ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր
Том 117 2017 № 2
Volume

МАТЕМАТИКА

УДК 514.752.44

В. А. Мирзоян, Г. С. Мачкалян

Геометрия одного класса риччи-полусимметрических подмногообразий произвольной коразмерности в евклидовых пространствах

(Представлено академиком В. С. Захаряном 20/IV 2017)

Ключевые слова: *риччи-полусимметрические подмногообризия, конусы,* ***эйнштейновы подмногообразия.***

1. **Введение.** Пусть M – риманово многообразия с тензором Риччи R_1 и операторами кривизны $R(X,Y)$, где X,Y – произвольные векторные поля на M. Если $R(X,Y)R_1 = 0$ для любых X,Y, то тензор R_1 называется полупараллельным, а само многообразие M называется риччи-полупараллельным или риччи-полусимметрическим. Риччи-полусимметрические многообразия являются естественными обобщениями симметрических, эйнштейновых, полусимметрических многообразий и римановых многообразий с параллельным тензором Риччи (см. [1-3] и цитированную в них литературу). Общая классификация римановых риччи-полусимметрических многообразий получена в [2]. Различные классы риччи-полусимметрических подмногообразий исследованы и геометрически описаны в [3-11].

В настоящей работе результаты, полученные в [12] для одного класса нормально плоских риччи-полусимметрических подмногообразий коразмерности два с нулевым индексом сингулярности и индексом регулярности два, распространяются на случай подмногообразия произвольной коразмерности. За стандартными сведениями по геометрии подмногообразий отсылаем к монографии [1] и к работам [4, 5, 8].

2. **Нормально плоские риччи-полусимметрические подмногообразия, удовлетворяющие условиям** $i_R = 2,\ \mu = \nu$**.** Пусть в n – мерном евклидовом пространстве E_n m-мерное нормально плоское риччи-полусимметрическое подмногообразие M удовлетворяет указанным условиям и имеет только одно ненулевое собственное значение тензора Риччи. Первое

условие означает, что группа $W^{(1)}$ (см. [8, 9]) регулярных главных векторов кривизны (г.в.к.) содержит два линейно независимых вектора, а остальные векторы являются их линейными комбинациями. Второе условие означает, что пространства дефектности $T_x^{(0)}$ и относительной дефектности T_x' (см. [8, 9]) совпадают. Следовательно, подмногообразие M допускает только нулевой сингулярный г.в.к. Если T_x' является нулевым пространством, то M – эйнштейново подмногообразие. При $\dim T_x' \geq 1$ подмногообразие M является полуэйнштейновым.

Здесь мы рассмотрим случай, когда подмногообразие M имеет только два различных линейно независимых г.в.к. n_1, n_2 с кратностями p_1, p_2 соответственно. В этом случае $\rho = |n_1|^2 - \langle H, n_1 \rangle = |n_2|^2 - \langle H, n_2 \rangle$, где ρ – единственное ненулевое собственное значение тензора Риччи, $H = p_1 n_1 + p_2 n_2$ – вектор средней кривизны, а $\langle , \rangle$ – скалярное произведение в E_n. Если $H = 0$, то векторы n_1, n_2 будут линейно зависимы, что противоречит условию. Следовательно, в рассматриваемом случае подмногообразие не может быть минимальным. Подставляя значение H в приведённую выше формулу, получим

$$(p_1 - 1)|n_1|^2 - (p_1 - p_2)\langle n_1, n_2 \rangle - (p_2 - 1)|n_2|^2 = 0 . \tag{1}$$

Из этого равенства можем получить ряд следствий. Во-первых, отметим, что при $p_1 = p_2 = 1$ оно автоматически выполняется. Во-вторых, поскольку $\langle n_1, n_2 \rangle = |n_1||n_2|\cos\varphi$, где φ – угол между векторами n_1 и n_2, то из (1) следует, что

$$\cos\varphi = \frac{(p_1 - 1)|n_1|^2 - (p_2 - 1)|n_2|^2}{(p_1 - p_2)|n_1||n_2|} .$$

Эта формула справедлива, если хотя бы одна из кратностей p_1, p_2 больше единицы и $p_1 \neq p_2$. Из этой формулы следует, что угол между векторами n_1 и n_2 вполне определяется их кратностями и отношением их модулей.

В третьих, если в (1) положить $p_1 = p_2 \geq 2$, то получим $|n_1| = |n_2|$. Верно и обратное, если $|n_1| = |n_2|$, то из (1) после необходимых преобразований будем иметь $(p_1 - p_2)(1 - \cos\varphi) = 0$. Так как векторы n_1, n_2 линейно независимы, то $1 - \cos\varphi > 0$ и, следовательно, $p_1 = p_2 \geq 2$. Итак, доказано, что условия $|n_1| = |n_2|$ и $p_1 = p_2 (\geq 2)$ эквивалентны.

Если в равенстве (1) положить $p_2 = 1$, то получим $(p_1 - 1)(|n_1|^2 - \langle n_1, n_2 \rangle) = 0$. Отсюда следует, что или $p_1 = 1$, или $p_1 \geq 2$ и $|n_1|^2 = \langle n_1, n_2 \rangle$. Таким образом, необходимо рассмотреть всего три случая:

1) $p_1 = p_2 = 1$, 2) $p_1 \geq 2,\ p_2 = 1,\ |n_1|^2 = \langle n_1, n_2 \rangle$, 3) $p_1 \geq 2,\ p_2 \geq 2$.

В первом случае кодефектность подмногообразия M равна двум. Как известно, всякое подмногообразие кодефектности два является полуэйнштейновым. Примером рассматриваемого класса подмногообразий кодефектности два является прямое произведение двух одинаковых кривых и некоторой $k-$мерной плоскости. Третий случай был исследован в В. А. Мирзояном и Г. С. Мачкаляном [9]. Здесь мы рассмотрим только второй случай.

Итак, пусть $p_1 \geq 2$, $p_2 = 1$, $|n_1|^2 = < n_1, n_2 >$. Из последнего равенства следует, что $|n_1| = |n_2| \cos\varphi$. Следовательно, векторы n_1 и n_2 образуют острый угол. Вычисляя в настоящем случае ρ по приведённой выше формуле, получим $\rho = -p_1 |n_1|^2$. Следовательно, кривизна Риччи исследуемого подмногообразия отрицательна. Кроме того, легко видеть, что условие $|n_1|^2 = \\ = < n_1, n_2 >$ равносильно условию $< n_1, n_1 - n_2 >= 0$, т.е. $n_1 \perp n_1 - n_2$ в каждой точке на подмногообразии M.

Пусть $T_x^{(n_1)}$, $T_x^{(n_2)}$, $T_x^{(0)}$ обозначают собственные подпространства, соответствующие векторам n_1, n_2 и нулевому главному вектору кривизны в касательном пространстве $T_x(M)$. Поскольку $\dim T_x^{(n_1)} = p_1 = p$, $\dim T_x^{(n_2)} = 1$, $\dim T_x^{(0)} = \mu$, то адаптированный ортономированный репер $\{x, e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \cdots, e_n\}$ можем выбрать так, чтобы он был согласован со структурой прямой суммы $T_x(M) = T_x^{(n_1)} + T_x^{(n_2)} + T_x^{(0)}$, т.е.

$$e_a \in T_x^{(n_1)}, \quad e_{p+1} \in T_x^{(n_2)}, \; e_r \in T_x^{(0)}, \quad e_\alpha \in T_x^{\perp}(M),$$

где $T_x^{\perp}(M)-$ нормальное пространство к подмногообразию M в точке x, а индексы пробегают следующие значения:

$$a, b, c = 1, \cdots, p, \qquad r, s, t = p+2, \cdots, m, \qquad i, j, k = 1, \cdots, m, \quad \alpha, \beta = m+1, \cdots, n.$$

При таком выборе репера $\lambda_a^\alpha = \lambda_b^\alpha$, $a \neq b$, $\lambda_r^\alpha = 0$. Поскольку $n_1 \perp n_1 - n_2$, то единичные векторы e_{m+1}, e_{m+2} можем выбрать так, чтобы e_{m+1} был коллинеарен вектору n_1, а $e_{m+2}-$ вектору $n_1 - n_2$. Тогда

$$n_1 = \lambda_a^{m+1} e_{m+1}, \quad \lambda_a^{m+1} \neq 0, \quad \lambda_a^{m+2} = 0, \quad \lambda_a^\gamma = 0, \quad \gamma, \delta = m+3, \cdots, n.$$

Далее, если $n_2 = \lambda_{p+1}^{m+1} e_{m+1} + \lambda_{p+1}^{m+2} e_{m+2} + \lambda_{p+1}^\gamma e_\gamma$, то

$$n_1 - n_2 = \left(\lambda_a^{m+1} - \lambda_{p+1}^{m+1}\right) e_{m+1} - \lambda_{p+1}^{m+2} e_{m+2} - \lambda_{p+1}^\gamma e_\gamma.$$

Поскольку $n_1 - n_2 \parallel e_{m+2}$, то $\lambda_{p+1}^{m+1} = \lambda_a^{m+1}$, $\lambda_{p+1}^\gamma = 0$. Таким образом, для векторов n_1, n_2 и вектора средней кривизны H получаем следующие формулы:

$$n_1 = \lambda_a^{m+1} e_{m+1}, \quad n_2 = \lambda_a^{m+1} e_{m+1} + \lambda_{p+1}^{m+2} e_{m+2}, ,$$

$$H = (p+1) \lambda_a^{m+1} e_{m+1} + \lambda_{p+1}^{m+2} e_{m+2}, \quad \lambda_{p+1}^{m+2} \neq 0.$$

В выбранном репере матрицы $\left\| h_{ij}^\alpha \right\|$ второй фундаментальной формы подмногообразия M имеют следующий вид:

$$\left\| h_{ij}^{m+1} \right\| = \left\| \begin{matrix} \lambda_a^{m+1} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_a^{m+1} & & & & \\ & & & \lambda_{p+1}^{m+1} & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{matrix} \right\|, \quad \left\| h_{ij}^{m+2} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & \lambda_{p+1}^{m+2} & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{matrix} \right\|,$$

$$\left\| h_{ij}^{\gamma} \right\| = \left\| 0 \right\|.$$

Верно и обратное. Если в некотором ортономированном репере, адаптированном к подмногообразию M в E_n, матрицы второй фундаментальной формы приводятся к указанному выше виду с такими же условиями на диагональные элементы, как и выше, то нормальная связность будет плоской, подмногообразие M будет иметь два главных вектора кривизны n_1, n_2 кратностей p и 1 и будет выполняться условие $\left| n_1 \right|^2 = < n_1, n_2 >$. Непосредственно можно проверить, что тензор Риччи будет иметь только одно ненулевое собственное значение $-p\left(\lambda_a^{m+1}\right)^2$.

Перейдем к исследованию геометрического строения подмногообразия M. Если репер $\left\{\omega^1, \cdots, \omega^m, \omega^{m+1}, \cdots, \omega^n\right\}$ является двойственным к выбранному выше ортонормированному адаптированному реперу, то на подмногообразии M выполняются следующие соотношения:

$$\omega^\alpha = 0, \quad \omega_i^\alpha = \lambda_i^\alpha \omega^i, \tag{2}$$

$$d\lambda_i^\alpha \delta_{ij} + \lambda_i^\beta \delta_{ij} \omega_\beta^\alpha + \left(\lambda_j^\alpha - \lambda_i^\alpha\right)\omega_j^i = h_{ijk}^\alpha \omega^k. \tag{3}$$

В этих формулах по индексу i нет суммирования. (В дальнейшем будем придерживаться следующего соглашения: если некоторый индекс содержится в левой и правой частях формулы, то по этому индексу суммирование не производится). Отметим, что поскольку, в силу выбора репера, $\lambda_r^\alpha = \lambda_a^{m+2} = \lambda_a^\gamma = \lambda_{p+1}^\gamma = 0$, то $\omega_r^\alpha = \omega_a^{m+2} = \omega_a^\gamma = \omega_{p+1}^\gamma = 0$.

Для того, чтобы из формулы (3) получить ряд условий, необходимых в дальнейшем, индексам будем придавать различные значения. Поступая так же, как и в [12], получим следующие соотношения:

$$\lambda_r^\alpha = \lambda_a^{m+2} = \lambda_i^\gamma = h_{rsk}^\alpha = h_{aa(p+1)}^{m+1} = h_{a(p+1)(p+1)}^{m+1} = h_{abk}^\alpha = 0, \; a \neq b,$$

$$h_{a(p+1)r}^{m+1} = h_{a(p+1)r}^{m+2} = h_{aar}^{m+2} = h_{aaa}^\alpha = h_{kar}^\gamma = h_{k(p+1)r}^\gamma = h_{aa(p+1)}^{\gamma} = h_{a(p+1)(p+1)}^{\gamma} = 0,$$

$$h_{aa(p+1)}^\alpha = h_{bb(p+1)}^\alpha, \; a \neq b, \quad h_{aar}^\alpha = h_{bbr}^\alpha, \; a \neq b, \quad h_{aar}^{m+1} = h_{(p+1)(p+1)r}^{m+1},$$

$$\frac{h_{(p+1)(p+1)(p+1)}^{m+1}}{\lambda_{p+1}^{m+2}} = -\frac{h_{aa(p+1)}^{m+2}}{\lambda_a^{m+1}}, \quad \frac{h_{(p+1)(p+1)r}^{m+1}}{\lambda_a^{m+1}} = \frac{h_{(p+1)(p+1)r}^{m+2}}{\lambda_{p+1}^{m+2}}.$$

$$d\lambda_a^{m+1} = h_{aar}^{m+1}\omega^r, \quad d\lambda_{p+1}^{m+2} = h_{(p+1)(p+1)a}^{m+2}\omega^a + \left(h_{(p+1)(p+1)(p+1)}^{m+2} - h_{aa(p+1)}^{m+2}\right)\omega^{p+1} + h_{(p+1)(p+1)r}^{m+2}\omega^r,$$

$$\lambda_{p+1}^{m+2}\omega_{p+1}^a = h_{aa(p+1)}^{m+2}\omega^a + h_{a(p+1)(p+1)}^{m+2}\omega^{p+1}, \quad \lambda_a^{m+1}\omega_a^r = h_{aar}^{m+1}\omega^a,$$

$$\lambda_a^{m+1}\omega_{m+1}^{m+2} = h_{aa(p+1)}^{m+2}\omega^{p+1}, \quad \lambda_a^{m+1}\omega_{p+1}^r = h_{(p+1)(p+1)r}^{m+1}\omega^{p+1},$$

$$\lambda^{m+2}_{p+1}\omega^{\gamma}_{m+2} = h^{\gamma}_{(p+1)(p+1)(p+1)}\omega^{p+1}, \quad \omega^{\alpha}_{r} = \omega^{m+2}_{a} = \omega^{\gamma}_{m+1} = \omega^{\gamma}_{i} = 0 .$$

Если ввести обозначения

$$F_r = \frac{h^{m+1}_{aar}}{\lambda^{m+1}_{a}}, \ A = \frac{h^{m+2}_{aa(p+1)}}{\lambda^{m+2}_{p+1}}, \ B = \frac{h^{m+2}_{(p+1)(p+1)(p+1)}}{\lambda^{m+2}_{p+1}},$$

$$G_a = \frac{h^{m+2}_{(p+1)(p+1)a}}{\lambda^{m+2}_{p+1}}, \ D = \frac{h^{m+2}_{aa(p+1)}}{\lambda^{m+1}_{a}} = \frac{\lambda^{m+2}_{(p+1)}}{\lambda^{m+1}_{a}} A, \quad E^{\gamma} = \frac{h^{\gamma}_{(p+1)(p+1)(p+1)}}{\lambda^{m+2}_{p+1}},$$

то приведенную выше дифференциальную систему можем преобразовать к виду

$$\begin{gathered} d\ln\left|\lambda^{m+1}_{a}\right| = F_r\omega^r, \qquad d\ln\left|\lambda^{m+2}_{p+1}\right| = G_a\,\omega^a + (B-A)\,\omega^{p+1} + F_r\omega^r, \\ \omega^{a}_{p+1} = A\omega^a + G_a\omega^{p+1}, \quad \omega^{r}_{a} = F_r\omega^a, \qquad \omega^{m+2}_{m+1} = D\omega^{p+1}, \\ \omega^{r}_{p+1} = F_r\omega^{p+1}, \quad \omega^{\gamma}_{m+2} = E^{\gamma}\omega^{p+1}, \ \omega^{\alpha}_{r} = \omega^{m+2}_{a} = \omega^{\gamma}_{m+1} = \omega^{\gamma}_{i} = 0 . \end{gathered} \tag{4}$$

Приступим к исследованию подмногообразия M. Рассмотрим дифференциальную систему $\omega^{\alpha} = 0, \omega^{p+1} = 0, \omega^{r} = 0$, которая задает распределение $T^{(n_1)}$. Поскольку $d\omega^{\alpha} = 0$, $d\omega^{p+1} = 0$, $d\omega^{r} = 0$, то распределение $T^{(n_1)}$ интегрируемо. В силу $\omega^{\alpha}_{a} = \lambda^{\alpha}_{a}\omega^{a}$, $\omega^{p+1}_{a} = -A\omega^{a}$, $\omega^{r}_{a} = F_r\omega^{a}$ интегральное многообразие является вполне омбилическим, т.е. представляет собой сферу (т.к. $\lambda^{m+1}_{a} \neq 0$) размерности p, которую будем обозначать через $S^p(R)$. Поскольку в настоящем случае

$$\omega^{m+2}_{m+1} = \omega^{\gamma}_{m+1} = \omega^{\gamma}_{m+2} = \omega^{m+1}_{r} = \omega^{m+2}_{r} = \omega^{r}_{p+1} = \omega^{\gamma}_{p+1} = 0,$$

$$\omega^{m+1}_{p+1} = \lambda^{m+1}_{p+1}\omega^{p+1} = 0, \ \ \omega^{m+2}_{p+1} = \lambda^{m+2}_{p+1}\omega^{p+1} = 0,$$

то векторные поля $e_{m+1}, e_{m+2}, e_{p+1}$ параллельны в нормальном расслоении сферы $S^p(R)$. Тогда в силу $\omega^{\gamma}_{r} = 0$ и приведённых выше равенств, подрасслоения нормального расслоения сферы $S^p(R)$, которые образуют линейные оболочки $((e_{p+2},\cdots,e_m))_x$, $((e_{m+3},\cdots,e_n))_x$, также параллельны в нормальном расслоении. Так как нормальная связность сферы $S^p(R)$, как известно, плоская, то в этих подрасслоениях, в силу их параллельности, индуцируются плоские нормальные связности. Это значит, что векторные поля e_r, e_{γ} можем выбрать так, чтобы они были параллельными в нормальном расслоении сферы $S^p(R)$. Это равносильно тому, что на подмногообразии M дифференциальные формы $\omega^{s}_{r}, \omega^{\delta}_{\gamma}$ зависят только от форм ω^{p+1}, ω^{r}, т.е. $\omega^{s}_{r} = \Gamma^{s}_{r\,p+1}\omega^{p+1} + \Gamma^{s}_{rt}\omega^{t}$, $\omega^{\delta}_{\gamma} = \Gamma^{\delta}_{\gamma\,p+1}\omega^{p+1} + \Gamma^{\delta}_{\gamma r}\,\omega^{r}$. Далее, поскольку в настоящем случае первые два уравнения в (4) принимают вид $\lambda^{m+1}_{a} = const\ (\neq 0)$, $d\ln\left|\lambda^{m+2}_{p+1}\right| = G_a\,\omega^{a}$, то функция λ^{m+2}_{p+1} будет постоянной вдоль сферы $S^p(R)$ тогда и только тогда, когда $G_a = 0$.

Распределение $T^{(n_2)}$ задается дифференциальной системой $\omega^{\alpha} = 0$, $\omega^{a} = 0$, $\omega^{r} = 0$. Легко проверить, что $d\omega^{\alpha} = 0$, $d\omega^{a} = 0$, $d\omega^{r} = 0$. Следовательно, это распределение интегрируемо и поскольку оно одномерно, то его интегральное многообразие представляет собой кривую, которую будем обозначать через L. Покажем, что L не является прямой. Действительно, поскольку в этом случае

$$de_{p+1}=\left(\sum_a G_a e_a+\sum_r F_r e_r+\lambda_a^{m+1}e_{m+1}+\lambda_{p+1}^{m+2}e_{m+2}\right)\omega^{p+1}$$

и, как мы знаем, $\lambda_a^{m+1}\neq 0$, $\lambda_{p+1}^{m+2}\neq 0$, то $de_{p+1}\neq 0$. Это значит, что вдоль кривой L вектор e_{p+1} не является постоянным. Отсюда следует, что кривая L не является прямой. Далее, поскольку

$$de_a=(\Gamma^b_{a\,p+1}e_b-G_a e_{p+1})\omega^{p+1},\ de_r=(-F_r e_{p+1}+\Gamma^s_{r\,p+1}e_s)\omega^{p+1},$$

$$de_{m+1}=(-\lambda_a^{m+1}e_{p+1}+De_{m+2})\omega^{p+1},$$

$$de_{m+2}=(-\lambda_{p+1}^{m+2}e_{p+1}-De_{m+1}+E^\gamma e_\gamma)\omega^{p+1},\quad de_\gamma=(-E^\gamma e_{m+2}+\Gamma^\delta_{\gamma\,p+1}e_\delta)\omega^{p+1},$$

то кривая L в общем случае, т.е. когда все функции, фигурирующие в этих формулах, отличны от нуля, не содержится ни в каком собственном подпространстве пространства E_n.

Распределение $T^{(0)}$ задается дифференциальной системой $\omega^\alpha=0$, $\omega^a=0$, $\omega^{p+1}=0$. Непосредственно проверяется, что оно также интегрируемо и поскольку в настоящем случае $\omega_r^\alpha=\omega_r^a=\omega_r^{p+1}=0$, то его интегральное многообразие является вполне геодезическим в E_n, т.е. представляет собой плоскость размерности μ, которую будем обозначать через E_μ.

Таким образом, можем сказать, что подмногообразие M локально несёт ортогональную сопряжённую систему, состоящую из p – мерной сферы, некоторой кривой и μ – мерной плоскости.

Пусть в системе (4) $E^\gamma=0$. Тогда $\omega^\gamma_{m+1}=\omega^\gamma_{m+2}=0$. Отсюда следует, что подрасслоение нормального расслоения подмногообразия M, образуемое линейной оболочкой $((e_{m+1},e_{m+2}))_x$ является параллельным в нормальном расслоении. Тогда его ортогональное дополнение, как подрасслоение нормального расслоения, образуемое линейной оболочкой $((e_{m+3},\cdots,e_n))_x$ также будет параллельным в нормальном расслоении подмногообразия M. В этом подрасслоении, в силу плоской нормальной связности подмногообразия M, индуцируется плоская связность. Это значит, что векторные поля $e_{m+3},\cdots,e_n$ мы можем выбрать параллельными в нормальном расслоении, что равносильно условию $\omega_\delta^\gamma=0$. Тогда легко проверить, что $de_\gamma=0$ или $e_\gamma=const$. Это значит, что подмногообразие M находится в некотором евклидовом пространстве размерности $m+2$, т.е. имеет существенную коразмерность два. Поэтому в дальнейшем будем считать, что среди функций E^γ имеются ненулевые.

Рассмотрим, теперь дифференциальную систему $\omega^\alpha=0, \omega^r=0$, которая задает распределение $T^{(n_1)}+T^{(n_2)}$, сопоставляющее каждой точке $x\in M$

прямую сумму $T_x^{(n_1)} + T_x^{(n_2)}$. Это распределение фактически совпадает с распределением кодефектности $T^{(1)}$. Поскольку $d\omega^\alpha = 0,\ d\omega^r = 0$, то распределение $T^{(1)}$ интегрируемо. Его интегральное многообразие будем обозначать через $\tilde{M}$. Из формул $\omega_a^\alpha = \lambda_a^\alpha \omega^a$, $\omega_{p+1}^\alpha = \lambda_{p+1}^\alpha \omega^a$, $\omega_a^r = F_r \omega^a$, $\omega_{p+1}^r = F_r \omega^{p+1}$ следует, что $\tilde{M}$ является нормально плоским (т.к. все матрицы его второй фундаментальной формы имеют диагональный вид) в E_n и вполне омбилическим подмногообразием в M. Если вычислить г.в.к. $\tilde{n}_a, \tilde{n}_{p+1}$, вектор средней кривизны $\tilde{H}$ и собственные значения $\tilde{\rho}_a, \tilde{\rho}_{p+1}$ тензора Риччи подмногообразия $\tilde{M}$, то получим

$$\tilde{n}_a = \lambda_a^{m+1} e_{m+1} + \sum_r F_r e_r, \quad \tilde{n}_{p+1} = \lambda_a^{m+1} e_{m+1} + \lambda_{p+1}^{m+2} e_{m+2} + \sum_r F_r e_r,$$

$$\tilde{H} = (p+1)\lambda_a^{m+1} e_{m+1} + \lambda_{p+1}^{m+2} e_{m+2} + (p+1)\sum_r F_r e_r,$$

$$\tilde{\rho}_a = |\tilde{n}_a|^2 - <\tilde{H}, \tilde{n}_a> = -p((\lambda_a^{m+1})^2 + \sum_r (F_r)^2),$$

$$\tilde{\rho}_{p+1} = |\tilde{n}_{p+1}|^2 - <\tilde{H}, \tilde{n}_{p+1}> = -p((\lambda_a^{m+1})^2 + \sum_r (F_r)^2).$$

Из последних двух равенств следует, что $\tilde{M}$ является эйнштейновым подмногообразием в E_n. На основании результатов работы [4] заключаем, что в этом случае само подмногообразие M изометрично или цилиндру над $\tilde{M}$, или цилиндру с $(\mu - 1)$-мерными плоскими образующими над конусом, построенным над $\tilde{M}$.

Дифференцируя внешним образом первое и четвертое уравнения системы (4) и применяя лемму Картана, получим, соответственно,

$$dF_r - F_s \omega_r^s = F_{rs} \omega^s, \quad F_{rs} = F_{sr}, \quad dF_r - F_s \omega_r^s = F_r F_s \omega^s. \tag{*}$$

Следовательно, $F_{rs} = F_r \cdot F_s$ и в дальнейшем будем рассматривать только второе уравнение.

Рассмотрим подмногообразие $\tilde{M}$ более подробно. На этом подмногообразии $T^\perp(M)$ и $T^{(0)}$, как подрасслоения нормального расслоения, являются параллельными в силу $\omega_r^\alpha = 0$. Поскольку $\tilde{M}$ имеет плоскую нормальную связность, то, в силу параллельности $T^\perp(M)$ и $T^{(0)}$ в нормальном расслоении, в них индуцируются плоские нормальные связности. Это значит, что в $T^{(0)}$, как в подрасслоении нормального расслоения подмногообразия $\tilde{M}$, векторы e_r мы можем выбрать так, чтобы они были параллельны. Поскольку при $\omega^r = 0$, т.е. на $\tilde{M}$, векторное поле $\eta = \sum_r F_r e_r$ также является параллельным (это следует из (*)), то вектор e_m мы можем выбрать так, чтобы он был коллинеарен вектору η. Тогда $\eta = F_m e_m$, $F_r = 0$ при $r \neq m$. Из (*) при $r \neq m$ следует, что $F_m \omega_r^m = 0$. Следовательно, мы должны рассматривать два случая: (а) $F_m = 0$, (б) $F_m \neq 0$, $\omega_r^m = 0$.

Рассмотрим случай (а). Пусть $F_m = 0$. Тогда $\omega_a^r = \omega_{p+1}^r = 0$ и, следовательно, распределения $T^{(1)} = T^{(n_1)} + T^{(n_2)}$ и $T^{(0)}$ параллельны на M. Поскольку они сопряжены относительно второй фундаментальной формы подмногообразия M, то M является прямым произведением их интегральных многообразий, т.е. $M = \tilde{M} \times E_\mu$. Выясним, что представляет собой подмногообразие $\tilde{M}$ в случае, когда в системе (4) $G_a = 0$. Поскольку, кроме того, $\lambda_a^{m+1} = const \neq 0$, то из системы (4) для $\tilde{M}$ получаем следующую систему:

$$
\begin{gathered}
d \ln \left| \lambda_{p+1}^{m+2} \right| = (B - A)\, \omega^{p+1}, \quad \omega_{p+1}^a = A \omega^a, \\
\omega_{m+1}^{m+2} = D \omega^{p+1}, \quad \omega_{m+2}^\gamma = E^\gamma \omega^{p+1}, \quad \omega_a^r = \omega_{p+1}^r = 0, \qquad (5) \\
\omega_r^\alpha = \omega_a^{m+2} = \omega_{m+1}^\gamma = \omega_i^\gamma = 0.
\end{gathered}
$$

Сразу отметим, что внешнее дифференцирование последних шести уравнений этой системы не приводит к новым соотношениям. Далее, поскольку $d\omega^{p+1} = 0$, то $\omega^{p+1} = dx^{p+1}$, где x^{p+1} – координата по кривой L. Заметим, что в (5) коэффициент A должен быть отличен от нуля, поскольку в противном случае подмногообразие $\tilde{M}$ будет прямым произведением сферы $S^p(R)$ и кривой L и тогда индекс дефектности $\tilde{M}$ будет отличен от нуля. Дифференцируя внешним образом второе уравнение системы (5) , применяя лемму Картана и учитывая независимость формы ω^a, получим $dA = -$ $-\left(\left(\lambda_a^{m+1} \right)^2 + A^2 \right) \omega^{p+1}$. Интегрируя это уравнение, приходим к следующим соотношениям:

$$
A = \lambda_a^{m+1} tg \left(c_1 - \lambda_a^{m+1} x^{p+1} \right), \; D = \lambda_{p+1}^{m+2} tg \left(c_1 - \lambda_a^{m+1} x^{p+1} \right),
$$

где c_1 – постоянная интегрирования. Из первого уравнения системы (5) имеем $\lambda_{p+1}^{m+2} = c_2 e^{\int (B-A) dx^{p+1}}$, где $c_2 (\neq 0)$ – постоянная интегрирования. Дифференцируя внешним образом первое уравнение системы (5), получим $dB = \tilde{B} \omega^{p+1}$. Следовательно, B также является функцией от x^{p+1}. Дифференцируя внешним образом четвёртое уравнение системы (5), получим $dE^\gamma + E^\delta \omega_\delta^\gamma = Q^\gamma \omega^{p+1}$. Поскольку $\omega_\gamma^\delta = \Gamma_{\gamma\, p+1}^\delta \omega^{p+1}$, то получаем систему линейных дифференциальных уравнений

$$
\frac{dE^\gamma}{dx^{p+1}} = Q^\gamma - E^\delta \Gamma_{\delta\, p+1}^\gamma,
$$

которая, в предположении гладкости функций Q^γ и $\Gamma_{\delta\, p+1}^\gamma$, имеет решение.

Приступим к изучению кривой L. Так как на этой кривой $\omega^\alpha = 0$, $\omega^a = 0$, $\omega^r = 0$, то для векторов e_{p+1}, e_{m+1}, e_{m+2}, e_γ имеем

$$
de_{p+1} = \left(\lambda_a^{m+1} e_{m+1} + \lambda_{p+1}^{m+2} e_{m+2} \right) \omega^{p+1} = n_2 \omega^{p+1}, \; de_{m+1} = \left(D e_{m+2} - \lambda_a^{m+1} e_{p+1} \right) \omega^{p+1},
$$

$$
de_{m+2} = \left(-\lambda_{p+1}^{m+2} e_{p+1} - D e_{m+1} + E^\gamma e_\gamma \right) \omega^{p+1}, \quad de_\gamma = -E^\gamma \omega^{p+1} e_{m+2}.
$$

Следовательно, кривая L находится в $(n-m+1)$ – мерном евклидовом пространстве. Полученные уравнения описывают закон изменения репера кривой L. Из этих уравнений следует, что векторы e_{p+1}, e_{m+1}, e_{m+2}, e_γ изменяются только вдоль L.

Поскольку

$$\rho = |n_1|^2 - <n_1, H> = |n_2|^2 - <n_2, H> = -p\left(\lambda_a^{m+1}\right)^2,$$

то подмногообразие $\tilde{M}$ имеет отрицательную эйнштейнову константу. Условие $<n_1, n_2> = |n_1|^2$ равносильно тому, что секционные кривизны $k\left(e_a \wedge e_{p+1}\right)$ положительны и постоянны. Последнее следует из того, что $|n_1|^2 = \left(\lambda_a^{m+1}\right)^2 = const$. Если $B = A$, то $|n_2|$ также является постоянным, а n_2 образует с n_1 постоянный острый угол. Если $B \neq A$, то из условия $|n_1|^2 = <n_1, n_2>$ следует, что $|n_1| = |n_2|\cos\varphi$ (φ угол между векторами n_1 и n_2) и, следовательно, постоянным является произведение $|n_2|\cos\varphi$. Вектор $\lambda_a^{m+1} e_{m+1} - A e_{p+1}$ является вектором средней кривизны сферы $S^p(R)$. Следовательно, $R^2 = \left(\left(\lambda_a^{m+1}\right)^2 + A^2\right)^{-1}$. Подставляя значение A и преобразуя, получим

$$R = \left|\frac{\cos\left(c_1 - \lambda_a^{m+1} x^{p+1}\right)}{\lambda_a^{m+1}}\right|.$$

Таким образом, радиус R изменяется вдоль кривой L. Подмногообразие $\tilde{M}$ можем трактовать как каналовое подмногообразие.

Рассмотрим теперь случай (б), когда в системе (4) $F_m \neq 0, \quad F_r = 0,$ $r \neq m, \quad \omega_s^m = 0$. Кроме того предположим также, что $G_a = 0$. Тогда система (4) принимает следующий вид:

$$d\ln\left|\lambda_a^{m+1}\right| = F_m \omega^m, \qquad d\ln\left|\lambda_{p+1}^{m+1}\right| = (B - A)\omega^{p+1} + F_m \omega^m,$$
$$\omega_{p+1}^a = A\omega^a, \quad \omega_a^m = F_m \omega^a, \quad \omega_{m+1}^{m+2} = D\omega^{p+1}, \quad \omega_{p+1}^m = F_m \omega^{p+1},$$
$$\omega_{m+2}^\gamma = E^\gamma \omega^{p+1}, \quad \omega_r^\alpha = \omega_a^{m+2} = \omega_{m+1}^\gamma = \omega_i^\gamma = 0, \quad \omega_a^r = \omega_{p+1}^r = 0, r \neq m.$$

Поскольку $\omega_s^m = 0$, $\omega_a^r = \omega_{p+1}^r = 0, \quad r \neq m$, то распределение N, сопоставляющее каждой точке $x \in M$ линейную оболочку векторов $e_{p+2}, \cdots, e_{m-1}$, является параллельным на M. Ортогональное дополнение N, т.е. распределение $T^{(n_1)} + T^{(n_2)} + K$, где $K-$одномерное распределение, образуемое прямой с направляющим вектором e_m, также является параллельным на M. Поскольку эти распределения сопряжены относительно второй фундаментальной формы подмногообразия M, то M разлагается в прямое произведений их интегральных многообразий. Интегральное многообразие распределения N представляет собой $(\mu - 1)$-мерную плоскость $E_{\mu-1}$. Интегральное многообразие распределения $T^{(n_1)} + T^{(n_2)} + K$ представляет собой $(p+2)$-мерное подмногообразие, которое будем обозначать через M'. Поскольку $de_m = -F_m\left(\omega^a e_a + \omega^{p+1} e_{p+1}\right)$, то вектор e_m является постоянным при

$\omega^a = \omega^{p+1} = 0$. Отсюда следует, что M' является конусом (с исключенной точечной вершиной) над $\tilde{M}$. Итак, справедлива следующая

Теорема. *Пусть тензор Риччи* m*-мерного нормально плоского риччи-полусимметрического подмногообразия* M *индекса дефектности* μ *евклидова пространства* E_n *допускает только одно ненулевое собственное значение и пусть этому собственному значению соответствуют только два линейно независимых главных вектора кривизны* n_1, n_2 *с кратностями* p_1, p_2 *соответственно. Тогда* μ *совпадает с индексом относительной дефектности, а само* M *локально является или подмногообразием кодефектности два (если* $p_1 = p_2 = 1$*), или оно изометрично цилиндру с* μ*-мерными плоскими образующими над некоторым эйнштейновым подмногообразием* $\tilde{M}$ *или цилиндру с (*$\mu - 1$*)-мерными плоскими образующими над конусом, построенному над* $\tilde{M}$ *(если* $p_1 \geq 2$, $p_2 = 1$*). Подмногообразие* $\tilde{M}$ *можно трактовать как каналовое подмногообразие.*

Национальный политехнический университет Армении

В. А.Мирзоян, Г. С. Мачкалян

Геометрия одного класса риччи-полусимметрических подмногообразий произвольной коразмерности в евклидовых пространствах

В евклидовых пространствах даётся геометрическое описание одного класса нормально плоских риччи-полусимметрических подмногообризий произвольной коразмерности с нулевым индексом сингулярности и двумя регулярными главными векторами кривизны, у одного из которых кратность равна единице, а у другого — больше единицы. Исследуется класс эйнштейновых подмногообразий, которые трактуются как каналовые подмногообразия.

Վ. Ա. Միրզոյան, Գ. Ս. Մաչկալյան

Կամայական կոչափի ռիչչի-կիսասիմետրիկ ենթաբազմաձևությունների մի դասի երկրաչափությունը էվկլիդյան տարածություններում

Էվկլիդեսյան տարածություններում տրվում է երկու կոչափի նորմալ հարթ րիչչի-կիսասիմետրիկ ենթաբազմաձևությունների երկրաչափական նկարագրությունը այն պայմանի դեպքում, որ ռեգուլյարության ինդեքսը հավասար է երկուսի, իսկ սինգուլյարության ինդեքսը՝ զրոյի: Ուսումնասիրվում է էյնշտեյնյան ենթաբազմաձևությունների դաս, որոնք մեկնաբանվում են որպես կանալային ենթաբազմաձևություններ:

V. A. Mirzoyan, G. S. Machkalyan

The Geometry of One Class of Ric-Semisymmetric Submanifolds of Arbitrary Codimension in Euclidean Spaces

In Euclidean spaces the geometric description of a class of normally flat Ric-semisymmetric submanifolds of arbitrary codimension with zero index of singularity and two regular principal curvature vectors is given, in one of which the multiplicity is equal to one while in the other's it is more than one. The class of Einstein submanifolds which are treated as channel submanifolds is investigated.

Литература

1. *Lumiste Ü.* Semiparallel submanifolds in space forms. New York: Springer, 2009.- 306 p.
2. *Мирзоян В. А*. - Изв. вузов. Математика. 1992. № 6. С. 80-89.
3. *Мирзоян В.А*. - Матем. сб. 2000. Т. 191. № 9. С. 65-80.
4. *Мирзоян В.А*. - Изв. РАН. Сер. матем. 2003. Т. 67. № 5. С. 107-124.
5. *Мирзоян В.А*. - Матем. сб. 2006. Т. 197. № 7. С. 47-76.
6. *Мирзоян В.А*. - Матем. сб. 2008. Т. 199. № 3. С. 69-94.
7. *Мирзоян В.А*., *Мачкалян Г.С*. - ДНАН Армении. 2009. Т. 109. № 2. С. 119-125.
8. *Мирзоян В.А*. - Изв. РАН. Сер. матем. 2011. Т. 75. № 6. С. 47-78.
9. *Мирзоян В.А*., *Мачкалян Г.С*.- Изв.вузов.Математика. 2012. № 9. С.19-31.
10. *Mirzoyan V. A.* - Reports of NAS RA. 2012. V.112. № 1. P. 19-29.
11. *Szabo Z.I.* - J.Differential Geom. 1982. V. 17. № 4. P. 531-582.
12. *Мирзоян В.А*., *Назарян А.Р*. – Математика. в высшей школе. Ереван. 2016. Т.12. № 1. С. 19-30.