ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 117 2017 № 2

МЕХАНИКА

УДК 62-50

Член-корреспондент НАН РА А. С. Аветисян[1], В. В. Аветисян[2]

О построении ограниченного управления электромеханической системой

(Представлено 10/III 2017)

Ключевые слова: *ограниченное управление, электромеханическая система.*

Введение. Рассматривается электромеханическая система второго порядка, которая приближенно описывает динамику отдельного звена руки многозвенного манипулятора, если каждое звено управляется напряжением, подаваемым электродвигателем независимого привода, а динамическое взаимовлияние различных степеней свободы достаточно мало [1]. Особенностью рассматриваемой системы является то, что в классе ограниченных управлений она управляема к состоянию покоя, но не управляема по отношению к произвольному состоянию, отличному от покоя. Для рассматриваемой модели манипулятора в [1] изучены задачи построения оптимального управления, обеспечивающего перемещение системы из произвольного начального состояния в заданное конечное состояние покоя, в том числе при дополнительных ограничениях. Для некоторых систем более высокого порядка, в частности, для систем четвертого порядка со смешанными ограничениями, которые представляют собой модели механических и электромеханических систем, содержащих электрический двигатель, в [2-4] исследованы задачи построения ограниченного управления, приводящие систему из произвольного начального состояния в терминальное состояние покоя за конечное время. В настоящей статье, с использованием обобщенной схемы построения управления Калмана [2], учитывающей наличие ограничения на управление, в явном виде найдены управление и соответствующее конечное время, при которых осуществляется приведение системы из начального состояния покоя в любое конечное состояние покоя. В случае конечного состояния, отличного от состояния покоя, на фазовой плоскости системы получено условие в виде определенной области конечных состояний, приведение в которые за конечное время по предлагаемому способу также происходит с ненарушением заданного ограничения на управление.

1. Расчетная модель электромеханической системы с одной степенью свободы и постановка задачи. Рассмотрим электромеханическую систему, состоящую из электродвигателя постоянного тока с независимым возбуждением, редуктора и абсолютно твердого тела (инерционной нагрузки) на его выходном валу. Такую систему можно трактовать как модель простейшего манипулятора с одной степенью свободы. В этом случае инерционная нагрузка есть рука манипулятора вместе с грузом, закрепленным в его схвате. Движение описанной электромеханической системы определяется уравнениями [1]

$$(I + Jn^2)\ddot{\varphi} = n\mu\ , \tag{1.1}$$

$$Rj + kn\dot{\varphi} = u\ , \tag{1.2}$$

$$\mu = kj\ , \tag{1.3}$$

$$|u| \le u_{\max}\ . \tag{1.4}$$

В (1.1)-(1.4) φ – угол поворота руки; I – момент инерции вместе с ведомой шестерней редуктора; J – момент инерции якоря электродвигателя вместе с ведомой шестерней редуктора; n – передаточное число редуктора; μ – момент электромагнитных сил, создаваемый двигателем; u – входное (управляющее) напряжение двигателя; j – ток в цепи якоря двигателя, R – электрическое сопротивление обмотки якоря двигателя; k – коэффициент пропорциональности; $u_{\max}$ – максимально допустимое напряжение,

Уравнение (1.1) описывает динамику механической части системы, (1.2) – уравнение баланса напряжений в цепи якоря электродвигателя, если пренебречь явлением самоиндукции в обмотке якоря, равенство (1.3) отражает пропорциональность крутящего момента двигателя и тока в цепи его якоря. Пренебрежение явлением самоиндукции при описании динамики манипулятора возможно, если электромагнитная постоянная времени $\tau = L/R$ (L –индуктивность обмотки якоря) много меньше времени рабочей операции манипулятора. На практике это условие в большинстве случаев выполняется. Отметим, что система уравнений (1.1)-(1.3) приближенно описывает динамику отдельного звена руки многозвенного манипулятора, если каждое звено управляется независимым приводом, а динамическое взаимовлияние различных степеней свободы достаточно мало (см., например, [1]).

Исключив переменную μ из совокупности уравнений (1.1)-(1.3), движение манипулятора можно описать следующей системой:

$$(I + Jn^2)\ddot{\varphi} = nkj\ , \quad Rj + kn\dot{\varphi} = u\ , \quad |u| \le u_{\max}\ .$$

Переходя к безразмерным единицам (с последующим опусканием штрихов)

$$t' = t/\bar{T}, \quad u' = u/u_{\max}, \quad k' = kn/(u_{\max}\bar{T}),$$
$$R' = RA/(knu_{\max}\bar{T}^2), \quad j' = (knu_{\max}\bar{T}^5 A^{-2})^{1/2} j,$$

где $A = I + Jn^2$, а $\bar{T} = nk/u_{\max}$ – единица измерения времени, получим

$$\ddot{\varphi} = k^{1/2} j, \quad Rj + k^{1/2}\dot{\varphi} = k^{-1/2}u, \quad |u| \le 1.$$

Далее, исключив переменную j из последних двух уравнений, движение манипулятора можно описать одним дифференциальным уравнением второго порядка

$$R\ddot{\varphi} + k\dot{\varphi} = u, \tag{1.5}$$

$$|u| \le 1. \tag{1.6}$$

Для системы (1.1)-(1.4) или, что то же, (1.5), (1.6) рассмотрим следующую задачу управления: найти закон изменения управляющего напряжения $u(t)$, который обеспечивает приведение манипулятора из начального состояния покоя

$$\varphi(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0 \tag{1.7}$$

в заданное конечное состояние

$$\varphi(T) = \varphi^1, \quad \dot{\varphi}(T) = \dot{\varphi}^1 \tag{1.8}$$

в некоторый момент времени $t = T$ при ограничении на управляющее напряжение (1.6) в цепи якоря электродвигателя привода.

Перейдем к новым переменным

$$v = u - k\dot{\varphi}, \quad x_1 = R\varphi, \quad x_2 = R\dot{\varphi} \tag{1.9}$$

и запишем уравнение (1.5) с ограничением (1.6) в виде следующей системы:

$$\dot{x}_1 = x_2, \ \dot{x}_2 = v \tag{1.10}$$

$$|v + kR^{-1}x_2| \le 1, \tag{1.11}$$

При этом начальные и конечные условия примут, соответственно, вид

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \tag{1.12}$$

$$x_1(T) = x_1^1 = R\varphi^1, \quad x_2(T) = x_2^1 = R\dot{\varphi}^1. \tag{1.13}$$

2. Построение закона изменения управляющего напряжения без учета ограничения. Найдем закон изменения управляющего напряжения $v(t)$, обепечивающий переход системы (1.10) из начального состояния покоя (1.12) в конечное состояние (1.13) в некоторый момент времени T без учета ограничения (1.11).

Систему (1.10) запишем в векторной форме

$$\dot{x} = Ax + Bv, \quad x = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \tag{2.1}$$

с постоянными матрицами A, B и фундаментальной матрицей Φ соответственно

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Начальные (1.12) и конечные (1.13) условия представим в виде

$$x(0) = 0, \quad x(T) = x^1 = (x_1^1, x_2^1)^{\mathrm{T}}. \tag{2.3}$$

Запишем решение системы (2.1) с начальным условием из (2.3)

$$x(t) = \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)B(\tau)v(\tau)d\tau. \tag{2.4}$$

С учетом (2.4) задача (2.1)-(2.3), ((1.10), (1.12), (1.13)) сводится к отысканию такого скалярного управления $v(t)$, при котором удовлетворяется условие

$$\int_0^T \Phi^{-1}(t)B(t)\mathrm{v}(t)dt = \Phi^{-1}(T)x^1. \tag{2.5}$$

Искомое управление $v(t)$ ищется в виде [2]

$$v(t) = Q^T(t)C, \quad Q(t) = \Phi^{-1}(t)B(t), \tag{2.6}$$

где постоянный вектор C определяется из системы линейных алгебраических уравнений

$$R(T) \cdot C = \Phi^{-1}(T)x^1, \qquad R(T) = \int_0^T Q(t)Q^T(t)dt \tag{2.7}$$

единственным образом

$$C = R^{-1}(T) \cdot \Phi^{-1}(T)x^1, \tag{2.8}$$

так как система (2.1), (2.2) вполне управляема [5].

Подставив (2.7), (2.8) в (2.6), управление $v(t)$ можно представить следующим образом:

$$v(t) = F(t,T) \cdot (x^1)^{\mathrm{T}}, \qquad x^1 = (x_1^1, x_2^1)^{\mathrm{T}}, \tag{2.9}$$

где

$$F(t,T) = (\Phi^{-1}(t)B(t))^{\mathrm{T}} R^{-1}(T)\Phi^{-1}(T) \tag{2.10}$$

– вектор-строка с двумя элементами

$$f_1 = -\frac{12}{T^3}t + \frac{6}{T^2}, \qquad f_2 = \frac{6}{T^2}t - \frac{2}{T}. \tag{2.11}$$

С учетом (2.3), (2.10), (2.11) искомый закон изменения управлений (2.9) можно представить в следующем виде:

$$v(t)=\sum_{i=1}^{2} f_i(t,T)x_i^1=(-\frac{12}{T^3}t+\frac{6}{T^2})x_1^1+(\frac{6}{T^2}t-\frac{2}{T})x_2^1 \tag{2.12}$$

3. Учет ограничения. Сначала рассмотрим частный случай.

А. Пусть конечное состояние (1.8) – состояние покоя: $\varphi(T)=\varphi^1$, $\dot\varphi(T)=\dot\varphi^1=0$ или в переменных (1.9)

$$x_1(T)=x_1^1, \quad x_2(T)=x_2^1=0\,. \tag{3.1}$$

Проинтегрировав второе уравнение (1.10) с начальными условиями (1.11) при построенном законе (2.12) с учетом (3.1), получим

$$x_2=(-\frac{6}{T^3}t^2+\frac{6}{T^2}t)x_1^1\,. \tag{3.2}$$

Использзуя выражения (2.12), (3.2), ограничение (1.11) можно представить в виде

$$\left|(-\frac{12}{T^3}t+\frac{6}{T^2})x_1^1+kR^{-1}(-\frac{6}{T^3}t^2+\frac{6}{T^2}t)x_1^1\right|\le 1$$

или, что то же,

$$|g_1(t,T)||x_1^1|\le 1\,, \qquad g_1(t,T)=-\frac{6kR^{-1}}{T^3}t^2+(\frac{6kR^{-1}}{T^2}-\frac{12}{T^3})t+\frac{6}{T^2}\,. \tag{3.3}$$

Так как

$$|g_1(t,T)||x_1^1|\le r^{-1}(T)|x_1^1|\,, \qquad r(T)=\left[\max_{t\in[0,T]}|g_1(t,T)|\right]^{-1}, \tag{3.4}$$

то неравенство (3.3) будет выполнено при всех $t\in[0,T]$, если время окончания процесса управления T будет выбрано из условия

$$r(T)=|x_1^1|\,. \tag{3.5}$$

Определим функцию $r(T)$ из (3.4). Для этого подсчитаем максимальное значение модуля функции $g_1(t,T)$ (3.3) по $t\in[0,T]$.

Из (3.3) следует, что квадратичная функция $g_1(t,T)$ на оси t максимального заначения достигает в точке $t_1^*=\frac{T}{2}-\frac{1}{kR^{-1}}$. При этом имеются следующие два случая.

1) Если $t^*=\frac{T}{2}-\frac{1}{kR^{-1}}<0$, т.е. $0<T\le\frac{2}{kR^{-1}}$, то функция $g_1(t,T)$ монотонно убывает на $[0,T]$, принимая на концах этого интервала максимальное и минимальное значения $g_1(0,T)=\frac{6}{T^2}$, $g_1(T,T)=-\frac{6}{T^2}$ соответственно. Следовательно,

$$r(T)=\left[\max_{t\in[0,T]}|g_1(t,T)|\right]^{-1}=\frac{T^2}{6}\,, \qquad 0<T\le\frac{2}{kR^{-1}}\,. \tag{3.6}$$

2) Если $0 \le t_1^* = \frac{T}{2} - \frac{1}{kR^{-1}} < \frac{T}{2}$, т.е. $\frac{2}{kR^{-1}} \le T < \infty$, то на интервале $[0,T]$ максимальное значение функции $g_1(t,T)$ равно $g_1(t^*,T) = \frac{3kR^{-1}}{2T} + \frac{6}{T^3 kR^{-1}}$, а минимальное – $g_1(T,T) = -\frac{6}{T^2}$. При этом $\left|g_1(t_1^*,T)\right| > \left|g_1(T,T)\right|$, когда $T \in \left(\frac{2}{kR^{-1}}, \infty\right)$, и $\left|g_1(t_1^*,T)\right| = \left|g_1(T,T)\right|$, когда $T = T^* = \frac{2}{kR^{-1}}$. Следовательно,

$$r(T) = \left[\max_{t\in[0,T]} \left|g_1(t,T)\right|\right]^{-1} = \frac{2T^3 kR^{-1}}{3(kR^{-1})^2 T^2 + 12}, \quad \frac{2}{kR^{-1}} \le T < \infty. \tag{3.7}$$

В соответствии с рассмотренными случаями функцию $r(T)$ можно задавать таким образом:

$$r(T) = \begin{cases} r_1(T), & 0 < T \le \frac{2}{kR^{-1}} = T^*, \\ r_2(T), & T^* = \frac{2}{kR^{-1}} \le T < \infty, \end{cases} \tag{3.8}$$

где

$$r_1(T) = \frac{T^2}{6}, \qquad r_2(T) = \frac{2T^3 kR^{-1}}{3(kR^{-1})^2 T^2 + 12}. \tag{3.9}$$

Из (3.8), (3.9) следует, что функция $r(T)$ непрерывна и монотонно возрастает от 0 до ∞ при изменении T от 0 до ∞. Следовательно, уравнение (3.5), записанное в виде

$$\left|x^1\right| = \begin{cases} r_1(T), & 0 < T \le \frac{2}{kR^{-1}} = T^*, \\ r_2(T), & T^* = \frac{2}{kR^{-1}} \le T < \infty, \end{cases} \tag{3.10}$$

при любом $\left|x_1^1\right|$ имеет единственное решение.

Таким образом, для любого значения $\left|x_1^1\right| \ne 0$ искомое управление $v(t)$ (2.12), удовлетворяющее ограничению (1.11) и переводящее систему (1.10) из начального состояния покоя (1.12) в заданное конечное состояние покоя (3.1), можно построить, если сначала определить время T из условия (3.10) и подставить найденное в формулу (2.12) для управления v.

Остановимся на способе решения уравнения (3.10). Разобьем весь полубесконечный интервал времени T на две части: $\left(0, T^*\right]$, $\left[T^*, \infty\right)$, $T^* = \frac{2}{kR^{-1}}$, которым соответствуют два интервала изменения $\left|x_1^1\right|$: $\left(0, \left|x_1^1\right|^*\right]$, $\left[\left|x_1^1\right|^*, \infty\right)$, где значение $\left|x_1^1\right|^* = \frac{2}{3(kR^{-1})^2}$ определяется подстановкой $T = T^*$ в правую часть одного из уравнений (3.10). После этого для заданного значения $\left|x_1^1\right|$ путем сравнения $\left|x^1\right|$ с $\left|x_1^1\right|^*$ определяем, какому из двух отрезков $\left(0,\left|x_1^1\right|^*\right]$ или $\left[\left|x_1^1\right|^*,\infty\right)$ принадлежит $\left|x^1\right|$. Если $\left|x^1\right|\in\left(0,\left|x_1^1\right|^*\right]$, то искомое время $T\in\left(0,T^*\right]$ определяется из первого уравнения (3.10) и равно

$$T=\sqrt{6\left|x^1\right|}\,,\qquad \left|x^1\right|\le\left|x_1^1\right|^*. \tag{3.11}$$

А если $\left|x^1\right|\in\left[\left|x_1^1\right|^*,\infty\right)$, то искомое время $T\in\left[T^*,\infty\right)$ определяется из второго уравнения (3.10) будучи приведенным к кубическому уравнению

$$aT^3+bT^2+d=0\,,\quad a=2kR^{-1}>0,\quad b=-3(kR^{-1})^2\left|x_1^1\right|<0,\quad d=-12\left|x_1^1\right|<0. \tag{3.12}$$

Так как дискриминант уравнения (3.12) отрицательный, то (3.12) имеет один действительный положительный корень, который определяется по формуле Кардано

$$T=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{Q}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{Q}}-\frac{b}{3a},\quad Q=\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2>0, \tag{3.13}$$

$$p=-\frac{b^2}{3a^2},\quad q=\frac{2b^3}{27a^3}+\frac{d}{a},\quad \frac{b}{3a}=-\frac{kR^{-1}\left|x_1^1\right|}{2},$$

$$p=-\frac{3(kR^{-1})^2\left|x_1^1\right|^2}{4}<0,\quad q=-\frac{(kR^{-1})^4\left|x_1^1\right|^3+24\left|x_1^1\right|}{4kR^{-1}}<0.$$

Перейдя путем (1.9), (2.12), (3.2) к исходным переменным, для управления получим следующее выражение:

$$u=-\frac{6kR^{-1}}{T^3}x_1^1t^2+\left(\frac{6kR^{-1}}{T^2}-\frac{12}{T^3}\right)x_1^1t+\frac{6}{T^2}x_1^1\,,\qquad 0\le t\le T\ ,$$

в котором время T определяется по формулам (3.11), (3.13) согласно вышеизложенному алгоритму.

В. Рассмотрим теперь общий случай (1.13). По аналогии со случаем А интегрируя один раз уравнение (1.10) с начальными условиями (1.11) при управлении (2.12), получим

$$x_2=\left(-\frac{6}{T^3}t^2+\frac{6}{T^2}t\right)x_1^1+\left(\frac{3}{T^2}t^2-\frac{2}{T}t\right)x_2^1\,. \tag{3.14}$$

Учитывая (2.12), (3.14), ограничение (1.11) запишем в виде

$$\left|g_1(t,T)x_1^1+g_2(t,T)x_2^1\right|\le 1\,,\qquad t\in[0,T]\,, \tag{3.15}$$

где

$$g_2(t,T)=\frac{3}{T^2}kR^{-1}t^2+\left(\frac{6}{T^2}-\frac{2}{T}kR^{-1}\right)t-\frac{2}{T}\,, \tag{3.16}$$

а $g_1(t,T)$ задается формулой (3.3).

Проведем оценки сверху левой части неравенства (3.15):

$$\left|g_1(t,T)x_1^1+g_2(t,T)x_2^1\right|\le\left|g_1(t,T)\right|\left|x_1^1\right|+\left|g_2(t,T)\right|\left|x_2^1\right|, \tag{3.17}$$

Оценим сверху максимум по $t\in[0,T]$ только входящей в (3.17) абсолютной величины функции $g_2(t,T)$, так как оценка сверху максимума функции $g_1(t,T)$, $t\in[0,T]$, уже проведена: А1),2).

Из (3.16) следует, что квадратичная функция $g_2(t,T)$ на оси t экстрмального заначения достигает в точке $t_2^*=\frac{T^2}{3}-\frac{T}{kR^{-1}}$. При этом возможны два случая.

1) Если $t_2^*=\frac{T^2}{3}-\frac{T}{kR^{-1}}<0$, т.е. $0<T<\frac{3}{kR^{-1}}$, то функция $g_2(t,T)$ монотонно возрастает на $[0,T]$, принимая на концах этого интервала минимальное и максимальное значения $g_2(0,T)=-\frac{2}{T}$, $g_2(T,T)=kR^{-1}+\frac{4}{T}$ соответственно и поэтому

$$\max_{t\in[0,T]}\left|g_2(t,T)\right|=kR^{-1}+\frac{4}{T},\qquad 0<T<\frac{3}{kR^{-1}}. \tag{3.18}$$

2) Если $0\le t_2^*=\frac{T^2}{3}-\frac{T}{kR^{-1}}$, т.е. $\frac{3}{kR^{-1}}\le T<\infty$, то $\max\limits_{t\in[0,T]}g_2(t,T)=g_2(T,T)=$ $=kR^{-1}+\frac{4}{T}>0$, а

$$\min_{t\in[0,T]}g_2(t,T)=g_2(t_2^*,T)=\frac{kR^{-1}}{3}T^2-2(1+\frac{kR^{-1}}{3})T-2(1+\frac{3}{kR^{-1}})\frac{1}{T}+4+\frac{3}{kR^{-1}}<0.$$

Вычисления с учетом определенных соотношений между параметрами k и R, свойственных для многих манипуляционных роботов [1], показывают, что $\left|g_2(t_2^*,T)\right|<g_2(T,T)$. Следовательно, и в этом случае

$$\max_{t\in[0,T]}\left|g_2(t,T)\right|=kR^{-1}+\frac{4}{T},\qquad \frac{3}{kR^{-1}}\le T<\infty. \tag{3.19}$$

Исходя из (3.6), (3.7), (3.18), (3.19) оценим сверху правую часть неравенства (3.17) и представим неравенство (3.15) в виде

$$\left|g_1(t,T)\right|\left|x_1^1\right|+\left|g_2(t,T)\right|\left|x_2^1\right|\le q_1(T)\left|x_1^1\right|+(kR^{-1}+\frac{4}{T})\left|x_2^1\right|\le 1,\qquad 0<T<\infty, \tag{3.20}$$

где

$$q_1(T)=\begin{cases}\frac{6}{T^2}, & 0<T<\frac{2}{kR^{-1}},\\ \frac{3(kR^{-1})^2T^2+12}{2T^3kR^{-1}}, & \frac{2}{kR^{-1}}\le T<\infty.\end{cases} \tag{3.21}$$

Правое соотношение в (3.20) рассмотрим в случае равенства, записанного в виде

$$Q(T,\left|x_1^1\right|,\left|x_2^1\right|)=1-kR^{-1}\left|x_2^1\right|,\qquad 0<T<\infty, \tag{3.22}$$

где

$$Q(T,|x_1^1|,|x_2^1|)=\begin{cases}\dfrac{6}{T^2}|x_1^1|+\dfrac{4}{T}|x_2^1|, & 0<T\le\dfrac{2}{kR^{-1}}=T^*,\\ \dfrac{6}{kR^{-1}}|x_1^1|\dfrac{1}{T^3}+\left(\dfrac{3kR^{-1}}{2}|x_1^1|+4|x_2^1|\right)\dfrac{1}{T}, & \dfrac{2}{kR^{-1}}\le T<\infty.\end{cases} \tag{3.23}$$

Из положительности левой части (3.22) следует, что $|x_2^1|<k^{-1}R$. Далее, из (3.23) следует, что функция $Q(T,|x_1^1|,|x_2^1|)$ по T непрерывна и монотонно убывает от ∞ до 0 при изменении T от 0 до ∞. Следовательно, неравенство (3.20) будет выполнено при всех $t\in[0,T]$, если время окончания процесса управления T будет выбрано из условия (3.22) для любой пары $(|x_1^1|,|x_2^1|)\in X$, где

$$X=\left\{(|x_1^1|,|x_2^1|):\quad |x_1^1|<\infty,\ \ |x_2^1|<k^{-1}R\right\}. \tag{3.24}$$

Таким образом, для любой пары $(|x_1^1|,|x_2^1|)\in X$ искомое управление $v(t)$ (2.12), удовлетворяющее ограничению (1.11) и переводящее систему (1.10) из начального состояния покоя (1.12) в заданное конечное состояние (1.13), можно построить, если сначала определить время T из условия (3.22) и подставить найденное в формулу (2.12) для управления v.

Перейдем к решению уравнения (3.22). Рассмотрим следующие два интервала: $\left(0,T^*\right]$ и $\left[T^*,\infty\right)$, $T^*=\dfrac{2}{kR^{-1}}$, которым соответствуют две области изменения пары $(|x_1^1|,|x_2^1|)$:

$$\begin{aligned}X_-&=\left\{(|x_1^1|,|x_2^1|):\ 1.5(kR^{-1})^2|x_1^1|+3kR^{-1}|x_2^1|\le 1;\ \ |x_1^1|<\infty,\ \ |x_2^1|<k^{-1}R\right\},\\ X_+&=\left\{(|x_1^1|,|x_2^1|):\ 1.5(kR^{-1})^2|x_1^1|+3kR^{-1}|x_2^1|\ge 1;\ \ |x_1^1|<\infty,\ \ |x_2^1|<k^{-1}R\right\}.\end{aligned} \tag{3.25}$$

Если $(|x_1^1|,|x_2^1|)\in X_-$, то искомое время $T\in\left(0,T^*\right]$ следует определить из первого уравнения (3.22), (3.23), приведенного к квадратному уравнению

$$(1-kR^{-1}|x_2^1|)T^2-4|x_2^1|T-6|x_1^1|=0 \tag{3.26}$$

и имеющего на интервале $\left(0,T^*\right]$ единственное решение

$$T=\left(2|x_2^1|+\sqrt{4|x_2^1|^2+6(1-kR^{-1}|x_2^1|)|x_1^1|}\right)\cdot\left(1-kR^{-1}|x_2^1|\right)^{-1}. \tag{3.27}$$

Если $(|x_1^1|,|x_2^1|)\in X_+$, то искомое время $T\in\left[T^*,\infty\right)$ и определяется из второго уравнения (3.22), (3.23), приведенного к кубическому уравнению (3.12) с коэффициентами

$$a=2kR^{-1}(1-kR^{-1})|x_2^1|>0,\quad b=-(3kR^{-1}|x_1^1|+8|x_2^1|)kR^{-1}<0,\quad d=-12|x_1^1|<0. \tag{3.28}$$

Так как дискриминант уравнения (3.12), (3.28) также отрицательный, то оно имеет один действительный положительный корень, который определяется с помощью формулы Кардано (3.13) с учетом коэффициентов (3.28).

Переходя с помощью (1.9), (2.12), (3.14) к исходным переменным, управляющую функцию $u(t)$ в каждый момент t можно вычислить по формуле

$$u(t)=\left(\frac{3kR^{-1}x_2^1}{T^2}-\frac{6kR^{-1}x_1^1}{T^3}\right)t^2+\left[\frac{6x_2^1}{T^2}-\frac{12x_1^1}{T^3}+\left(\frac{6x_1^1}{T^2}-\frac{2x_2^1}{T}\right)kR^{-1}\right]t+\frac{6x_1^1}{T^2}-\frac{2x_2^1}{T}$$

в которой время T определяется с помощью (3.13), (3.27).

Заключение. Путем использования обобщенного метода Калмана в явном виде получены формулы, позволяющие вычислить время и соответствующее управление, которые обеспечивают перемещение электромеханической системы, моделирующей динамику однозвенного манипулятора, из начального состояния покоя в произвольное конечное состояние покоя за конечное время и гарантируют ненарушения заданного ограничения на управление в процессе перехода.

Получено также условие, которое на фазовой плоскости системы образует область конечных состояний, приход в которые происходит за конечное время с соблюдением заданного ограничения на управление.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного гранта 15T-2C026.

[1]Институт механики НАН РА
e-mail: ara.serg.avetisyan@gmail.com
[2]Ереванский государственный университет
e-mail: vavetisyan@ysu.am

Член-корреспондент НАН РА А. С. Аветисян, В. В. Аветисян

О построении ограниченного управления электромеханической системой

Рассматривается задача построения ограниченного управления для электромеханической системы с одной степенью свободы. Применяя обобщенную схему построения управления Калмана, распространяемую на случай наличия ограничения на управление, в явном виде найден закон управления, позволяющий перевести рассматриваемую систему за конечное время из заданного состояния покоя в произвольное конечное состояние покоя. Получено также условие, которое на фазовой плоскости системы образует определенную область конечных состояний, приведение системы в которые по предложенному способу происходит за конечное время с ненарушением заданного ограничения на управление.

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ա. Ս. Ավետիսյան, Վ. Վ. Ավետիսյան

Էլեկտրամեխանիկական համակարգի սահմանափակ ղեկավարման կառուցման մասին

Դիտարկվում է ազատության մեկ աստիճանով օժտված էլեկտրամեխանիկական համակարգի համար սահմանափակ ղեկավարում կառուցելու խնդիր: Ղեկավարման ֆունկցիայի վրա դրված սահմանափակման առկայության դեպքում, կիրառելով ղեկավարման կառուցելու Կալմանի ընդհանրացված սխեման, բացահայտ տեսքով գտնվել է դիտարկվող համակարգը վերջավոր ժամանակում տրված հանգստի վիճակից կամայական վերջնական հանգստի վիճակի տեղափոխումն ապահովող ղեկավարման օրենք: Ստացվել է նաև պայման, որը համակարգի ֆազային հարթության մեջ կազմում է վերջնական վիճակների որոշակի տիրույթ: Ցույց է տրվում, որ ղեկավարման ֆունկցիայի վրա դրված սահմանափակման դեպքում առաջարկված եղանակով համակարգի բերումը այդ ֆազային տիրույթ տեղի է ունենում վերջավոր ժամանակում:

**Corresponding member of NAS RA A. S. Avetisyan,
V. V. Avetisyan**

On the Formulation of a Limited Control of Electromechanical System

The task of formulating a limited control for the electromechanical systems with one degree of freedom is considered. By applying the generalized scheme for constructing the Kalman controllability, a control law in explicit form is found that makes it possible to transfer the system under consideration from a given state of rest to an arbitrary finite state of rest in a finite time. A condition that forms a definite region of final states on the phase plane of the system is obtained. It is shown that the reducing of system by the proposed method in this phase region occurs in a finite time without a violation of the specified restrictions on the office.

Литература

1. *Chernousko F. L., Bolotnik N. N., Gradetsky V. G.* Manipulation Robots: Dynamics, Control and Optimization. Boca Raton: CRC Press. 1994. 268 p.
2. *Chernousko F. L., Ananievski I. M., Reshmin S. A.* Control of Nonlinear Dynamical Systems. Methods and Applications. Berlin, Heidelberg: Springer, 2008. 396 p.
3. *Аветисян В. В.* – Изв. НАН РА. Механика. 2000. Т. 53. № 4. С. 48-55.
4. *Аветисян В. В.* - Изв. НАН РА. Механика. 2002, Т. 55. №1. С. 68-74.
5. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением.М. Наука. 1968. 476 с.