ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 117 2017 № 3

МАТЕМАТИКА

УДК 517.51

В. Г. Микаелян

Явление Гиббса для систем Стромберга

(Представлено академиком Г.Г. Геворкяном 22/V 2017)

Ключевые слова: *система Стромберга, ряды Фурье, явление Гиббса.*

Явлением Гиббса называется определенная особенность поведения частичных сумм ряда Фурье в окрестности точки разрыва функции, впервые обнаруженная Г. Уилбрейамом (1848) и значительно позже переоткрытая Дж. Гиббсом (1899). n-я частичная сумма ряда Фурье имеет большие колебания вблизи скачка, который достигает максимума частичной суммы, выше заданной функции. При увеличении n скачок не затухает, но достигает конечнего предела.

Стромберг поставил перед собой задачу построить базис в пространстве $H^p(R)$ [1]. Модифицируя систему Франклина, он ввел систему, которая является безусловным базисом в $H^p(R)$, при $p > \frac{1}{2}$ [1].

Определим систему Стромберга. Пусть $m \geq 0$ и N – множество натуральных чисел. Положим $A_0 = N \cup \{0\} \cup \left(-\frac{1}{2}N\right)$ и $A_1 = A_0 \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$. Точки множества A_0 разбивают действительную ось R на интервалы $\{I_\sigma\}_{\sigma \in A_0}$, где σ – левая концевая точка интервала I_σ. Обозначим через S_0^m подпространство пространства $L^2(R)$, состоящее из таких функций $f \in L^2(R) \cap C^m(R)$, которые на каждом интервале $I_\sigma, \sigma \in A_0$ являются полиномами с действительными коэффициентами, степени не больше $m+1$. Аналогично определяется подпространство S_1^m, если вместо A_0 рассматривать A_1. Очевидно, что $S_0^m \subset S_1^m$ и если $f(x) \in S_0^m$, то $f(x-1) \in S_1^m$. Вообще функции из S_1^m отличаются от функций S_0^m только тем, что функции из S_0^m должны быть полиномами степени не больше $m+1$ на $[0,1]$, а функции из S_1^m могут быть полиномами степени не больше $m+1$ только на каждом из интервалов $\left[0,\frac{1}{2}\right],\left[\frac{1}{2},1\right]$. Поэтому S_0^m имеет коразмерность 1 в S_1^m. Следовательно, существует функция $\tau\in L^2(R)$, с точностью до знака определяемая из следующих соотношений:

1. $\tau\in S_1^m$,
2. $\tau\perp S_0^m$, т. е. $\int\limits_R \tau(x)\, f(x)dx=0$, для любого $\tau\in S_0^m$,
3. $\|\tau\|_{L^2}=1$.

Для любой пары $(i,j)\in Z^2$, где Z – множество целых чисел, и для любого $x\in R$ положим

$$f_{i,j}(x)=2^{\frac{i}{2}}\tau\left(2^i x-j\right) .$$

Система $\left\{f_{i,j}(x)\right\}_{i,j=-\infty}^{+\infty}$ была введена Стромбергом [1]. Им же получено, что система $\left\{f_{i,j}(x)\right\}_{i,j=-\infty}^{+\infty}$ полная ортонормированная в $L^2(R)$ и является безусловным базисом в $H^p(R)$ при любом $p>\frac{1}{m+2}$.

Пусть t_0 точка разрыва первого рода функции $q\in L^2(R)$, причем $\left|q(t_0+)-q(t_0-)\right|=2d>0$, и пусть последовательность функций $\left\{q_{i,j}(t)\right\}_{i,j=-\infty}^{+\infty}$ сходится к $q(t)$ в каждой точке некоторой окрестности точки t_0. Функцию

$$G\left(t_0,q,\left\{q_{i,j}\right\}_{i,j=-\infty}^{+\infty}\right)=G(t_0)=\overline{\lim_{\substack{t\to x\\ i\to+\infty}}}\frac{1}{d}\left|q_{i,j}(t)-\frac{q(t_0+)+q(t_0-)}{2}\right|$$

назовем функцией Гиббса для последовательности $\left\{q_{i,j}(t)\right\}_{i,j=-\infty}^{+\infty}$. Если $G(t_0)>1$, то говорят, что для последовательности $\left\{q_{i,j}(t)\right\}_{i,j=-\infty}^{+\infty}$ в точке t_0 имеет место явление Гиббса.

Хорошо известно (см. [2], с. 123-126), что для частичных сумм ряда Фурье по тригонометрической системе имеет место явление Гиббса: функция $G(t_0)$ не зависит от t_0 и равна постоянной Гиббса

$$G(t_0)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\frac{\sin t}{t}dt\approx 1.17 .$$

Для частичных сумм ряда Фурье – Франклина наличие явления Гиббса установлено в работе [3]. Для них функция G почти всюду является постоянной. Для частичных сумм ряда Фурье по общей системе Франклина наличие явления Гиббса установлено в работе [4], где доказано, что явление Гиббса для них имеет место почти во всех точках $[0,1]$ и найдены оценки сверху и снизу для функции Гиббса. Для частичных сумм ряда Фурье – Уолша наличие явления Гиббса установлено в работе [5], где доказано, что функция Гиббса не является постоянной. В работе [6] найдены точные оценки сверху и снизу для этой функции.

Сформулируем основные результаты.

Теорема 1. *Пусть* $m=0$, t_0 *– неустранимая точка разрыва первого рода функции* $f\in L^2(R)$,

$$S_{i_0,j_0}(f,x)=\sum_{i=-\infty}^{i_0}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}a_{i,j}f_{i,j}(x)+\sum_{j=-\infty}^{j_0-1}a_{i_0,j}f_{i_0,j}(x)$$

частичная сумма ряда Фурье – Стромберга и

$$G(t_0)=G\left(t_0,f,\left\{S_{i_0,j_0}(f,\cdot)\right\}_{i,j=-\infty}^{+\infty}\right)$$

– функция Гиббса. Тогда всюду на R *имеет место явление Гиббса и в каждой точке* $t_0\in R$ *справедливы оценки*

$$1+\frac{48-28\sqrt{3}+8\sqrt{2}\left(2-\sqrt{3}\right)}{27}\le G(t_0)\le\frac{1+2\sqrt{3}}{3},$$

причем почти всюду $G(t_0)=\dfrac{1+2\sqrt{3}}{3}$.

Теорема 2. *Пусть* $m\ge 0$, t_0 *– неустранимая точка разрыва первого рода функции* $f\in L^2(R)$,

$$S_{i_0,j_0}(f,x)=\sum_{i=-\infty}^{i_0}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}a_{i,j}f_{i,j}(x)+\sum_{j=-\infty}^{j_0-1}a_{i_0,j}f_{i_0,j}(x)$$

частичная сумма ряда Фурье–Стромберга и

$$G(t_0)=G\left(t_0,f,\left\{S_{i_0,j_0}(f,\cdot)\right\}_{i,j=-\infty}^{+\infty}\right)$$

– функция Гиббса. Тогда почти всюду на R *имеет место явление Гиббса.*

Пусть $(i_0,j_0)\in Z^2$. Обозначим

$$K_{i_0,j_0}(x,t)=\sum_{i=-\infty}^{i_0}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}f_{i,j}(x)f_{i,j}(t)+\sum_{j=-\infty}^{j_0-1}f_{i_0,j}(x)f_{i_0,j}(t).$$

Из определения функций $f_{i,j}$ следует, что для любого $(i_0,j_0)\in Z^2$

$$K_{i_0,j_0}(x,t)=2^iK_{0,0}\left(2^ix-j,2^it-j\right).$$

Для любого $f\in L^2(R)$ и $(i_0,j_0)\in Z^2$ справедливо равенство

$$S_{i_0,j_0}(f,x)=\int_{-\infty}^{+\infty}K_{i_0,j_0}(x,t)f(t)\,dt.$$

При доказательстве теоремы 1 важную роль играют равенства

$$\sup\left\{\int_{-\infty}^{x}K_{0,0}(k,t)\,dt : k\in A_1, x\in R\right\}=\frac{2+\sqrt{3}}{3},$$

$$\inf\left\{\int_{-\infty}^{x}K_{0,0}(k,t)\,dt : k\in A_1, x\in R\right\}=-\frac{\sqrt{3}-1}{4},$$

полученные нами для системы Стромберга при $m=0$.

Для доказательства теоремы 2 нами установлено, что для системы Стромберга при любом m справедлива оценка

$$\sup\left\{\int_{-\infty}^{x} K_{0,0}(k,t)\,dt : k\in A_1, x\in R\right\}>1.$$

Ереванский государственный университет
e-mail: mik.vazgen@gmail.com

В. Г. Микаелян

Явление Гиббса для систем Стромберга

Исследовано явление Гиббса для систем Стромберга. Доказано, что явление Гиббса имеет место почти во всех точках R. В случае кусочно-линейных функций для функции Гиббса получены оценки снизу и сверху во всех точках и доказано, что почти во всех точках R оценка сверху достижима.

Վ. Գ. Միքայելյան

Գիբսի երևույթը Ստրոմբերգի համակարգերի համար

Գիբսի երևույթը հետազոտված է Ստրոմբերգի համակարգերի համար: Ապացուցված է, որ Գիբսի երևույթը տեղի ունի R -ի համարյա բոլոր կետերում: Կտոր առ կտոր գծային ֆունկցիաների դեպքում Գիբսի ֆունկցիայի համար ստացվել են երկկողմանի գնահատականներ, և ապացուցվել է, որ R -ի համարյա բոլոր կետերում վերևից գնահատականը հասանելի է:

V. G. Mikayelyan

Gibbs Phenomenon for Stromberg Systems

The Gibbs phenomenon with respect to Stromberg systems is studied. It is proved that the Gibbs phenomenon occurs for almost all points of R. In the case of piecewise linear functions lower and upper bounds are obtained for the Gibbs function and it is proved that for almost all points of R upper bound is attainable.

Литература

1. *Stromberg J. O.* In: Conf. on Harmonic Analyses in honor of A. Zygmund. Wadsworth. 1983. V. II. P. 475-494.

2. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. 1961. Физматгиз. М. 937 с.
3. *Саргсян О. Г.* – Изв. НАН Армении. Математика. 1996. Т. 31. N. 1. С. 61-84.
4. *Mikayelyan V. G.* – Journal of Contemporary Mathematical Analysis. 2017. V. 52. N 4. P. 198-210.
5. *Зубакин А. М.* – Сиб. мат. журн. 1971. Т. 12. N 1. С. 147-157.
6. *Балашов Л. А.* –-Тр. МИАН СССР. 1983. Т. 164. С. 37-48.