ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 117 2017 № 2

МЕХАНИКА

УДК 517.95

О. А. Матевосян

О задаче Дирихле–Робена для системы теории упругости

(Представлено иностранным членом НАН РА А. П. Сейраняном 3/IV 2017)

Ключевые слова: *система теории упругости, задача Дирихле–Робена, пространство Соболева, весовой интеграл энергии.*

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – неограниченная область, $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \overline{G}$ с границей $\partial\Omega \in C^1$, где G – ограниченная односвязная область (или объединение конечного числа таких областей) в $\mathbb{R}^n (n \geq 2)$, $\Omega \cup \partial\Omega = \overline{\Omega}$ – замыкание Ω, $x = (x_1, \ldots, x_n), |x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$, $u = (u_1, \ldots, u_n)$. Будем считать, что начало координат $x_0 = 0$ находится вне $\overline{\Omega}$.

В Ω рассматривается стационарная линейная система теории упругости

$$Lu \equiv (Lu)_i = \sum_{j,k,h=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{kh}^{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_h} \right) = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Здесь и далее суммирование проводится по повторяющимся индексам от 1 до n. Предполагается, что коэффициенты постоянные и выполнены условия:

$$a_{kh}^{ij} = a_{hk}^{ji} = a_{ih}^{kj}, \quad \lambda_1 |\xi|^2 \leq a_{kh}^{ij} \xi_k^i \xi_h^j \leq \lambda_2 |\xi|^2,$$

где ξ – произвольная симметрическая матрица $\{\xi_k^i\}$, $\xi_k^i = \xi_i^k$, $|\xi|^2 = \xi_k^i \xi_k^i$, λ_1, λ_2 – положительные постоянные.

Для системы (1) будем рассматривать следующую краевую задачу: найти вектор-функцию $u(x)$, удовлетворяющую системе (1) в Ω и однородным граничным условиям Дирихле–Робена

$$u(x)|_{\Gamma_1} = 0, \quad \left(\sigma(u) + \tau(x) u(x)\right)\Big|_{\Gamma_2} = 0, \tag{2}$$

где $\overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2 = \partial\Omega$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$, $mes_{n-1}\Gamma_1 \neq 0$, $\sigma(u) = (\sigma_1(u),\ldots,\sigma_n(u))$, $\sigma_i(u) \equiv a_{kh}^{ij} \dfrac{\partial u_j}{\partial x_h} \nu_k$, $i = 1,\ldots,n$, $\nu = (\nu_1,\ldots,\nu_n)$ – единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$, $\tau(x)$ – бесконечно гладкая функция с равномерно ограниченными производными на $\partial\Omega$, $\tau \geq 0$, $\tau \not\equiv 0$.

Краевые задачи для системы теории упругости в ограниченных областях достаточно полно изучены. Изложение основных фактов этой теории можно найти в монографии [1]. В [2, 3] для ограниченных и широкого класса неограниченных областей установлены обобщения неравенств Корна и Харди, с помощью которых исследованы основные краевые задачи для системы теории упругости.

Как известно, в случае, когда Ω – неограниченная область, следует дополнительно охарактеризовать поведение решения на бесконечности. Как правило, для этой цели служит либо условие конечности интеграла Дирихле $D(u,\Omega)$ или интеграла энергии $E(u,\Omega)$, либо условие на характер убывания модуля решения при $|x| \to \infty$.

В данной заметке изучаются свойства обобщенных решений задачи Дирихле–Робена для системы теории упругости в Ω с условием ограниченности интеграла энергии с весом:

$$E_a(u,\Omega) < \infty, \quad a \in \mathbb{R}.$$

При том же условии на поведение решения на бесконечности в разных классах неограниченных областей автором [4 - 6] изучены вопросы единственности и найдены размерности пространства решений краевых задач для системы теории упругости и бигармонического (полигармонического) уравнения.

Развивая подход, основанный на использовании неравенств типа Корна и Харди [2, 3], в данной статье удалось получить критерий единственности решений задачи Дирихле–Робена для системы теории упругости.

Введем обозначения. $C_0^\infty(\Omega)$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций в Ω и имеющих компактный носитель в Ω; $H^1(\Omega,\Gamma)$, $\Gamma \subset \overline{\Omega}$, – пространство функций, полученное пополнением множества функций $C^\infty(\overline{\Omega})$, равных нулю в окрестности Γ, по норме

$$\| u(x); H^1(\Omega,\Gamma) \| = \left(\int_\Omega \left(|u(x)|^2 + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right)^2 \right) dx \right)^{1/2}.$$

Если $\Gamma = \varnothing$, то $H^1(\Omega,\Gamma)$ будем обозначать $H^1(\Omega)$.

$\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ – пространство функций, полученное пополнением $C_0^\infty(\Omega)$ по норме пространства Соболева $H^1(\Omega)$; $\overset{\circ}{H}{}^1_{loc}(\Omega)$ – пространство функций в Ω, полученное пополнением $C_0^\infty(\Omega)$ в системе полунорм $\| u(x); H^1(G_0) \|$, где $G_0 \subset \overline{\Omega}$ – произвольный компакт.

Положим $\partial^\alpha u = \partial^{|\alpha|}u/\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}$, где $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $\alpha_j \ge 0$ – целые числа, $|\alpha| = \alpha_1+\ldots+\alpha_n$. Обозначим через

$$D(u,\Omega) = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx,\quad D_a(u,\Omega) = \int_\Omega |x|^a |\nabla u(x)|^2\,dx,\quad \nabla u(x)|^2 = \sum_{i,j=1}^n\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2,$$

$$E(u,\Omega) = \int_\Omega |e(u)|^2\,dx,\quad E_a(u,\Omega) = \int_\Omega |x|^a |e(u)|^2\,dx,\quad |e(u)|^2 = \sum_{i,j=1}^n\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2.$$

Определение 1. *Обобщенным решением системы (1) в* Ω *будем называть вектор-функцию* $u\in \overset{\circ}{H}{}^1_{loc}(\Omega)$ *такую, что для всякой вектор-функции* $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ *выполнено интегральное тождество*

$$\int_\Omega a_{kh}^{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x_h}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}dx = 0.$$

Лемма 1. *Пусть* $u(x)$ *– решение системы (1) в* Ω*, удовлетворяющее условию* $E_a(u,\Omega)<\infty$*. Тогда*

$$u(x) = P(x) + \sum_{\beta_0<|\alpha|\le\beta}\partial^\alpha\Gamma(x)C_\alpha + u^\beta(x),\ x\in\Omega, \tag{3}$$

где $P(x)$ *– многочлен,* $\mathrm{ord}P(x)\le m = \max\{1, 1-n/2-a/2\}$, $\Gamma(x)$ *– фундаментальное решение системы (1),* $C_\alpha = \mathrm{const}$, $\beta_0 = 1-n/2+a/2$, $\beta\ge 0$ *– целое число, а для функции* $u^\beta(x)$ *справедлива оценка:*

$$|\partial^\gamma u^\beta(x)|\le C_{\gamma\beta}(a,u)\,|x|^{1-n-\beta-|\gamma|}$$

для любого мультииндекса γ, $C_{\gamma\beta} = const$.

Замечание. *Как известно [7], существует фундаментальное решение* $\Gamma(x)$*, для которого при* $n>2$ *имеет место следующая оценка:*

$$|\partial^\alpha\Gamma(x)|\le C(\alpha)\,|x|^{2-n-|\alpha|},\quad C(\alpha) = const.$$

В случае $n=2$ *фундаментальное решение представляется в виде* $\Gamma(x) = S(x)\ln|x| + T(x)$*, где* $S(x)$ *и* $T(x)$ *квадратные матрицы порядка 2, элементы которых однородные функции порядка нуль [8].*

Доказательство леммы ***1.*** *Рассмотрим вектор-функцию* $v(x) = \theta_N(x)u(x)$*, где* $\theta_N(x) = \theta(|x|/N)$, $\theta\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0\le\theta\le 1$, $\theta(s) = 0$ *при* $s\le 1$, $\theta(s) = 1$ *при* $s\ge 2$*, причем* $N>>1$ *и* $G\subset\{x:|x|<N\}$*. Продолжим* $v(x)$ *на* $\mathbb{R}^n$*, полагая* $v(x) = 0$ *на* $G = \mathbb{R}^n\setminus\overline{\Omega}$*.*

Тогда вектор-функция $v(x)\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и удовлетворяет системе

$$Lv(x) = F_i,\quad i = 1,\ldots,n,$$

где $F_i\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), supp\,F_i\subset\{x:|x|<2N\}$. Легко видеть, что $E_a(v,\mathbb{R}^n)<\infty$.

Если $a+n\neq 0$, то из неравенства Корна [2; § 3, неравенство (1)] следует, что $v(x)=w(x)+Ax$, где A – постоянная кососимметрическая матрица и $w(x)$ такова, что $D_a(w(x),\Omega)<\infty$.

Теперь мы можем использовать теорему 1 из [9], поскольку она основывается на лемме 2 из [9], в которой никаких ограничений на знак σ' нет. Следовательно, разложение

$$w(x)=P_o(x)+\sum_{\beta_0<|\alpha|\leq\beta}\partial^\alpha\Gamma(x)C_\alpha+w^\beta(x)$$

справедливо для любого a, где $P_0(x)$ – многочлен, $ordP_0(x)\leq\max\{1,1-n/2-a/2\}$, $C_\alpha=const$, $\beta_0=1-n/2+a/2$ и

$$|\partial^\gamma w^\beta(x)|\leq C_{\gamma\beta}|x|^{1-n-\beta-|\gamma|}, C_{\gamma\beta}=const.$$

Отсюда и из определения функции $v(x)$ следует равенство (3) с $P(x)=P_0(x)+Ax$.

Пусть теперь $a+n=0$. Тогда для любого $\varepsilon>0$

$$E_{-n-\varepsilon}(v,\mathbb{R}^n)\leq E_{-n}(v,\mathbb{R}^n)<\infty.$$

По неравенству Корна [2; § 3, неравенство (1)], существует постоянная кососимметрическая матрица A такая, что

$$D_{-n-\varepsilon}(v-Ax,\mathbb{R}^n)\leq CE_{-n-\varepsilon}(v,\mathbb{R}^n)<\infty,$$

где постоянная C не зависит от $v(x)$. Следовательно, используя теорему 1 из [9], имеем

$$v(x)-Ax=P_0(x)+\sum_{\beta_0<|\alpha|\leq\beta}\partial^\alpha\Gamma(x)C_\alpha+v^\beta(x),$$

причем $P_0(x)$ – многочлен, $ordP_0(x)\leq 1, C_\alpha=const$, $\beta_0=1-n/2+a/2$ и

$$|\partial^\gamma v^\beta(x)|\leq C_{\gamma\beta}|x|^{1-n-\beta-|\gamma|},\quad C_{\gamma\beta}=const.$$

Таким образом,

$$v(x)-Ax=P_0(x)+\sum_{\beta_0<|\alpha|\leq\beta}\partial^\alpha\Gamma(x)C_\alpha+v^\beta(x),$$

откуда следует утверждение леммы при $a=-n$.

Лемма 2. *Пусть $u(x)$ – решение системы (1) в Ω, удовлетворяющее условию $E_a(u,\Omega)<\infty$ для некоторого $a\geq 0$. Тогда для любого $x\in\Omega$ имеет место равенство (3) с приведенной выше оценкой для $u^\beta(x)$, причем $P(x)=Ax+B$, где A – постоянная кососимметрическая матрица, B – постоянный вектор.*

Лемма 2 является прямым следствием леммы 1.

Определение 2. *Обобщенным решением смешанной задачи Дирихле–Робена (1), (2) будем называть вектор-функцию $u(x)$ такую, что $u\in \overset{\circ}{H}{}^1_{loc}(\Omega,\Gamma_1)$, и для любой вектор-функции $\varphi\in \overset{\circ}{H}{}^1_{loc}(\Omega,\Gamma_1)\cap C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ выполнено интегральное тождество*

$$\int_\Omega a_{kh}^{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x_h}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}dx+\int_{\Gamma_2}\tau\, u\,\varphi\, ds=0.$$

Теорема 1. *Задача Дирихле–Робена (1), (2) с условием* $E(u,\Omega)<\infty$ *имеет* $n(n+1)/2$ *линейно независимых решений, если* $n\geq 3$, *и одно линейно независимое решение, если* $n=2$.

Теорема 2. *Задача Дирихле–Робена (1), (2) с условием* $E_a(u,\Omega)<\infty$, *имеет:*

i) *только тривиальное решение при* $n\leq a<\infty$;

ii) $n(n-1)/2$ *линейно независимых решений при* $n-2\leq a<n$;

iii) $n(n+1)/2$ *линейно независимых решений при* $-n\leq a<n-2$.

Теорема 3. *Задача Дирихле–Робена (1), (2) с условием* $E_a(u,\Omega)<\infty$ *имеет* $k(r,n)$ *линейно независимых решений при* $-2r-n\leq a<-2r-n+2$, *где*

$$k(r,n)=\begin{cases} n\left(\binom{r+n-1}{n-1}+\binom{r+n-2}{n-1}\right), & \text{если } n>2\\ 4r+2, & \text{если } n=2\end{cases}$$

причем $r>0,\ k(0,n)=n$; $\binom{r}{s}$ – *число сочетаний из* r *по* s, $\binom{r}{s}=0$, *если* $s>r$.

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление»,
Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН;
Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)
e-mail: hmatevossian@graduate.org

О. А. Матевосян

О задаче Дирихле–Робена для системы теории упругости

Изучаются свойства обобщенных решений смешанной задачи Дирихле–Робена для линейной системы теории упругости во внешности компактного множества в предположении, что обобщенные решения этой задачи обладают конечным интегралом энергии с весом $|x|^a$. В зависимости от значения параметра a получен критерий единственности решений смешанной задачи Дирихле–Робена, а также найдены точные формулы для вычисления размерности пространства решений этой же задачи.

Հ. Ա. Մաթևոսյան

Դիրիխլե–Ռոբենի խնդրի վերաբերյալ՝ առաձգականության տեսության համակարգի համար

Ուսումնասիրվել են Դիրիխլե–Ռոբենի խառը խնդրի ընդհանրացված լուծումների հատկությունները կոմպակտ բազմության արտաքինում, ենթադրությամբ, որ այդ խնդրի ընդհանրացված լուծումներն ունեն էներգիայի վերջնական ինտեգրալ՝

$|x|^a$. քաշով: Ստացվել է Դիրիխլե–Ռոբենի խառը խնդրի լուծումների միականության չափանիշը՝ նայած a պարամետրի արժեքին, և գտնվել են ճշգրիտ հավասարումներ նույն խնդրի լուծումների տարածության չափականության հաշվարկման համար:

H. A. Matevossian

On the Dirichlet–Robin Problem for the Elasticity System

The properties of generalized solutions of the mixed Dirichlet–Robin problem for the linear system of elasticity theory in the exterior of a compact set are studied under the assumption that the energy integral with weight $|x|^a$ is finite for such solutions. Depending on the value of the parameter a, a uniqueness criterion is established for solutions of the mixed Dirichlet–Robin problem, and exact formulae are obtained for the dimension of the space of solutions.

Литература

1. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М. Мир. 1974. 159 с.
2. *Кондратьев В. А., Олейник О. А.* - УМН. 1988. Т. 43. № 5. С. 55–98.
3. *Kondratiev V. A., Oleinik O. A.* - Rend. Mat. Appl. Serie VII. 1990. V. 10. P. 641–666.
4. *Matevosyan O. A.* - Russian J. Math. Physics. 2016. V. 23. № 1. P. 135–138.
5. *Матевосян О. А.* - Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 10. С. 1431–1435.
6. *Matevossian H. A.* - Russian J. Math. Physics. 2017. V. 24. № 1. P. 134–138.
7. *Бучукури Т. В., Гегелия Т. Г.* - Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 9. С. 1556–1565.
8. *Лопатинский Я. Б.* Теория общих граничных задач. Избранные труды. Киев:Наукова думка. 1984. 316 с.
9. *Kondratiev V. A., Oleinik O. A.* - Arch. Rational Mech. Anal. 1987. V. 99. № 1. P. s75–99.