ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 117 2017 № 3

МАТЕМАТИКА

УДК 514.752.44

В. А. Мирзоян

# Нормально плоские риччи-полусимметрические подмногообразия коразмерности два в евклидовых пространствах

(Представлено академиком В.С. Захаряном 27/VI 2017)

**Ключевые слова:** *риччи-полусимметрические подмногообразия, эйнштейновы подмногообразия, конусы над сферами, полуэйнштейновы подмногообразия.*

**1. Введение.** Пусть $M$ – риманово многообразие с римановой связностью $\nabla$ и операторами кривизны $R(X,Y)=\nabla_X\nabla_Y-\nabla_Y\nabla_X-\nabla_{[X,Y]}$, где $X,Y$ – касательные векторные поля на $M$. Операторы $R(X,Y)$ действуют как дифференцирования тензорной алгебры на $M$. Например, если $R_1$ – тензор Риччи типа (1,1), то $(R(X,Y)R_1)(Z)=R(X,Y)R_1(Z)-R_1(R(X,Y)Z)$. Тензорное поле $T$, определенное на $M$, называется параллельным, если $\nabla_X T=0$ для любого $X$, и полупараллельным, если $R(X,Y)T=0$ для любых $X,Y$. Римановы многообразия с полупараллельным тензором Риччи называются риччи-полусимметрическими [1- 6]. В евклидовых пространствах различные классы риччи-полусимметрических подмногообразий, в том числе и гиперповерхности, были исследованы в [3-15]. Настоящая работа посвящена изложению и уточнению как известных результатов по геометрии нормально плоских риччи-полусимметрических подмногообразий коразмерности два [16-21], так и представлению новых результатов по этому классу подмногообразий.

**2. Пространства дефектности и кодефектности.** Пусть $O(E_n)$ – главное расслоение ортонормреперов $\{x,e_1,\cdots,e_n\}$ в евклидовом пространстве $E_n$. Отождествляя точку $x$ с её радиус–вектором, будем иметь (см. [1- 6] )

$$dx=\omega^A e_A,\ de_A=\omega_A^B e_B,\ \omega_B^A+\omega_A^B=0,\ d\omega^A=\omega^B\wedge\omega_B^A,\ d\omega_A^B=\omega_A^C\wedge\omega_C^B,$$
$$A,B,C=1,\cdots,n.$$

Пусть $M - m$ —мерное подмногообразие в $E_n$. Тогда расслоение $O(E_n)$ можно привести к главному расслоению $O(E_n, M)$ адаптированных ортонормреперов $\{x, e_1, \cdots, e_m, e_{m+1}, \cdots, e_n\}$, где $x \in M$, $e_i \in T_x(M)$, $e_\alpha \in T_x^\perp(M)$, $T_x(M)$ и $T_x^\perp(M)$ обозначают касательное и нормальное пространства к $M$ в точке $x$ соответственно, $i, j, k = 1, \cdots, m,$ $\alpha, \beta = m+1, \cdots, n$. По известной схеме [1- 6] имеем

$$\omega^\alpha = 0, \quad \omega_i^\alpha = h_{ij}^\alpha \omega^j, \quad h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha, \quad \bar{\nabla} h_{ij}^\alpha = h_{ijk}^\alpha \omega^k, \quad h_{ijk}^\alpha = h_{ikj}^\alpha,$$

$$\bar{\nabla} h_{ij}^\alpha = dh_{ij}^\alpha + h_{ij}^\beta \omega_\beta^\alpha - h_{kj}^\alpha \omega_i^k - h_{ik}^\alpha \omega_j^k,$$

где $h_{ij}^\alpha$ – компоненты второй фундаментальной формы $\alpha_2$, $\omega_i^j - 1$ – формы римановой связности $\nabla$ на $M$, а $\omega_\alpha^\beta - 1$ – формы нормальной связности $\nabla^\perp$. Если $\alpha_2 = 0$, то подмногообразие называется вполне геодезическим. Компоненты тензоров кривизны $R$ и $R^\perp$ связностей $\nabla$, $\nabla^\perp$ и тензора Риччи $R_1$ определяются по формулам

$$R_{ikl}^j = -\sum_\alpha h_{i[k}^\alpha h_{l]j}^\alpha, \quad R_{\alpha kl}^\beta = -\sum_i h_{i[k}^\alpha h_{l]i}^\beta, \quad R_{ik} = R_{ikl}^l = \sum_\alpha \left( h_{il}^\alpha h_k^{\alpha l} - H^\alpha h_{ik}^\alpha \right),$$

где $h_k^{\alpha l} = h_{kl}^\alpha$, а $H^\alpha = h_{ij}^\alpha \delta^{ij}$ — компоненты вектора средней кривизны $H = H^\alpha e_\alpha$. Если $R = 0$, то подмногообразие называется локально евклидовым. При $R^\perp = 0$ оно называется нормально плоским, а при $R_1 = 0$ – риччи-плоским. Пространства дефектности $T_x^{(0)}$ и относительной дефектности $T_x'$ подмногообразия $M$ в точке $x$ определяются по формулам

$$T_x^{(0)} = \{X \in T_x(M) : R(X,Y) = 0 \ \forall Y \in T_x(M)\},$$

$$T_x' = \{X \in T_x(M) : \alpha_2(X,Y) = 0) \forall Y \in T_x(M)\}.$$

Эти понятия были введены и использованы Чженем и Кюйпером [22]. Числа $\mu_x = \dim T_x^{(0)}$ и $\nu_x = \dim T_x'$ называются *индексом дефектности* и *индексом относительной дефектности* подмногообразия $M$ в точке $x$. Имеет место включение $T_x' \subset T_x^{(0)}$. Интегральное многообразие $M^{(0)}$ распределения $T^{(0)}$ является локально евклидовым в индуцированной метрике и вполне геодезическим в $M$. Интегральное многообразие распределения $T'$ представляет собой плоскость [22]. Ортогональное дополнение $T_x^{(1)}$ пространства $T_x^{(0)}$ в $T_x(M)$ относительно римановой метрики на $M$ называется пространством кодефектности в точке $x$, а его размерность – индексом кодефектности $M$ в этой точке. Подмногообразие $M$ с ненулевым индексом дефектности называется полуэйнштейновым, если тензор Риччи $R_1$ в каждой точке имеет на $T_x^{(1)}$ только одно ненулевое собственное значение [2].

**3. Нормально плоские подмногообразия.** Пусть $M -$ нормально плоское подмногообразие, т.е. $R_{\alpha ij}^\beta = 0$. Тогда матрицы $\| h_{ij}^\alpha \|$ коммутируют и в некотором ортонормрепере могут быть одновременно приведены к диагональному виду $\left\|\lambda_i^\alpha \delta_{ij}\right\|$. Для компонент тензора Риччи получим

$$R_{ik} = \rho_i\, \delta_{ik}\,, \qquad \rho_i = \sum_\alpha \left( \left(\lambda_i^\alpha\right)^2 - H^\alpha \lambda_i^\alpha \right).$$

Нормальные векторы $n_i = \lambda_i^\alpha e_\alpha$ называются *главными векторами кривизны* (г.в.к.) нормально плоского подмногообразия в $E_n$. Легко видеть, что $H = n_1 + \ldots + n_m$. Если $<\ ,\ >$ − скалярное произведение в $E_n$, то, вычисляя, получим $\rho_i = < n_i\,, n_i > - < H, n_i > = |n_i|^2 - < H, n_i >$.

Пусть в точке $x$ нормально плоское $m$-мерное подмногообразие $M$ в $E_n$ имеет $q$ различных г.в.к. $n_1, \ldots, n_q$ с кратностями $p_1, \ldots, p_q$ соответственно, $p_1 + \ldots + p_q = m$. Через $F_x^{(\varphi)}$ $(\varphi = 1, \cdots, q)$ обозначим $p_\varphi$-мерное подпространство касательного пространства $T_x(M)$, на котором каждая матрица $\left\|\lambda_i^\alpha \delta_{ij}\right\|$ имеет только одно собственное значение $\lambda_{(\varphi)}^\alpha$ кратности $p_\varphi$. В указанном смысле будем говорить, что $F_x^{(\varphi)}$ является собственным подпространством, соответствующим г.в.к. $n_\varphi$. Справедливо разложение $T_x(M) = F_x^{(1)} \oplus \ldots \oplus F_x^{(q)}$. Будем предполагать, что в некоторой области на $M$ подпространства $F_x^{(\varphi)}$ имеют постоянные размерности, и через $F^{(\varphi)}$ обозначать соответствующее распределение. Подпространства $F_x^{(\varphi)}$ обладают рядом важных свойств ([5, 11, 12].

Главный вектор кривизны $n_\varphi$ называется *регулярным*, если $F_x^{(\varphi)} \subset T_x^{(1)}$, и *сингулярным*, если $F_x^{(\varphi)} \subset T_x^{(0)}$ [11]. Размерность линейной оболочки регулярных векторов называется *индексом регулярности* и обозначается через $i_R$, а число ненулевых сингулярных векторов – *индексом сингулярности* подмногообразия $M$ и обозначается через $i_S$. Ненулевые сингулярные г.в.к. однократны, взаимно ортогональны и ортогональны также всем остальным г.в.к. Справедливо неравенство $0 \le \mu - \nu + i_R \le n - m$ [11].

Для нормально плоского подмногообразия $M$ в $E_n$ приведённая выше формула фактически устанавливает соответствие между собственными значениями $\rho_i$ тензора Риччи и его г.в.к. $n_i$. Пусть тензор Риччи $R_1$ подмногообразия $M$ имеет нулевое собственное значение и различные ненулевые собственные значения $\rho_1, \cdots, \rho_t$ с учётом их кратностей и пусть $W^{(1)}, \cdots, W^{(t)}$ обозначают множество всех регулярных г.в.к., соответствующих собственным значениям $\rho_1, \cdots, \rho_t$ соответственно. Очевидно, что если векторы $n_i$ и $n_j$, $i \ne j$, принадлежат множеству $W^{(\sigma)}$, $(\sigma, \tau = 1, \ldots, t)$, то они удовлетворяют условию $|n_i|^2 - \langle n_i, H \rangle = \ = |n_j|^2 - \langle n_j, H \rangle \quad (= \rho_\sigma)$. Если же $n_i \in W^{(\sigma)}$, $n_j \in W^{(\tau)}$, $\sigma \ne \tau$, то $|n_i|^2 - \langle n_i, H \rangle \ne \ \ne |n_j|^2 - \langle n_j, H \rangle$. Нулевому собственному значению тензора Риччи $R_1$ соответствуют нулевой г.в.к., все сингулярные г.в.к. и некоторые регулярные г.в.к. Это множество будем обозначать через $W^{(0)}$. Справедливо следующее утверждение [12]: *если в какой-либо группе* $W^{(\sigma)}$, $\sigma > 0$, *имеются неравные коллинеарные векторы, то их число равно двум.*

Пусть $M$ является $m$-мерным нормально плоским подмногообразием в $E_n$. Для того, чтобы $M$ было риччи-полусимметрическим, необходимо и достаточно (см. [4]), чтобы любые два его г.в.к., $n_i$ и $n_j$, удовлетворяли одному из следующих условий: $\left|n_i\right|^2 - \langle n_i, H\rangle = \left|n_j\right|^2 - \langle n_j, H\rangle$ или $\langle n_i, n_j\rangle = 0$.

**Лемма.** *Для того, чтобы нормально плоское подмногообразие* $M$ *в* $E_n$ *было риччи-полусимметрическим, необходимо и достаточно, чтобы его главные векторы кривизны, соответствующие различным собственным значениям тензора Риччи, были ортогональны (что равносильно ортогональности векторов группы* $W^{(\sigma)}$ *векторам группы* $W^{(\tau)}$ *при* $\sigma \neq \tau$, $\sigma, \tau = 0, 1, \cdots, t$*).*

**Следствие 1.** *Если группа главных векторов кривизны* $W^{(0)}$ *нормально плоского риччи-полусимметрического подмногообразия содержит ненулевой вектор, то число собственных значений тензора Риччи не превосходит коразмерность подмногообразия. Если же группа* $W^{(0)}$ *содержит только нулевой вектор, то число всех собственных значений тензора Риччи может превосходить коразмерность подмногообразия на единицу. Если число групп главных векторов кривизны* $W^{(0)}, W^{(1)}, \cdots, W^{(t)}$ *нормально плоского риччи-полусимметрического подмногообразия равно его коразмерности, то в каждой из групп* $W^{(1)}, \cdots, W^{(t)}$ *все векторы коллинеарны.*

**Следствие 2.** *Ни одна из групп главных векторов кривизны* $W^{(\rho)}$, $\rho > 0$, *нормально плоского риччи-полусимметрического подмногообразия не содержит однократного вектора, ортогонального остальным векторам этой же группы. Если регулярные главные векторы кривизны, входящие в* $W^{(0)}$, *однократны, то их число должно быть не меньше двух, причём ни один из них не может быть ортогонален остальным регулярным главным векторам кривизны, входящим в* $W^{(0)}$.

**4. Риччи-полусимметрические подмногообразия коразмерности два с двумя ненулевыми собственными значениями тензора Риччи.** Справедлива следующая

**Теорема 1** [16]. *Пусть* $M$ *является нормально плоским риччи-полусимметрическим подмногообразием коразмерности* $p \geq 2$ *евклидова пространства* $E_n$. *Если число различных ненулевых собственных значений тензора Риччи равно коразмерности, то их кратности* $\geq 2$, *индексы дефектности и относительной дефектности совпадают, а само подмногообразие* $M$ *разлагается в прямое произведение* $p$ *риччи-полусимметрических гиперповерхностей и некоторой плоскости (возможно нулевой размерности).*

Из этой теоремы следует, что нормально плоское риччи-полусимметрическое подмногообразие $M$ коразмерности два в $E_n$ с двумя ненулевыми собственными значениями тензора Риччи разлагается в прямое произведение двух риччи-полусимметрических гиперповерхностей и некоторой плоскости. Риччи-полусимметрические гиперповерхности геометрически описываются следующей теоремой.

**Теорема 2** [3]. *В евклидовом пространстве $E_{m+1}$ гиперповерхность $M$ удовлетворяет условию $R(X,Y)R_1=0$ тогда и только тогда, когда она является открытой частью одного из следующих подмногообразий: (а) гиперсферы $S^m$ в $E_{m+1}$; (б) гиперконуса вращения $C^m$ в $E_{m+1}$; (в) произведения $S^n \times E_{m-n}$, где $S^n$ гиперсфера в $E_{n+1}$, а $E_{m-n}-(m-n)$-мерная плоскость, $n=2,...,m-1$; (г) произведения $C^n \times E_{m-n}$, где $C^n-$ гиперконус вращения в $E_{n+1}$, а $E_{m-n}-(m-n)$-мерная плоскость, $n=2,...,m-1$; (д) гиперповерхности ранга $\leq 2$; (е) полуэйнштейновой гиперповерхности $K^m$ в $E_{m+1}$, $m\geq 5$, которая несет ортогональную сопряженную систему, состоящую из двух сфер, $S^p(r_1)$, $p\geq 2$, и $S^q(r_2)$, $q\geq 2$, и прямой $L$, и представляет собой конус с (прямая $L$ в качестве образующей) над прямым произведением $S^p(r_1)\times S^q(r_2)$, которое является эйнштейновым подмногообразием в $E_{m+1}$ и принадлежит гиперсфере $S^m(r)\subset E_{m+1}$; (ж) произведения $K^n \times E_{m-n}$, где $K^n-$ полуэйнштейнова гиперповерхность в $E_{n+1}$, описываемая, как и $K^m$ в п. (е), а $E_{m-n}-$ $(m-n)$-мерная плоскость, $n=5,...,m-1$.*

Согласно теореме 1 исследуемый класс риччи-полусимметрических подмногообразий содержится среди попарных произведений гиперповерхностей, перечисленных в теореме 2. Однако не каждое такое произведение будет иметь два ненулевых собственных значения тензора Риччи. Например, произведение двух сфер $S^{m_1}(r_1)\times S^{m_2}(r_2)$, при выполнении условия $\frac{1-m_1}{r_1^2}=\frac{1-m_2}{r_2^2}$, будет эйнштейновым. Поэтому при составлении попарных произведений гиперповерхностей, перечисленных в теореме 2, необходимо проверять наличие двух различных собственных значений тензора Риччи.

**5. Риччи-полусимметрические подмногообразия коразмерности два, удовлетворяющие условию $i_R=1$, $\mu=\nu$.** Рассмотрим теперь случай, когда в евклидовом пространстве $E_n$ тензор Риччи $m-$мерного нормально плоского риччи-полусимметрического подмногообразия $M$ коразмерности два имеет только одно ненулевое собственное значение. Тогда $M$ допускает или только одну группу г.в.к. $W^{(1)}$, или только две группы г.в.к. $W^{(0)}$ и $W^{(1)}$, которые соответствуют нулевому и ненулевому собственным значениям тензора Риччи. В первом случае подмногообразие $M$ является эйнштейновым (но не риччи-плоским), а во втором случае оно имеет более сложную структуру. Поскольку $n-m=2$, то $0\leq \mu-\nu+i_R\leq 2$. Из этого неравенства следует, что необходимо рассмотреть всего три случая: (a) $i_R = 1$, $\mu = \nu$, (b) $i_R = 1$, $\mu = \nu + 1$, (c) $i_R = 2$, $\mu = \nu$.

Рассмотрим случай (a). Условие $i_R = 1$ означает, что размерность линейной оболочки множества всех регулярных г.в.к. равна 1. Поскольку тензор Риччи имеет ненулевое собственное значение, то этому собственному значению соответствует некоторый регулярный г.в.к. Следовательно, все остальные регулярные г.в.к. коллинеарны этому вектору и все они принадлежат $W^{(1)}$. Тогда группа $W^{(1)}$ состоит или из одного регулярного г.в.к., имеющего кратность, или из двух коллинеарных регулярных г.в.к. Условие $\mu = \nu$ означает, что группа $W^{(0)}$ не содержит ненулевых сингулярных г.в.к. Тогда она либо пуста, либо состоит только из нулевого г.в.к. Таким образом, в рассмотренном случае выполняются условия следующей теоремы (см. [11, 12]): *нормально плоское $m$-мерное подмногообразие $M$ в $E_n$ с двумя и более ненулевыми главными векторами кривизны является гиперповерхностью тогда и только тогда, когда все эти векторы коллинеарны*.

Согласно этой теореме в случае (a) нормально плоское риччи-полусимметрическое подмногообразие является риччи-полусимметрической гиперповерхностью. На основании теоремы 2 можем сформулировать следующий результат.

**Теорема 3.** *В евклидовом пространстве $E_{m+2}$ $m$-мерное нормально плоское риччи-полусимметрическое подмногообразие $M$, удовлетворяющее условиям $i_R = 1$, $\mu = \nu$, является риччи-полусимметрической гиперповерхностью в некотором $E_{m+1} \subset E_{m+2}$. Если $\mu = \nu = 0$, то $M$ локально является $m$-мерной сферой в $E_{m+1} \subset E_{m+2}$ или двумерной поверхностью с ненулевой гауссовой кривизной в $E_3 \subset E_4$. Если $\mu = \nu = 1$, то $M$ локально является или гиперконусом вращения $C^m$ в $E_{m+1}$, или произведением $S^{m-1}(r) \times L$ сферы и прямой в $E_{m+1} \subset E_{m+2}$, или трёхмерной гиперповерхностью ранга два в $E_4 \subset E_5$, или полуэйнштейновой гиперповерхностью $K^m$ в $E_{m+1} \subset E_{m+2}$, $m \geq 5$, описанной в п. (e) теоремы 4.2. Если $\mu = \nu \geq 2$, то $M$ локально является или произведением $S^n(r) \times L_{m-n}$, или произведением $C^n \times L_{m-n}$, или гиперповерхностью ранга $\leq 2$, или произведением $K^n \times L_{m-n}$ в $E_{m+1} \subset E_{m+2}$, где $L_{m-n}$ представляет собой плоскость размерности $m - n$.*

**6. Риччи-полусимметрические подмногообразия коразмерности два, удовлетворяющие условиям $i_R = 1$, $\mu = \nu + 1$.** В случае (b) справедливы следующие утверждения.

**Теорема 4.** *Нормально плоское риччи-полусимметрическое $m$-мерное подмногообразие $M$ в $E_{m+2}$, удовлетворяющее условиям $i_R = 1$, $\mu = \nu + 1$ и допускающее только один регулярный г.в.к. кратности $p \geq 2$, является, с точностью до изометрии, открытой частью одного из следующих произведений:* $S^p(r) \times L^{m-p}$, $C^{p+1} \times L^{m-p-1}$, $\tilde{C}^{p+1} \times E^{m-p-1}$, $\tilde{C}^{p+1} \tilde{\times} L^{m-p-1}$,

$(\tilde{C}^{p+1} \tilde{\times} L^{m-p-1-q}) \times E^q$, *где* $L^{m-p}$, $L^{m-p-1}$, $L^{m-p-1-q}$ *являются гиперповерхностями ранга 1,* $E^{m-p-1}, E^q$ *− плоскостями,* $C^{p+1}$ *− конусом над сферой* $S^k(r)$, $\tilde{C}^{k+1}$ *− искривлённым конусом над сферой* $S^k(r)$, *который изометричен конусу* $C^{k+1}$, $0 < q \le m - p - 2$, *а* $\tilde{\times}$ *обозначает знак сплетающегося произведения.*

Сплетающиеся произведения подмногообразий были определены в [15].

**Теорема 5.** *Нормально плоское риччи-полусимметрическое* $m$*-мерное подмногообразие* $M$ *в евклидовом пространстве* $E_{m+2}$, *удовлетворяющее условиям* $i_R = 1$, $\mu = \nu + 1$ *и допускающее два коллинеарных (и неравных) регулярных г.в.к., локально представляет собой или*

*а) подмногообразие кодефектности два, или*

*б) прямое произведение (*$m-n$*)-мерной гиперповерхности ранга один в* $E_{m-n+1}$ *и полуэйнштейновой гиперповерхности* $K^n$ *в* $E_{n+1}$ *(*$n \ge 5$*), описанной в п. (е) теоремы 2.*

**7. Риччи-полусимметрические подмногообразия коразмерности два, удовлетворяющие условиям** $i_R = 2$, $\mu = \nu$. Пусть $m$-мерное нормально плоское риччи-полусимметрическое подмногообразие $M$ евклидова пространства $E_{m+2}$ удовлетворяет этим условиям. Первое условие означает, что группа $W^{(1)}$ регулярных г.в.к. содержит два линейно независимых вектора, а остальные векторы являются их линейными комбинациями. Второе условие означает, что пространства $T_x^{(0)}$ и $T'_x$ совпадают. Следовательно, подмногообразие $M$ допускает только нулевой сингулярный г.в.к. Если $T'_x$ является нулевым пространством, то $M$ – эйнштейново подмногообразие. При $\dim T'_x \ge 1$ подмногообразие $M$ является полуэйнштейновым.

Рассмотрим случай, когда подмногообразие $M$ имеет только два различных линейно независимых г.в.к. $n_1, n_2$ с кратностями $p_1, p_2$ соответственно. В этом случае имеем $\rho = |n_1|^2 - \langle H, n_1 \rangle = |n_2|^2 - \langle H, n_2 \rangle$, где $\rho$ – единственное ненулевое собственное значение тензора Риччи, а $H = p_1 n_1 + p_2 n_2$ – вектор средней кривизны. Подставляя значение $H$ в это равенство, получим $(p_1 - 1)|n_1|^2 - (p_1 - p_2)\langle n_1, n_2 \rangle - (p_2 - 1)|n_2|^2 = 0$ Отсюда следует, что необходимо рассмотреть всего три случая: 1) $p_1 = p_2 = 1$, 2) $p_1 \ge 2$, $p_2 = 1$, $|n_1|^2 = \langle n_1, n_2 \rangle$, 3) $p_1 \ge 2$, $p_2 \ge 2$. Справедлива следующая

**Теорема 6.** *Пусть тензор Риччи* $m$*-мерного нормально плоского риччи-полусимметрического подмногообразия* $M$ *индекса дефектности* $\mu$ *евклидова пространства* $E_{m+2}$ *допускает только одно ненулевое собственное значение и пусть этому собственному значению соответствуют только два линейно независимых главных вектора кривизны* $n_1, n_2$ *с кратностями* $p_1$, $p_2$ *соответственно. Тогда* $M$ *локально является или подмногообразием кодефектности два (если* $p_1 = p_2 = 1$*), или оно изометрично* *цилиндру с $\mu$-мерными плоскими образующими над некоторым эйнштейновым каналовым подмногообразием $\tilde{M}$ коразмерности три или цилиндру с ( $\mu-1$ )-мерными плоскими образующими над конусом, построенному над $\tilde{M}$ (если $p_1 \geq 2,\ p_2 = 1$, $|n_1|^2 = \langle n_1, n_2 \rangle$ ), или является прямым произведением двух сфер и плоскости, или прямым произведением сферы, конуса над сферой и плоскости, или прямым произведением двух конусов над сферами и плоскости, или полуэйнштейновым подмногообразием, которое представляет собой прямое произведение конуса над произведением двух сфер и плоскости, причём произведение этих сфер является $(p_1+p_2)$-мерным эйнштейновым подмногообразием евклидова пространства $E_{m-\mu+3}$ и принадлежит гиперсфере этого пространства (если $p_1 \geq 2, p_2 \geq 2$ ).*

Рассмотрим теперь случай, когда группа $W^{(1)}$ содержит три г.в.к. Пусть $m$-мерное риччи-полусимметрическое подмногообразие $M$ евклидова пространства $E_{m+2}$ удовлетворяет условиям $i_R = 2$, $\mu = \nu$ и допускает только три г.в.к. $n_1$, $n_2$, $n_3$ с кратностями $p_1 \geq 2$, $p_2 \geq 2$, $p_3 \geq 2$ соответственно. Риччи-полусимметричность подмногообразия $M$ равносильна условиям

$$\rho = |n_1|^2 - \langle n_1, H \rangle = |n_2|^2 - \langle n_2, H \rangle = |n_3|^2 - \langle n_3, H \rangle, \tag{1}$$

где $H = p_1 n_1 + p_2 n_2 + p_3 n_3$. Будем считать, что векторы $n_1$, $n_2$ линейно независимы и $n_3 = \eta n_1 + \theta n_2$. Тогда $H = (p_1 + \eta p_3) n_1 + (p_2 + \theta p_3) n_2$ и, подставляя в (1), получим

$$(1 - p_1 - \eta p_3)|n_1|^2 + (p_1 - p_2 + (\eta - \theta) p_3) < n_1, n_2 > -(1 - p_2 - \theta p_3)|n_1|^2 = 0,$$

$$(1 - \eta^2 + (\eta - 1) p_1 + (\eta^2 - \eta) p_3)|n_1|^2 + (-2\eta\theta + \theta p_1 + (\eta - 1) p_2 + (2\eta\theta - \theta) p_3) < n_1, n_2 > +$$
$$+ (-\theta^2 + \theta p_2 + \theta^2 p_3)|n_2|^2 = 0.$$

Эта система равносильна условию риччи-полусимметричности. В дальнейшем будем предполагать, что векторы $n_1, n_2$ взаимно ортогональны и имеют равные модули. Тогда эта система будет иметь следующий вид:

$$p_1 + \eta p_3 = p_2 + \theta p_3, \quad \eta^2 (p_3 - 1) + \eta (p_1 - p_3) + 1 - p_1 = \theta^2 (1 - p_3) - \theta p_2. \tag{2}$$

Из первого уравнения следует, что в базисе ( $n_1, n_2$ ) вектор $H$ имеет равные координаты и, следовательно, составляет с векторами $n_1, n_2$ равные углы. Пусть в системе (2) $\eta = 1$. Тогда

$$\theta p_3 = p_1 - p_2 + p_3, \quad \theta(\theta(1 - p_3) - p_2) = 0.$$

Если $\theta = 0$, то вектор $n_3$ совпадает с $n_1$. Если же $\theta \neq 0$, то $\theta(1 - p_3) = p_2$. Подставляя значение $\theta$, получим $(1 - p_3)(p_1 + p_3) = p_2$, что невозможно. Следовательно, при $\eta = 1$ возможен только случай $\theta = 0$. Аналогично, если в (2) $\theta = 1$, то

$$\eta p_3 = p_2 - p_1 + p_3, \quad \eta(\eta(p_3 - 1) + p_1) = 0.$$

При $\eta = 0$ вектор $n_3$ совпадает с $n_2$. Если же $\eta \neq 0$, то $p_1 = (p_2 + p_3)(1 - p_3)$, что также невозможно. Следовательно, при $\theta = 1$ возможен только случай $\eta = 0$. В последующем эти случаи будем исключать из рассмотрения.

Из первого уравнения системы (2) следует, что $\eta = \theta$ тогда и только тогда, когда $p_1 = p_2$. Более того, если $\eta = \theta$, то второе уравнение, квадратное относительно $\eta$, имеет решение, поскольку $1 - p_1 \leq 0$. Чтобы исследовать систему (2) в общем случае, из первого уравнения значение $\eta$ подставим во второе. В результате получим

$$\begin{gathered} 2p_3^2(p_3 - 1)\theta^2 + (3p_2p_3^2 - p_1p_3^2 - 2p_2p_3 + 2p_1p_3 - p_3^3)\theta + \\ + p_3^2(1 - p_2) - (p_1 - p_2)^2 - p_2p_3(p_1 - p_2) = 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Поскольку при $p_1 \geq p_2$ свободный член этого уравнения отрицателен, то уравнение имеет решение. Например, при $p_1 = p_2 = p_3 = 2$ получаем $2\theta^2 + 2\theta - 1 = 0$ и, следовательно, $\theta = \eta = (-1 \pm \sqrt{3})/2$. Ответ на вопрос о существовании решения этого уравнения при $p_1 \leq p_2$ может быть следующим. Если из первого уравнения системы (2) выразить $\theta$ через $\eta$ и подставить во второе, то получим

$$\begin{gathered} 2p_3^2(p_3 - 1)\eta^2 + (3p_1p_3^2 - p_2p_3^2 - 2p_1p_3 + 2p_2p_3 - p_3^3)\eta + \\ + p_3^2(1 - p_1) - (p_1 - p_2)^2 - p_2p_3(p_2 - p_1) = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

При $p_1 \leq p_2$ свободный член этого уравнения отрицателен, и мы можем определить $\eta$, а следовательно, и $\theta$. Поскольку $\theta$ должно удовлетворять уравнению (3), то заключаем, что уравнение (3) имеет решение также при $p_1 \leq p_2$. Следовательно, уравнения (3) и (4) имеют решения при любых значениях кратностей $p_1,\ p_2,\ p_3$.

Таким образом, система (2), обеспечивающая выполнение условия риччи-полусимметричности (в данном случае полуэйнштейновости), всегда имеет решение относительно $\eta$ и $\theta$, если заданы кратности $p_1,\ p_2,\ p_3$. Очевидно, что в рассматриваемом случае $\eta$ и $\theta$ являются постоянными, что и будем предполагать в дальнейшем.

Перейдём к геометрическому описанию подмногообразия $M$. Пусть $p_1 \geq 2$, $p_2 \geq 2$, $p_3 \geq 2$ и пусть $T_x^{(n_1)}$, $T_x^{(n_2)}$, $T_x^{(n_3)}$ обозначают собственные подпространства, соответствующие векторам $n_1$, $n_2$ и $n_3$ ($\dim T_x^{(n_1)} = p_1$, $\dim T_x^{(n_2)} = p_2$, $\dim T_x^{(n_3)} = p_3$, $\dim T_x^{(0)} = \mu$). Будем предполагать, что ортонормрепер $\{x, e_1, ..., e_m, e_{m+1}, ..., e_n\}$ выбран так, что в каждой точке $x \in M$, $e_{i_1} \in T_x^{(n_1)}$, $e_{i_2} \in T_x^{(n_2)}$, $e_{i_3} \in T_x^{(n_3)}$, $e_r \in T_x^{(0)}$, где индексы принимают следующие значения:

$$i, j, k = 1, \cdots, m, \quad \alpha, \beta = m+1,\ m+2, \quad i_1, j_1, k_1 = 1, \cdots, p_1,$$

$i_2, j_2, k_2 = p_1 + 1, \cdots, p_1 + p_2,$

$$i_3, j_3, k_3 = p_1 + p_2 + 1, \cdots, p_1 + p_2 + p_3,\ r, s, t, = p_1 + p_2 + p_3 + 1, \cdots, m,$$

$\varphi, \psi,\ \chi = 1,\ 2,\ 3$.

На подмногообразии $M$ имеем (см. п.2)

$$\omega^\alpha = 0, \quad \omega_i^\alpha = \lambda_i^\alpha \delta_{ij} \omega^j, \quad \delta_{ij} \lambda_i^\beta \omega_\beta^\alpha + \left( d\lambda_i^\alpha \right) \delta_{ij} + \left( \lambda_j^\alpha - \lambda_i^\alpha \right) \omega_j^i = h_{ijk}^\alpha \omega^k. \tag{5}$$

С учетом принятых обозначений можем написать $\lambda_{i_1}^\alpha = \lambda_{(1)}^\alpha$, $\lambda_{i_2}^\alpha = \lambda_{(2)}^\alpha$, $\lambda_{i_3}^\alpha = \lambda_{(3)}^\alpha$, $\lambda_r^\alpha = 0$. Отсюда и из (5) следует, что $\omega_r^\alpha = 0$. Так как г.в.к. $n_1$ и $n_2$ взаимно ортогональны, то нормальные векторы $e_{m+1}$ и $e_{m+2}$ можно выбрать так, чтобы $e_{m+1}$ был сонаправлен с вектором $n_1$, а $e_{m+2}$ – с вектором $n_2$. Тогда

$$n_1 = \lambda_{(1)}^{m+1} e_{m+1}, \ n_2 = \lambda_{(2)}^{m+2} e_{m+2}, \ n_3 = \eta\, \lambda_{(1)}^{m+1} e_{m+1} + \theta\, \lambda_{(2)}^{m+2} e_{m+2},$$
$$H = (p_1 + \eta p_3) \lambda_{(1)}^{m+1} e_{m+1} + (p_2 + \theta p_3) \lambda_{(2)}^{m+2} e_{m+2}.$$

где $\lambda_{(1)}^{m+1} > 0$, $\lambda_{(2)}^{m+2} > 0$. Поскольку векторы $n_1$ и $n_2$ имеют равные модули, то $\lambda_{(1)}^{m+1} = \lambda_{(2)}^{m+2} = \lambda$. Если в последнем уравнении системы (5) индексам придавать всевозможные допустимые значения и каждый раз учитывать уже полученные результаты, то в итоге придём к соотношениям

$$h_{i_\varphi j_\varphi k}^\alpha = 0, \ i_\varphi \neq j_\varphi, \ h_{rsk}^\alpha = h_{i_\varphi i_\varphi i_\varphi}^\alpha = h_{i_1 j_1 j_2}^\alpha = h_{i_2 i_2 j_1}^\alpha = h_{i_3 i_3 j_1}^\alpha = h_{i_3 i_3 j_2}^\alpha = h_{i_1 i_1 j_3}^\alpha = h_{i_2 i_2 j_3}^\alpha = 0,$$
$$h_{i_1 j_2 r}^\alpha = h_{i_1 j_3 r}^\alpha = h_{i_2 j_3 r}^\alpha = h_{j_2 r k}^{m+1} = h_{i_1 r k}^{m+2} = 0, \ \ h_{i_1 i_1 r}^\alpha = h_{j_1 j_1 r}^\alpha, \ i_1 = j_1, \ h_{i_1 i_1 r}^{m+1} = h_{i_2 i_2 r}^{m+2},$$
$$\eta h_{i_1 i_1 r}^{m+1} - \theta h_{i_1 i_1 r}^{m+2} = h_{i_3 i_3 r}^{m+1}, \quad \theta h_{i_1 i_1 r}^{m+1} + \eta h_{i_1 i_1 r}^{m+2} = h_{i_3 i_3 r}^{m+2}, \quad \theta h_{i_3 i_3 r}^{m+1} = \eta h_{i_3 i_3 r}^{m+2}, \tag{6}$$
$$\theta h_{i_1 j_2 k_3}^{m+1} = (\eta - 1) h_{i_1 j_2 k_3}^{m+2}, \quad (\theta - 1) h_{i_1 j_2 k_3}^{m+1} = \eta h_{i_1 j_2 k_3}^{m+2}, \quad h_{i_1 j_2 k_3}^{m+1} = -h_{i_1 j_2 k_3}^{m+2} \tag{7}$$

и следующей дифференциальной системе:

$$d\lambda = h_{i_1 i_1 r}^{m+1} \omega^r, \ \lambda \omega_{i_1}^{j_2} = h_{i_1 j_2 k_3}^{m+1} \omega^{k_3}, \ \theta\lambda \omega_{i_1}^{j_3} = h_{i_1 j_3 k_2}^{m+1} \omega^{k_2}, \ \eta\lambda \omega_{j_3}^{i_2} = h_{i_2 j_3 k_1}^{m+1} \omega^{k_1},$$
$$\lambda \omega_{j_1}^r = h_{i_1 i_1 r}^{m+1} \omega^{j_1}, \ \lambda \omega_{j_2}^r = h_{i_1 i_1 r}^{m+1} \omega^{j_2}, \ \eta\lambda \omega_{j_3}^r = (\eta h_{i_1 i_1 r}^{m+1} - \theta h_{i_1 i_1 r}^{m+2}) \omega^{j_3}, \tag{8}$$
$$\lambda \omega_{m+1}^{m+2} = h_{i_1 i_1 r}^{m+2} \omega^r, \ \omega_{i_1}^{m+2} = \omega_{j_2}^{m+1} = \omega_r^\alpha = 0.$$

Из системы (6) следует, что $h_{i_1 i_1 r}^{m+2} = 0$, $h_{i_3 i_3 r}^{m+1} = \eta h_{i_1 i_1 r}^{m+1}$, $h_{i_3 i_3 r}^{m+2} = \theta h_{i_1 i_1 r}^{m+1}$, а из (7) имеем $(\eta + \theta - 1) h_{i_1 j_2 k_3}^{m+1} = 0$. Если $(\eta + \theta - 1) \neq 0$, то $h_{i_1 j_2 k_3}^{m+1} = 0$ для любых допустимых значений нижних индексов. В этом случае из (8) следует, что $\omega_{i_1}^{j_2} = \omega_{i_1}^{j_3} = \omega_{i_3}^{j_2} = 0$. Дифференцируя внешним образом уравнение $\omega_{i_1}^{j_2} = 0$ и учитывая независимость форм $\omega^{i_1} \wedge \omega^{j_2}$, получим $\sum_r (h_{i_1 i_1 r}^{m+1})^2 = 0$ или $h_{i_1 i_1 r}^{m+1} = 0$. Следовательно, $\omega_{i_1}^r = \omega_{j_2}^r = \omega_{k_3}^r = 0$ и распределения $T^{(n_1)}$, $T^{(n_2)}$, $T^{(n_3)}$, $T^{(0)}$ параллельны на подмногообразии $M$. Тогда они интегрируемы и вполне омбиличны в $E_{m+2}$. Интегральные многообразия распределений $T^{(n_1)}$, $T^{(n_2)}$, $T^{(n_3)}$ представляют собой сферы размерностей $p_1$, $p_2$, $p_3$ соответственно, а интегральное многообразие распределения $T^{(0)}$ является $\mu$-мерной плоскостью (см., например, [5, 11]). Поскольку эти распределения сопряжены относительно второй фундаментальной формы, то подмногообразие $M$ разлагается в прямое произведение их интегральных многообразий, т.е. является прямым произведением трёх сфер и плоскости, что невозможно, поскольку такое произведение имеет существенную коразмерность три. Если $\eta+\theta-1=0$, то, подставляя в (2) $\theta=1-\eta$, будем иметь

$$2\eta p_3 = p_2 - p_1 + p_3, \quad 2(p_3-1)\eta^2 + (p_1 - p_3 + 2 - 2p_3 - p_2)\eta + p_2 + p_3 - p_1 = 0 .$$

Отсюда путём прямого вычисления получим

$$(p_2 + p_3 - p_1)\left(\frac{p_2 + p_3 - p_1}{2p_3^2}(p_3-1) + \frac{p_1 - p_2 - 3p_3 + 2}{2p_3} + 1\right) = 0 .$$

Если $p_2 - p_1 + p_3 = 0$, то $\eta = 0$ и, следовательно, $\theta = 1$. Тогда $n_3 = n_2$. Если же

$$\frac{p_2 + p_3 - p_1}{2p_3^2}(p_3-1) + \frac{p_1 - p_2 - 3p_3 + 2}{2p_3} + 1 = 0 ,$$

то $p_2 = p_1 + p_3$ и , следовательно, $\eta = 1$. В этом случае вектор $n_3$ совпадает с вектором $n_2$. Итак, справедлива следующая

**Теорема 7.** *В евклидовых пространствах не существуют нормально плоские риччи-полусимметрические (в частности, полуэйнштейновы) подмногообразия коразмерности два, удовлетворяющие условиям* $i_R = 2$, $\mu = \nu$ *и допускающие три главных вектора кривизны, из которых два взаимно ортогональны и имеют равные модули, а третий не коллинеарен ни одному из них.*

Национальный политехнический университет Армении

**В. А. Мирзоян**

**Нормально плоские риччи-полусимметрические подмногообразия коразмерности два в евклидовых пространствах**

Описанио локальное строение нормально плоских риччи-полусимметрических подмногообразий коразмерности два в евклидовых пространствах.

Վ. Ա. Միրզոյան

**Երկու կոչափի նորմալ հարթ րիչչի-կիսասիմետրիկ ենթաբազմաձևությունները էվկլիդեսյան տարածություններում**

Աշխատանքը նվիրված է երկու կոչափի նորմալ հարթ րիչչի-կիսասիմետրիկ ենթաբազմաձևությունների լոկալ կառուցվածքի նկարագրությանը էվկլիդեսյան տարածություններում:

**V. A. Mirzoyan**

**Normally Flat Ricci-Semisymmetric Submanifolds of Codimention Two in Euclidean Spaces**

The description of local structure of normally flat Ricci-semisymmetric submanifolds of codimension two in Euclidean space is presented.

## Литература


1. *Lumiste Ü.* Semiparallel submanifolds in space forms. New York: Springer.2009. - 306 p.
2. *Мирзоян В.* . – Изв. вузов. Математика. 1992. № 6. С. 80-89.
3. *Мирзоян В.А*. – Матем. сб. 2000. Т. 191. № 9. С. 65-80.
4. *Мирзоян В.А*. – Изв. РАН. Сер. матем. 2003. Т. 67. № 5. С. 107-124.
5. *Мирзоян В.А*. – Матем. сб. 2006. Т. 197. № 7. С. 47-76.
6. *Мирзоян В.А*. – Матем. сб. 2008. Т. 199. № 3. С. 69-94.
7. *Мирзоян В. А., Мачкалян Г. С.* – Математика в высшей школе. 2008. Т. 4. № 4. С. 31-41.
8. *Мачкалян Г. С.* – Математика в высшей школе. 2009. Т. 5. № 3. С.14-21.
9. *Мирзоян В. А., Мачкалян Г. С.* – ДНАН РА. 2009. Т. 109. № 2. С. 119-125.
10. *Мачкалян Г. С., Чахмахчян Р. Э.* – Математика в высшей школе. 2011. Т. 7. № 3. С. 5-15.
11. *Мирзоян В. А.* – Изв. РАН. Сер. матем. 2011. Т. 75. № 6. С. 47-78.
12. *Мирзоян В. А., Мачкалян Г. С.* – Изв.вузов. Математика. 2012. № 9. С.19-31.
13. *Мирзоян В. А., Мачкалян Г. С., Чахмахчян Р. Э.* – ДНАН РА. 2012. Т. 112. № 2. С.141-151.
14. *Мирзоян В.А, Мачкалян Г.С., Чахмахчян Р.Э.* – Вестник ГИУА. 2012. Ч. 1. С. 3-7.
15. *Mirzoyan V. A.* – Reports of NAS RA. 2012. V.112. № 1. P. 19-29.
16. *Мирзоян В.А., Налбандян Г. А., Чахмахчян Р.Э.* – Вестник ГИУА. 2013. Ч. 1. С. 3-8.
17. *Мирзоян В. А., Мачкалян Г.С.* – Вестник ГИУА. 2014. Ч. 1. С. 8-12.
18. *Мирзоян В. А., Назарян А. Р.* – Вестник НПУА. 2015. Ч. 1. С. 3-8.
19. *Назарян А. Р.* – ДНАН РА. 2016. Т. 116. № 1. С. 13-25.
20. *Назарян А. Р.* – Математика в высшей школе. 2016. Т. 12. № 1. С. 46-56.
21. *Мирзоян В. А., Назарян А. Р.* – Математика в высшей школе. 2016. Т.12. № 1. С. 19-30.
22. *Chern S. S., Kuiper N. H.* – Ann. of. Math. 1952. V. 56. № 3. P. 422-430.