ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 117 2017 № 1

МАТЕМАТИКА

УДК 517.51

Академик Г. Г. Геворкян, К. А. Навасардян

Об одном методе суммирования рядов по системам Виленкина и Хаара

(Представлено 19/ I 2017)

Ключевые слова: *метод суммирования, мажоранта частичных сумм, теорема единственности, ряд Фурье.*

Сначала напомним определения систем Виленкина и Хаара, порожденных последовательностью натуральных чисел $p_k \ge 2$, $k \in N$. Положим $m_0 = 1$, $m_{k+1} = m_k p_{k+1}$. Тогда любое неотрицательное целое число n единственным образом представляется в виде

$$n = \sum_{k=1}^{\infty} n_k m_{k-1}, \text{ где } n_k \in \{0,1,..., p_k - 1\},\ k \in N.$$

Любое число $x \in [0, 1)$ тоже единственным образом представляется в виде

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{m_k}, \text{ где } x_k \in \{0,1,..., p_k - 1\},\ k \in N,$$

и для бесконечно многих $k \in N$ имеет место $x_k \ne p_k - 1$. Обобщенные функции Радемахера определяются по формуле

$$R_k(x) := \exp\left(2\pi i \frac{x_k}{p_k}\right), \text{ где } i := \sqrt{-1}.$$

Система Виленкина $\psi := \{\psi_n : n \in N\}$ определяется по правилу

$$\psi_0(x) \equiv 1 \text{ и } \psi_n(x) := \prod_{k=1}^{\infty} R_k^{n_k}(x) = \exp\left(2\pi i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n_k x_k}{p_k}\right) \text{ для } n \in N. \tag{1}$$

В случае $p_k = 2$, $k \in N$, система Виленкина совпадает с системой Уолша. Как система Уолша связана с системой Хаара, так и система Виленкина связана с одним обобщением системы Хаара.

Для $n = m_k + r(p_{k+1} - 1) + s - 1$, где $0 \le r \le m_k - 1$, $1 \le s \le p_{k+1} - 1$, положим

$$\chi_n(x) := \chi_{r,s}^k(x) := \begin{cases} \sqrt{m_k}\exp\left(2\pi i \dfrac{x_{k+1}}{p_{k+1}} s\right), & \text{когда } x \in \left[\dfrac{r}{m_k}, \dfrac{r+1}{m_k}\right), \\ 0, \text{ когда } x \notin \left[\dfrac{r}{m_k}, \dfrac{r+1}{m_k}\right). \end{cases} \qquad (2)$$

Полагая $\chi_0(x) \equiv 1$, получим обобщенную систему Хаара $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, порожденную последовательностью натуральных чисел $p_k \geq 2$, $k \in N$. При $p_k = 2$, $k \in N$, эта система совпадает с классической системой Хаара.

Эти системы определены в [1] и в математической литературе хорошо изучены. При выполнении условия $\sup_k p_k < \infty$ система Виленкина по своим свойствам очень близка системе Уолша, а обобщенная система Хаара близка системе Хаара. При $\sup_k p_k = \infty$ системы, определенные формулами (1), (2), сильно отличаются от систем Уолша и Хаара.

В настоящей работе для рядов по системам (1), (2) определяется один линейный метод суммирования, который применяется для доказательства теорем единственности рядов по этим системам.

Обозначим

$$\Im_k := \left\{ \left[\frac{j}{m_{k+1}}, \frac{j+1}{m_{k+1}}\right) : j = 0, 1, \ldots, m_{k+1} - 1 \right\}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Для интервала $J \in \Im_k$ обозначим через $\tilde{J}$ тот интервал из $\Im_{k-1}$, который содержит J. Определим интервалы J_l следующим образом:

1. $J_l \subset \tilde{J}$, $J_0 = J$,

2. правый конец интервала J_l совпадает с левым концом интервала J_{l+1}, причем концы отрезка $\tilde{J}$ отождествляются, т. е. если правый конец интервала J_l есть $\dfrac{j}{m_k}$, то левый конец интервала J_{l+1} будет $\dfrac{j-1}{m_k}$.

Положим

$$J^q = \bigcup_{l=-q}^{q} J_l, \text{ для } q \in \left\{0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{p_{k+1}}{2}\right] - 1\right\}.$$

Ясно, что $J^0 = J$.

Пусть $k \in N$ и $q \in \left\{0, 1, 2, \ldots, \left[\dfrac{p_{k+1}}{2}\right] - 1\right\}$. Для $x \in [0,1)$, $k \in N$, через $I_{k,x}$ обозначим интервал со свойствами: $I_{k,x} \in \Im_k$ и $x \in I_{k,x}$. Для $q > 0$ обозначим

$$\varphi_{k,x}^q(t) = \begin{cases} \dfrac{m_{k+1}}{q}\left(1 - \dfrac{|l|}{q}\right), & \text{когда } t \in (I_{k,x})_l, \; |l| \leq q, \\ 0, & \text{когда } t \notin I_{k,x}^q. \end{cases} \qquad (3)$$

Далее будем считать, что $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ – одна из систем (1), (2). Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x) \tag{4}$$

Учитывая определения систем $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, очевидно, что при любом $\varphi_{k,x}^q$, имеем

$$\left(f_n, \varphi_{k,x}^q\right) := \int_0^1 f_n(t)\varphi_{k,x}^q(t)dt = 0, \text{ когда } \ n \ge m_{k+1}.$$

Поэтому для любого ряда (4) и любого $x \in [0,1)$ при любых k и q определены суммы

$$S_{k,q}(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^1 f_n(t)\varphi_{k,x}^q(t)dt. \tag{5}$$

Положим

$$S^*(x) = \sup_{k,q} |S_{k,q}(x)|. \tag{6}$$

Исходя из определений систем (1), (2) и функций (3) нетрудно заметить, что формулами (5) определяется некоторый линейный метод суммирования, т.е.

1. $S_{k,q}(x) = \sum_{n=0}^{m_{k+1}-1} \alpha_n^{k,q} a_n \psi_n(x)$, когда $\{f_n\}_{n=0}^{\infty} = \{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$,
2. $S_{k,q}(x) = \sum_{n=0}^{m_{k+1}-1} \beta_n^{k,q} a_n \chi_n(x)$, когда $\{f_n\}_{n=0}^{\infty} = \{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$,

где числа $\alpha_n^{k,q}$, $\beta_n^{k,q}$ не зависят от последовательности коэффициентов a_n.

Для этого метода суммирования верны следующие теоремы.

Теорема 1. *Если ряд (4) в точке* x *сходится к числу* σ, *то* $\lim\limits_{k\to\infty} S_{k,q}(x) = \sigma$.

Теорема 2. *Существует постоянная* $C > 0$, *не зависящая от последовательностей* a_n, $n \in N$, *и* p_k, $k \in N$, *такая, что*

$$S^*(x) < C \cdot \sup_m \left| \sum_{n=0}^{m} a_n f_n(x) \right|.$$

Теорема 3. *Если ряд (4) является рядом Фурье интегрируемой функции* f *по системе* $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, *то для любого* $\lambda > 0$ *имеют место*

$$\operatorname{mes}\left\{x \in [0,1) : S^*(x) > \lambda\right\} \le \frac{3}{\lambda}\|f\|_1, \tag{7}$$

и

$$\lim_{k\to\infty} S_{k,q}(x) = f(x), \text{ п.в. на } [0,1). \tag{8}$$

В работах [2, 3] доказаны теоремы единственности для простых рядов по обобщенной системе Хаара, порожденной ограниченной последовательностью p_k, $k \in N$, и кратных рядов по классической системе Хаара, мажоранты частичных сумм которых удовлетворяют некоторому условию.

В работе [2] доказана следующая теорема.

Теорема A. *Пусть система* $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *порождена ограниченной последовательностью* p_k, $k \in N$. *Тогда, если частичные суммы* $S_{m_k-1}(x) = \sum_{n=0}^{m_k-1} a_n f_n(x)$ *п.в. сходятся к некоторой функции* $f(x)$ *и для некоторой последовательности* $\lambda_\nu \uparrow \infty$ *выполняется*

$$\lim_{\nu\to\infty} \lambda_\nu \cdot \mathrm{mes}\left\{x \in [0,1) : \sup_k \left|S_{m_k-1}(x)\right| > \lambda_\nu\right\} = 0, \qquad (9)$$

то для всех n *имеют место*

$$a_n = \lim_{\nu\to\infty} \int_0^1 \left[f(x)\overline{f_n(x)}\right]_{\lambda_\nu} dx, \qquad (10)$$

где

$$[g(x)]_\lambda = \begin{cases} g(x), & \text{когда } |g(x)| \le \lambda, \\ 0, & \text{когда } |g(x)| > \lambda. \end{cases}$$

В той же работе [2] приведен пример систем $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, порожденных неограниченной последовательностью p_k, $k \in N$, для которых теорема A неверна.

Напомним, что функция g называется A-интегрируемой на множестве X, если

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda \cdot \mathrm{mes}\{x \in X : |g(x)| > \lambda\} = 0$$

и существует предел

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_X [g(x)]_\lambda =: (A)\int_X g(x)dx.$$

Оказывается, если требовать сходимость всей последовательности частичных сумм $S_n(x)$ и выполнение условия (9) для мажоранты всей последовательности частичных сумм $S_n(x)$, коэффициенты ряда (4) можно вычислить по формулам (10). А именно верна следующая теорема.

Теорема 4. *Если частичные суммы* $S_m(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n f_n(x)$ *п.в. сходятся к некоторой функции* $f(x)$ *и для некоторой последовательности* $\lambda_\nu \uparrow \infty$ *выполняется*

$$\lim_{\nu\to\infty} \lambda_\nu \cdot \mathrm{mes}\left\{x \in [0,1) : \sup_m \left|\sum_{n=0}^{m} a_n f_n(x)\right| > \lambda_\nu\right\} = 0, \qquad (10)$$

то для всех n *имеют место*

$$a_n = \lim_{\nu\to\infty} \int_0^1 \left[f(x)\overline{f_n(x)}\right]_{\lambda_\nu} dx. \qquad (11)$$

Эта теорема следует из более общей теоремы.

Теорема 5. *Если суммы* $S_{k,q}(x)$ *по мере сходятся к некоторой функции* $f(x)$ *и для некоторой последовательности* $\lambda_\nu \uparrow \infty$ *выполняется*

$$\lim_{\nu\to\infty} \lambda_\nu \,\mathrm{mes}\{x \in [0,1) : S^*(x) > \lambda_\nu\} = 0, \qquad (12)$$

то для всех n имеют место формулы (11).

Из этой теоремы следует

Теорема 6. *Если суммы* $S_{k,q}(x)$ *по мере сходятся к некоторой функции* $f(x)$ *и выполняется*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda \operatorname{mes}\left\{x\in[0,1): S^*(x)>\lambda\right\}=0, \qquad (13)$$

то для всех n *имеют место*

$$a_n=(A)\int_0^1 f(x)\overline{f_n(x)}dx. \qquad (14)$$

Ясно, что если функция f интегрируема по Лебегу, то в формулах (14) A-интеграл можно заменить интегралом Лебега, т.е. верна следуюшая

Теорема 7. *Если суммы* $S_{k,q}(x)$ *по мере сходятся к некоторой интегрируемой по Лебегу функции* $f(x)$ *и выполняется*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda \operatorname{mes}\left\{x\in[0,1): S^*(x)>\lambda\right\}=0,$$

то ряд (4) является рядом Фурье функции f *по системе* $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Из теорем 3 и 7 легко выводится

Теорема 8. *Для того чтобы ряд (4) был рядом Фурье интегрируемой функции* f*, необходимо и достаточно, чтобы суммы* $S_{k,q}(x)$ *по мере сходились* $f(x)$ *и выполнялось (12) для некоторой последовательности* $\lambda_\nu \uparrow \infty$.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Государственного комитета по науке МОН РА в рамках научного проекта 10-3/1-41.

Ереванский государственный университет
e-mail: ggg@ysu.am, knavasard@ysu.am

Академик Г. Г. Геворкян, К. А. Навасардян

Об одном методе суммирования рядов по системам Виленкина и Хаара

Определяется новый метод суммирования рядов по системам Виленкина и Хаара. Доказываются теоремы единственности для рядов, суммируемых этим методом и удовлетворяюших некоторому необходимому условию. Установлены также формулы восстановления коэффициентов таких рядов.

Ակադեմիկոս Գ.Գ. Գևորգյան, Կ.Ա. Նավասարդյան

Վիլենկինի և Հաարի համակարգերով շարքերի գումարման մի մեթոդի մասին

Սահմանվում է Վիլենկինի և Հաարի համակարգերով շարքերի գումարման մի նոր մեթոդ: Ապացուցվում են միակության թեորեմներ մի անհրաժեշտ պայմանի

բավարարող և այդ մեթոդով գումարվող շարքերի համար: Գտնված են նաև վերականգնման բանաձևեր այդպիսի շարքերի գործակիցների համար:

Academician G. G. Gevorkyan, K. A. Navasardyan

On a Summation Method for Series with Respect to Vilenkin and Haar Systems

A new method of summation of series with respect to Vilenkin and Haar systems is defined. Uniqueness theorems for series summarizes by this method and satisfied some necessary condition are proved. Renewal formulas for such series are also found.

Литература

1. *Виленкин Н. Я.* - Изв. АН СССР, сер. мат. 1947. Т. 11. N 4. С. 363-400.
2. *Костин В. В.* - Мат. заметки. 2004. Т. 76. N 5. С. 740-747.
3. *Геворкян Г. Г.* – Изв. НАН Армении. Математика. 1995. Т. 30. N 5. С. 7-21.