментной теории упругости со стесненным вращением как континуальная модель для полиэтилена имеют вид [9]:

уравнения равновесия (движения)

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial z}=0 \quad \left(\rho\frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2}\right), \qquad \frac{\partial\mu_{31}}{\partial z}+\sigma_{23}-\sigma_{32}=0,$$

$$\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{32}}{\partial z}=0 \quad \left(\rho\frac{\partial^2 V_2}{\partial t^2}\right), \qquad \frac{\partial\mu_{32}}{\partial z}+\sigma_{31}-\sigma_{13}=0; \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial z}=0 \quad \left(\rho\frac{\partial^2 V_3}{\partial t^2}\right),$$

соотношения упругости

$$\begin{aligned}
&\sigma_{11} = c_{11}^{11}\varepsilon_{11} + c_{22}^{11}\varepsilon_{22} + c_{33}^{11}\varepsilon_{33}, && \sigma_{13} + \sigma_{31} = 2c_{13}^{13}\varepsilon_{13},\\
&\sigma_{22} = c_{22}^{11}\varepsilon_{11} + c_{22}^{22}\varepsilon_{22} + c_{33}^{22}\varepsilon_{33}, && \sigma_{23} + \sigma_{32} = 2c_{23}^{23}\varepsilon_{23},\\
&\sigma_{33} = c_{33}^{11}\varepsilon_{11} + c_{33}^{22}\varepsilon_{22} + c_{33}^{33}\varepsilon_{33}, && \mu_{31} = k_1\chi_{31} - k_2\chi_{32},\\
&\sigma_{21} = \sigma_{12} = c_{12}^{12}\varepsilon_{12} && \mu_{32} = k_1\chi_{32} - k_2\chi_{31}
\end{aligned} \qquad (1.2)$$

либо в обратной форме

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E_1}\sigma_{11} - \frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_{22} - \frac{\nu_{31}}{E_3}\sigma_{33},$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E_2}\sigma_{22} - \frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_{11} - \frac{\nu_{32}}{E_3}\sigma_{33},$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E_3}\sigma_{33} - \frac{\nu_{13}}{E_1}\sigma_{11} - \frac{\nu_{23}}{E_2}\sigma_{22},$$

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{12} = \frac{1}{2G_{12}}(\sigma_{12} + \sigma_{21}) \ \text{ или } \varepsilon_{12} = \frac{1}{G_{12}}\sigma_{12},\\
&\varepsilon_{23} = \frac{1}{2G_{23}}(\sigma_{23} + \sigma_{32}), \quad \chi_{31} = \frac{k_1}{k_1^2 - k_2^2}\mu_{31} + \frac{k_2}{k_1^2 - k_2^2}\mu_{32},\\
&\varepsilon_{13} = \frac{1}{2G_{13}}(\sigma_{13} + \sigma_{31}), \quad \chi_{32} = \frac{k_1}{k_1^2 - k_2^2}\mu_{32} + \frac{k_2}{k_1^2 - k_2^2}\mu_{31};
\end{aligned} \qquad (1.3)$$

геометрические соотношения

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x}, \qquad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial y}, \qquad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial z},$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}, \quad \varepsilon_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x}, \quad \varepsilon_{23} = \frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial z},$$

$$\chi_{31} = \frac{\partial \omega_1}{\partial z}, \quad \chi_{32} = \frac{\partial \omega_2}{\partial z}, \qquad (1.4)$$

где

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} rot\vec{u}; \ \ \omega_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z}\right), \ \ \omega_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x}\right), \ \ \omega_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right). \ (1.5)$$

Здесь $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{13}$, σ_{31}, σ_{23}, σ_{32} – силовые напряжения; μ_{31}, μ_{13} – моментные напряжения; $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ – вектор перемещения; $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор поворота; $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}$ – деформации; χ_{31}, χ_{32} – изгибы-кручения; $c_{11}^{11}, c_{22}^{11}, c_{33}^{11}, c_{22}^{22}$, $c_{33}^{22}, c_{33}^{33}, c_{13}^{13}, c_{23}^{23}, c_{12}^{12}$, k_1, k_2 (или E_1, E_2, E_3, ν_{21}, ν_{12}, ν_{31}, ν_{13}, ν_{32}, ν_{23}, k_1, k_2) – упругие постоянные континуального полиэтилена, вычисленные в работах [7, 8] и выраженные через физические данные атомного уровня кристалла полиэтилена.

Рассматриваемое тело представляет собой призматическое тело, ось z – его ось, оси x и y расположены в поперечном сечении тела и представляют собой главные центральные оси этого сечения (поперечное сечение рассматриваемого призматического тела будем считать прямоугольником: $2a \times 2b$), длину тела обозначим через l (тогда $-b \le x \le b$, $-h \le y \le h$, $0 \le z \le l$).

К основным трехмерным уравнениям континуального полиэтилена следует присоединить граничные условия (а также начальные условия в случае задачи динамики).

Выражение для плотности потенциальной энергии деформации имеет вид [9]:

$$W = \frac{1}{2}\Big(c_{11}^{11}\varepsilon_{11}^2 + c_{22}^{22}\varepsilon_{22}^2 + c_{33}^{33}\varepsilon_{33}^2 + c_{12}^{12}\varepsilon_{12}^2 + c_{13}^{13}\varepsilon_{13}^2 + c_{23}^{23}\varepsilon_{23}^2 + 2c_{22}^{11}\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + 2c_{33}^{11}\varepsilon_{11}\varepsilon_{33} + \\ + 2c_{33}^{22}\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + k_1\chi_{31}^2 + k_1\chi_{32}^2 - 2k_2\chi_{31}\chi_{32}\Big). \tag{1.6}$$

Нашей основной целью является построение прикладной теории изгиба тонких балок исходя из трехмерной модели моментной теории упругости со стесненным вращением ((1.1)-(1.6)).

2. Основные гипотезы. Перемещения и повороты; деформации, изгибы-кручения; силовые и моментные напряжения. При построении прикладной теории тонкой балки ($2a << l$, $2b << l$) исходя из трехмерной моментной теории упругости со стесненным вращением будем пользоваться гипотезами [10-13], суть которых состоит в следующем:

1) В процессе деформации поперечные сечения тонкой балки поворачиваются как жесткое целое вокруг двух взаимно перпендикулярных осей x и y на некоторые углы, не изменяя своих размеров и не оставаясь перпендикулярными к деформированной исходной оси z балки. Это известная кинематическая гипотеза Тимошенко [14, 15] при изгибной деформации тонкой балки, в данном случае при изгибе в двух взаимно перпендикулярных плоскостях (yz и xz).

2) Нормальными напряжениями σ_{11} и σ_{22} будем пренебрегать в выражении ε_{33} относительно нормального напряжения σ_{33}, а также будем считать $\sigma_{12} = \sigma_{21} = 0$.

3) При определении деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений для касательных напряжений σ_{13} и σ_{23} сначала примем

$$\sigma_{13} = \overset{0}{\sigma}_{13}(z), \quad \sigma_{23} = \overset{0}{\sigma}_{23}(z). \tag{2.1}$$

После определения указанных выше величин окончательные выражения для σ_{13} и σ_{23} определим как сумму (2.1) и результата интегрирования уравнения равновесия (движения) $(1.1)_3$ (с учетом закона независимого действия сил), с требованием равенства нулю соответствующего интеграла (в плоскости yz от $-h$ до $+h$; в плоскости xz от $-b$ до $+b$).

Математически принятую кинематическую гипотезу Тимошенко можем записать так:

$$u_1 = u_1(z), \quad u_2 = u_2(z), \tag{2.2}$$

$$u_3 = y \cdot \psi_1(z) + x \cdot \psi_2(z), \tag{2.3}$$

где $u_1(z)$ – прогиб оси балки в плоскости xz, а $u_2(z)$ – прогиб оси балки в плоскости yz; $\psi_1(z)$ – угол поворота поперечного сечения балки вокруг главной центральной оси инерции x этого сечения, а $\psi_2(z)$ – угол поворота поперечного сечения балки вокруг оси y; (x, y) – произвольная точка поперечного сечения балки. Отметим, что площадь поперечного сечения и моменты инерции относительно осей x и y будут:

$$F = 2h \cdot 2b = 4hb, J_x = \frac{2b \cdot (2h)^3}{12} = \frac{4bh^3}{3}, J_y = \frac{2h \cdot (2b)^3}{12} = \frac{4hb^3}{3}. \tag{2.4}$$

Подставляя в формулы (1.5) выражения для перемещений (2.2), (2.3), для углов поворота получим:

$$\omega_1 = \Omega_1(z) = \frac{1}{2}\left(\psi_1(z) - \frac{du_2(z)}{dz}\right), \ \omega_2 = \Omega_2(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{du_1(z)}{dz} - \psi_2(z)\right), \quad \omega_3 = 0. \tag{2.5}$$

Подставляя формулы для перемещений (2.2), (2.3) и поворотов (2.5) в геометрические соотношения (1.4), для деформаций и изгибов-кручений будем иметь:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{12} = 0, \tag{2.6}$$

$$\varepsilon_{33} = y \cdot \frac{d\psi_1(z)}{dz} + x \cdot \frac{d\psi_2(z)}{dz}, \tag{2.7}$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{du_1(z)}{dz} + \psi_2(z), \qquad \varepsilon_{23} = \psi_1(z) + \frac{du_2(z)}{dz}, \tag{2.8}$$

$$\chi_{31} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\psi_1(z)}{dz} - \frac{d^2u_2(z)}{\partial z^2}\right), \quad \chi_{32} = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2u_1(z)}{\partial z^2} - \frac{d\psi_2(z)}{dz}\right), \tag{2.9}$$

Приняв обозначения

$$\begin{gathered} K_{11} = \frac{d\psi_1(z)}{dz}, \ K_{22} = \frac{d\psi_2(z)}{dz}, \ \Gamma_{13} = \psi_2(z) + \frac{du_1(z)}{dz}, \ \ \Gamma_{23} = \psi_1(z) + \frac{du_2(z)}{dz}, \\ \lambda_{31} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\psi_1(z)}{dz} - \frac{d^2u_2(z)}{\partial z^2}\right), \ \lambda_{32} = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2u_1(z)}{\partial z^2} - \frac{d\psi_2(z)}{dz}\right), \end{gathered} \tag{2.10}$$

формулы (2.6)-(2.9) можем записать так:

$$\begin{gathered} \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{12} = 0, \\ \varepsilon_{33} = y \cdot K_{11}(z) + x \cdot K_{22}(z), \ \ \varepsilon_{13} = \Gamma_{13}(z), \quad \varepsilon_{23} = \Gamma_{23}(z), \\ \chi_{31} = \lambda_{31}(z), \quad \chi_{32} = \lambda_{32}(z). \end{gathered} \tag{2.11}$$

Как видно из формул (2.2), (2.3), (2.5), (2.10), (2.11), основными кинематическими функциями задачи являются: $u_1(z)$, $u_2(z)$, $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$.

На основе гипотезы 2) из соотношения закона Гука $(1.3)_3$ для нормального силового напряжения σ_{33}, а также для моментных напряжений μ_{31}, μ_{32} из $(1.3)_4$, $(1.3)_5$, получим:

$$\sigma_{33} = E_3 \cdot \varepsilon_{33} = E_3(y \cdot K_{11}(z) + x \cdot K_{22}(z)), \tag{2.12}$$

$$\mu_{31} = \mu_{31}(z) = k_1\lambda_{31}(z) - k_2\lambda_{32}(z), \ \ \mu_{32} = \mu_{32}(z) = k_1\lambda_{32}(z) - k_2\lambda_{31}(z). \tag{2.13}$$

На основе гипотезы 3) уравнения $(1.3)_5$, $(1.3)_6$ (с учетом (2.11)) и уравнения равновесий $(1.1)_4$, $(1.1)_5$ представим в виде:

$$\sigma_{31}=\sigma_{31}(z)=2G_{13}\cdot\Gamma_{13}(z)-\overset{0}{\sigma}_{13}(z),\quad \sigma_{32}=\sigma_{32}(z)=2G_{23}\cdot\Gamma_{23}(z)-\overset{0}{\sigma}_{23}(z),\qquad(2.14)$$

$$\frac{d\mu_{31}(z)}{dz}+\overset{0}{\sigma}_{23}(z)-\sigma_{32}(z)=0,\quad \frac{d\mu_{32}(z)}{dz}+\sigma_{31}(z)-\overset{0}{\sigma}_{13}(z)=0.\qquad(2.15)$$

Отметим, что первые два уравнения равновесия из (1.1) с учетом гипотезы 2) (учитывая, что $\sigma_{12}=\sigma_{21}=0$) примут вид:

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{32}}{\partial z}=0\qquad(2.16)$$

и будут служить для определения нормальных напряжений σ_{11} и σ_{22} (с учетом граничных условий при $x=\pm b$ для σ_{11} и $y=\pm h$ для σ_{22}). Как видно из (2.16) (имея в виду, что $\sigma_{31}=\sigma_{31}(z),\sigma_{32}=\sigma_{32}(z)$; формулы (2.14)), σ_{11} будет линейной функцией по x, а σ_{22}–линейной функцией по y и оба будут функциями также и по z.

Для получения уточнённых выражений для силовых касательных напряжений σ_{13} и σ_{23} выполним вычисления по гипотезе 3). Будем считать, что по формуле (2.12) уже определено нормальное силовое напряжение σ_{33}. Тогда исходя из принципа независимого действия сил (т.к. рассматриваемая задача линейная) вместо третьего уравнения равновесия можем записать два отдельных уравнения:

$$\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{33}^{*}}{\partial z}=0,\sigma_{33}^{*}=x\cdot\overset{1*}{\sigma}_{33}(z),\quad \overset{1*}{\sigma}_{33}(z)=E_3\cdot K_{22}(z),\qquad(2.17)$$

$$\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{33}^{**}}{\partial z}=0,\ \sigma_{33}^{**}=y\cdot\overset{1**}{\sigma}_{33}(z),\quad \overset{1**}{\sigma}_{33}(z)=E_3\cdot K_{11}(z).\qquad(2.18)$$

Интегрируя уравнение (2.17) по x, а (2.18) по y, получим

$$\bar{\sigma}_{13}=\overset{0}{\bar{\sigma}}_{13}(z)-\frac{x^2}{2}\cdot\frac{d\overset{1*}{\sigma}_{33}(z)}{dz},\quad \bar{\sigma}_{23}=\overset{0}{\bar{\sigma}}_{23}(z)-\frac{y^2}{2}\cdot\frac{d\overset{1**}{\sigma}_{33}(z)}{dz}.\qquad(2.19)$$

По гипотезе 3) от результатов интегрирования (2.19) будем требовать соответственно условие

$$\int_{-b}^{b}\bar{\sigma}_{13}dx=0,\quad \int_{-h}^{h}\bar{\sigma}_{23}dy=0.\qquad(2.20)$$

Тогда для $\overset{0}{\bar{\sigma}}_{13}(z)$ и $\overset{0}{\bar{\sigma}}_{23}(z)$ имеем

$$\overset{0}{\bar{\sigma}}_{13}(z)=\frac{b^2}{6}\cdot\frac{d\overset{1*}{\sigma}_{33}(z)}{dz},\quad \overset{0}{\bar{\sigma}}_{23}(z)=\frac{h^2}{6}\cdot\frac{d\overset{1**}{\sigma}_{33}(z)}{dz}.\qquad(2.21)$$

Подставляя (2.21) в формулы (2.19), для $\bar{\sigma}_{13}$ и $\bar{\sigma}_{23}$ получим

$$\bar{\sigma}_{13}=\left(\frac{b^2}{6}-\frac{x^2}{2}\right)\frac{d\overset{1*}{\sigma}_{33}(z)}{dz},\quad \bar{\sigma}_{23}=\left(\frac{h^2}{6}-\frac{y^2}{2}\right)\frac{d\overset{1**}{\sigma}_{33}(z)}{dz}.\qquad(2.22)$$

Теперь на основании гипотезы 3) запишем окончательные формулы для силовых касательных напряжений σ_{13} и σ_{23} (сумма (2.1) и (2.22)):

$$\sigma_{13}=\overset{0}{\sigma}_{13}(z)+\left(\frac{b^2}{6}-\frac{x^2}{2}\right)\frac{d\overset{1\,*}{\sigma}_{33}(z)}{dz},\quad \sigma_{23}=\overset{0}{\sigma}_{23}(z)+\left(\frac{h^2}{6}-\frac{y^2}{2}\right)\frac{d\overset{1\,**}{\sigma}_{33}(z)}{dz}. \qquad (2.23)$$

При помощи формул (2.23) можем удовлетворить граничным условиям для σ_{13} и σ_{23}:

$$\sigma_{13}\big|_{x=\pm b}=q_{13}(z),\ \sigma_{23}\big|_{y=\pm h}=q_{23}(z), \qquad (2.24)$$

в результате придем к следующим уравнениям:

$$\overset{0}{\sigma}_{13}(z)-\frac{b^2}{3}\cdot\frac{d\overset{1\,*}{\sigma}_{33}(z)}{dz}=q_{13}(z),\quad \overset{0}{\sigma}_{23}(z)-\frac{h^2}{3}\cdot\frac{d\overset{1\,**}{\sigma}_{33}(z)}{dz}=q_{23}(z), \qquad (2.25)$$

3. Прикладная теория изгибной деформации микрополярной тонкой балки со стесненным вращением. С целью приведения трехмерной задачи моментной теории упругости со стесненным вращением к одномерной (прикладной), что уже выполнено для перемещений, поворотов, деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений, в прикладной теории тонкой балки вместо силовых и моментных напряжений введем статически эквивалентные им интегральные характеристики – усилия N_{i3}, N_{3i}, моменты от силовых напряжений M_{ii}, моменты от моментных напряжений L_{3i} $(i=1,2)$, которые с учетом формул (2.1), (2.12), (2.13) примут вид

$$N_{13}=\int_{-h}^{h}\int_{-b}^{b}\sigma_{13}dxdy=\int_{-h}^{h}\int_{-b}^{b}\overset{0}{\sigma}_{13}(z)\,dxdy=2h\cdot 2b\,\overset{0}{\sigma}_{13}(z), \qquad (3.1)$$

$$N_{23}=\int_{-h}^{h}\int_{-b}^{b}\sigma_{23}dxdy=\int_{-h}^{h}\int_{-b}^{b}\overset{0}{\sigma}_{23}(z)\,dxdy=2h\cdot 2b\,\overset{0}{\sigma}_{23}(z), \qquad (3.2)$$

$$M_{11}=\int_{-h}^{h}\int_{-b}^{b}\sigma_{33}\cdot ydydx=\int_{-h}^{h}\int_{-b}^{b}\left(y\cdot\overset{1\,**}{\sigma}_{33}(z)+x\cdot\overset{1\,*}{\sigma}_{33}(z)\right)\cdot ydydx=$$

$$=\int_{-h}^{h}\int_{-b}^{b}y^2\,\overset{1\,**}{\sigma}_{33}(z)dydx=2b\cdot\frac{2h^3}{3}\overset{1\,**}{\sigma}_{33}(z) \qquad (3.3)$$

$$M_{22}=\int_{-h}^{h}\int_{-b}^{b}\sigma_{33}\cdot xdxdy=2h\cdot\frac{2b^3}{3}\overset{1\,*}{\sigma}_{33}(z), \qquad (3.4)$$

$$L_{31}=\int_{-h}^{h}\int_{-b}^{b}\mu_{31}dxdy=\int_{-h}^{h}\int_{-b}^{b}\mu_{31}(z)\,dxdy=2h\cdot 2b\cdot\mu_{31}(z), \qquad (3.5)$$

$$L_{32}=\int_{-h}^{h}\int_{-b}^{b}\mu_{32}dxdy=\int_{-h}^{h}\int_{-b}^{b}\mu_{32}(z)\,dxdy=2h\cdot 2b\cdot\mu_{32}(z). \qquad (3.6)$$

Из формул (3.1)-(3.6), определяя $\overset{0}{\sigma}_{13}(z)$, $\overset{0}{\sigma}_{23}(z)$, $\overset{1\,*}{\sigma}_{33}(z)$, $\overset{1\,**}{\sigma}_{33}(z)$, $\mu_{31}(z)$, $\mu_{32}(z)$ и подставляя их в формулы (2.28), (2.29), (2.15), придем к следующим уравнениям равновесия прикладной моментной теории со стесненным вращением для изгибной деформации тонкой балки:

$$N_{13}(z)-\frac{dM_{22}(z)}{dz}=q_{23}\cdot 2h\cdot 2b,\quad N_{23}(z)-\frac{dM_{11}(z)}{dz}=q_{13}\cdot 2h\cdot 2b,$$

$$\frac{dL_{31}(z)}{dz}+N_{23}(z)-N_{32}(z)=0,\quad \frac{dL_{32}(z)}{dz}+N_{31}(z)-N_{13}(z)=0,\tag{3.7}$$
$$\frac{dN_{31}(z)}{dz}+2h\cdot q_{11}(z)=0,\qquad \frac{dN_{32}(z)}{dz}+2b\cdot q_{22}(z)=0.$$

Отметим, что последние два уравнения равновесия получены на основе уравнений (2.17), (2.18), с применением к ним интегрального оператора $\int\limits_{-h}^{h}\int\limits_{-b}^{b}(\cdot)\,dxdy$ с учетом граничных условий для σ_{11} при $x=\pm b,$ для σ_{22} при $y=\pm h.$

Соотношения упругости для прикладной модели тонкой балки получим на основании формул (2.14), (2.13), (2.12). Таким образом,

$$N_{13}+N_{31}=2G_{13}\cdot F\cdot \Gamma_{13},\; N_{23}+N_{32}=2G_{23}\cdot F\cdot \Gamma_{23},\; M_{11}=E_3\cdot J_{11}\cdot K_{11},$$
$$M_{22}=E_3\cdot J_{22}\cdot K_{22},\; L_{31}=(k_1\lambda_{31}-k_2\lambda_{32})\cdot F,\; L_{32}=(k_1\lambda_{32}-k_2\lambda_{31})\cdot F.\tag{3.8}$$

Геометрическими соотношениями прикладной теории тонкой балки будут служить соотношения (2.10).

Таким образом, построена математическая модель изгибной деформации тонкой балки по моментной теории упругости со стесненным вращением, основную систему уравнений которой представляют уравнения равновесия (3.7), физические соотношения упругости (3.8) и геометрические условия (2.10). К этой системе уравнений следует присоединить граничные условия при $z=0$ и $z=l$. Легко подсчитать, что количество уравнений в этой модели – 18, а неизвестных: $u_1(z),$ $u_2(z),$ $\psi_1(z),$ $\psi_2(z),$ $\Gamma_{13}(z),$ $\Gamma_{23}(z),$ $K_{11}(z),$ $K_{22}(z),$ $\lambda_{31}(z),$ $\lambda_{32}(z),$ $N_{13}(z),$ $N_{23}(z),$ $N_{31}(z),$ $N_{32}(z),$ $M_{11}(z),$ $M_{22}(z),$ $L_{31}(z),$ $L_{32}(z)$ – тоже 18.

Решая 3-е и 4-е уравнения из системы уравнений равновесия (3.7) с первыми двумя уравнениями из соотношений упругости (3.8), определим N_{13}, N_{31} и N_{23}, N_{32}. Подставляя их в первые два и последние два уравнения равновесия из (3.7) и используя геометрические соотношения (2.10), придем к системе из четырех уравнений относительно функций $u_1(z),$ $u_2(z),$ $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$.

В силу принятых гипотез из (1.6) для плотности потенциальной энергии деформации прикладной теории тонкой балки по моментной теории со стесненным вращением имеем

$$\tilde{W}_0=\frac{1}{2}\Big\{C_{33}^{33}J_xK_{11}^2(z)+C_{33}^{33}J_yK_{22}^2(z)+F(C_{13}^{13}\cdot\Gamma_{13}^2(z)+C_{23}^{23}\cdot\Gamma_{23}^2(z)+$$
$$+k_1\lambda_{31}^2(z)+k_1\lambda_{32}^2(z)-2k_2\lambda_{31}(z)\lambda_{32}(z))\Big\},\tag{3.9}$$

а полная потенциальная энергия в балке будет

$$\tilde{U}_0=\int\limits_0^l \tilde{W}_0(z)dz.$$

В случае динамической задачи основные уравнения прикладной теории микрополярной тонкой балки со стесненным вращением выводятся аналогично статической (только все величины будут также функциями от

t). В итоге уравнения движения примут вид (3.7) с учетом инерционных членов, а соотношениями упругости и геометрическими соотношениями будут служить соответственно формулы (3.8), (2.10).

4. Задачи о равновесии и свободных колебаниях изгибной деформации тонких балок по моментной теории со стесненным вращением. Рассмотрим конкретные примеры изгиба балки: статическую задачу и задачу о свободных колебаниях, когда ее оба конца шарнирно оперты и балка загружена в плоскости x_2x_3 равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $q = q_2(z) = const$ (при свободных колебаниях $q \equiv 0$). Шарнирное опирание означает, что на концах балок $(z = 0$ и $z = l)$ в плоскости yz равны нулю u_2, M_{11} и L_{31}, а в плоскости $xz - u_1, M_{22}$ и L_{32}, т.е.

в плоскости $yz: u_2 = 0, M_{11} = 0, L_{31} = 0$, при $z = 0$ и $z = l$;

в плоскости $xz: u_1 = 0, M_{22} = 0, L_{32} = 0$, при $z = 0$ и $z = l$.

Поставленные задачи будем решать методом разделения переменных.

Решение системы уравнений (3.7), (3.8), (2.10) представим в виде тригонометрических рядов Фурье:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \sum_{m=1}^{\infty} U_{1m} \sin\frac{m\pi z}{l}, \quad u_2 = \sum_{m=1}^{\infty} U_{2m} \sin\frac{m\pi z}{l}, \\
\psi_1 &= \sum_{m=1}^{\infty} \Psi_{1m} \cos\frac{m\pi z}{l}, \quad \psi_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \Psi_{2m} \cos\frac{m\pi z}{l},
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

где U_{1m}, U_{2m}, Ψ_{1m}, Ψ_{2m} – коэффициенты рядов – неизвестные постоянные числа. Отметим, что решение в виде (4.1) автоматически удовлетворяет колебаниях под суммой в каждую формулу из (4.1) необходимо добавить множитель $e^{ip_m t}$.

В статической задаче нагрузку $q_2 = q = const$ тоже необходимо представить в виде разложения в тригонометрический ряд Фурье.

Данные задачи: $l = 100нм(нанометр)$, $2h = 2b = 1нм$, $q_2 = 0.5 \cdot 10^3 \frac{кгс}{м^2}$, $C_{11}^{11} = 18.1\ ГПа$, $C_{22}^{22} = 17.3\ ГПа$, $C_{33}^{33} = 193\ ГПа$, $C_{22}^{11} = 11\ ГПа$, $C_{33}^{11} = 4\ ГПа$, $C_{33}^{22} = 5\ ГПа$, $C_{12}^{12} = 8.63 ГПа$, $C_{13}^{13} = 0.75 ГПа$, $C_{23}^{23} = 2.18 ГПа$, $k_1 = 200H$, $k_2 = 200H$.

Результаты численных вычислений таковы:

а) статическая задача:

$W_{1\max}^{\text{мом}} = -2.07 \cdot 10^{-11}$м, $W_{2\max}^{\text{мом}} = 2.07 \cdot 10^{-11}$м, $W_{1\max}^{\text{кл}} = 0$, $W_{1\max}^{\text{кл}} = 4.125 \cdot 10^{-11}$м,

б) свободные колебания:

$p_{11мом}^{1} = 4.314 \cdot 10^{12} сек^{-1}$, $p_{11кл}^{1} = 3.987 \cdot 10^{9} сек^{-1}$.

Как можно убедиться, учет моментности в статической задаче приводит к повышению жесткости балки, а частоты колебаний находятся в терагерцовом диапазоне.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА и РФФИ (РФ) в рамках совместных научных программ 15RF-063 и 15-53-05093 соответственно.

[1]Ширакский государственный университет им. М. Налбандяна
e-mail: s_sargsyan@yahoo.com
[2]Институт химической физики им. Н. Н. Семенова РАН

А. А. Саркисян, член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян,
Л. И. Маневич, С. А. Тиман

Прикладная теория изгибной деформации упругой тонкой балки на основе моментной теории со стесненным вращением и ее приложение к полимерам

Построена модель изгибной деформации микрополярной упругой тонкой балки со стесненным вращением. Установлена формула для вычисления плотности потенциальной энергии деформации. Решены задачи о статическом равновесии и свободных колебаниях микрополярной балки и показаны специфические эффекты учета моментных напряжений. Даны рекомендации применения построенной модели для полимеров.

Ա. Հ. Սարգսյան, ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ս. Հ. Սարգսյան,
Լ. Ի. Մաննիչ, Ս. Ա. Տիման

Կաշկանդված պտույտներով մոմենտային տեսության հիման վրա առաձգական բարակ ձողի ծռման դեֆորմացիայի կիրառական տեսությունը և նրա կիրառությունը պոլիմերների մոտ

Կառուցված է միկրոպոլյար առաձգական բարակ ձողի կաշկանդված պտույտներով մոդելը: Հաստատվում է բանաձև դեֆորմացիայի պոտենցիալ էներգիայի խտությունը հաշվելու համար: Լուծված են միկրոպոլյար ձողի հավասարակշռության և սեփական տատանումների խնդիրները, և ցույց են տրված մոմենտային լարումների հաշվառման էֆեկտիվ յուրահատկությունները: Կառուցված մոդելի կիրառության վերաբերյալ պոլիմերների մոտ տրվում է երաշխավորություն:

A.H. Sargsyan, corresponding member of NAS RA S. H. Sargsyan,
L. I. Manevich, S. A. Timan

Applied Theory of Bending Deformation of an Elastic Thin Bar Based on Moment Theory with Constrained Rotation and Its Application to Polymers

A model of bending deformation of micropolar elastic thin bar with constrained rotation is constructed. A formula is established for calculation of the density of the potential energy deformation. The problems of static equilibrium and free oscillations of micropolar bar are solved and specific effects of moment stresses are shown. Recommendation is given to apply the constructed model to polymers.

Литература

1. *Иванова Е. А., Кривцов А. М., Морозов Н. Ф.* – Прикладная математика и механика. 2007. Т. 71. Вып. 4. С. 595-615.
2. *Потапов А. И., Лисина С. А., Павлов И. С. и др.* Введение в микро- и наномеханику. Математические модели и методы. Нижегород. гос. техн. ун-т им Р.Е. Алексеева. Нижний Новгород. 2010. 303 с.
3. *Gendelman O.V., Manevitch L. I.* – Inter. J. of Solids and Structures. 1996. V. 33. P. 1781-1798.
4. *Бровко Г. Л.* – Изв. РАН. Механика твердого тела. 2002. № 1. С. 75-91.
5. *Бровко Г. Л., Иванова О. А.* – Изв. РАН. Механика твердого тела. 2008. № 1. С. 22-36.
6. *Саркисян С. О., Маневич Л. И., Тиман С. А.* В: Сб. трудов XVII ежегодной науч. конф. отдела полимеров и композитных материалов. Москва. 15-17 февраля 2016. Полимеры 2016. Изд-во ИХФ РАН. 2016. С. 128-129.
7. *Саркисян С. О., Стрельников И. В., Мазо М.А., Зубова Е. А., Маневич Л. И., Берлин А. А.* – Вестн. Тверского гос. ун-та. Сер. химия. 2016. № 1. С. 33-39.
8. *Зубова Е. А., Стрельников И. А., Балабаев Н. К., Савин А. В. , Мазо М. А., Маневич Л. И.* – Высокомолекулярные соединения. Сер. А. 2017. Т. 59. №1. С. 101-110.
9. *Берлин А. А., Маневич Л. И., Саркисян С. О., Тиман С. А.* – ДНАН РА. 2016. Т. 116. № 3. С. 210-218.
10. *Саркисян С. О.* – Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т. 53. Вып. 2. С. 148-156.
11. *Саркисян С. О.* – Физическая мезомеханика. 2011. Т. 14. № 1. С. 55-66.
12. *Sargsyan S. H.* – J. of Materials Science and Engineering. 2012. V. 2. № 1. P. 98-108.
13. *Саркисян С. О,* – В: Упругость и неупругость. Матер. Междунар. науч. симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 100-летию со дня рождения А. А. Ильюшина. Москва, 20-21 января 2011 г. М. Изд-во МГУ. 2011. С. 231-235.
14. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле. М. Наука. 1967. 444 с.
15. *Григолюк Э. И., Селезов И. Т.* Итоги науки и техники. Механика деформируемого тела. М. ВИНИТИ. 1973. Т. 5. 199 с.