ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 117 2017 № 1

МАТЕМАТИКА

УДК 517

Р. В. Даллакян

Некоторые задачи о произведениях Джрбашяна

(Представлено академиком В. С. Захаряном 14/XII 2016)

Ключевые слова: *оператор интегро-дифференцирования Римана – Лиувилля, произведения Бляшке и Джрбашяна, классы гармонических в единичном круге функций* U_α, γ*-емкость множества* E.

Введение. Пусть $\mathbb{D}$ – единичный круг комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $-1<\alpha<+\infty$ и последовательность $\{z_n\}\subset\mathbb{D}$, $z_n\neq 0, n=1,2,\dots$, такая, что

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\left|z_n\right|\right)^{1+\alpha}<+\infty. \tag{1}$$

В книге [1] (гл. IX) произведение $B_\alpha\left(z;\{z_n\}\right), z\in\mathbb{D}$ М. М. Джрбашяна определяется следующим образом:

$$B_\alpha\left(z;\{z_n\}\right)=\prod_n\left(1-\frac{z}{z_n}\right)\exp\left\{-W_\alpha\left(z;z_n\right)\right\},$$

где для $\xi\in\mathbb{D}$

$$W_\alpha\left(z;\xi\right)=\int_{|\xi|}^{1}\frac{\left(1-x\right)^\alpha}{x}dx-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma\left(1+\alpha+k\right)}{\Gamma\left(1+\alpha\right)\Gamma\left(1+k\right)}\cdot$$
$$\cdot\left\{\xi^{-k}\int_0^{|\xi|}\left(1-x\right)^\alpha x^{k-1}dx-\overline{\xi}^k\int_{|\xi|}^{1}\left(1-x\right)^\alpha x^{-k-1}dx\right\}z^k.$$

В [1] (с. 625) доказано, что в специальном случае $\alpha=0$ эти произведения превращаются в произведения Бляшке

$$B_0\left(z;\{z_n\}\right)=B\left(z;\{z_n\}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{z_n-z}{1-\overline{z}_n z}\frac{\left|z_n\right|}{z_n}.$$

В работе [2] отмечено следующее утверждение о взаимосвязи между произведениями $B_\alpha, \left(-1<\alpha<0\right)$ и B.

Теорема. *Пусть* $-1<\alpha<0$ *и последовательность* $\{z_n\}\subset\mathbb{D}$ *удовлетворяет условию (1). Тогда*

$$B_\alpha\left(z;\{z_n\}\right)=B\left(z;\{z_n\}\right)\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_\alpha\left(e^{-i\theta}z\right)d\omega\left(\theta\right)\right\},$$

где

$$S_\alpha\left(z\right)=\Gamma\left(1+\alpha\right)\left\{\frac{2}{\left(1-z\right)^{1+\alpha}}-1\right\},\left|z\right|<1,$$

$\omega\left(\theta\right)$ *– некоторая невозрастающая функция ограниченной вариации на* $\left[0,2\pi\right]$.

Отметим, что для любой функции $\omega\left(x\right)$ из класса Ω (см. [3], гл. 1) М. М. Джрбашяном также определены классы N_ω и произведения B_ω. Подобные классы и произведения определены М. М. Джрбашяном и на верхней полуплоскости (см. [4]).

По теореме Фростмана (см. [5], с. 54) для существования радиального предела произведения Бляшке в граничной точке $e^{i\varphi}$ необходимо и достаточно, чтобы в этой точке выполнялось условие Фростмана

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-\left|z_n\right|}{\left|e^{i\varphi}-z_n\right|}<+\infty.$$

Для произведений $B_\alpha\left(-1<\alpha<0\right)$ известно, что если имеет место условие типа Фростмана (см. [6], с. 139)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-\left|z_n\right|}{\left|e^{i\varphi}-z_n\right|}\right)^{1+\alpha}<+\infty,$$

то в граничной точке $e^{i\varphi}$ существует конечный и отличный от нуля предел произведения B_α. Вопрос о справедливости обратного утверждения пока остается открытым.

Рассмотрим систему всех множеств $\{B\}$, измеримых по Борелю и лежащих на $\left[0,2\pi\right]$. Будем называть мерой μ всякую неотрицательную, вполне аддитивную функцию множеств, определенную на $\{B\}$ и нормированную, т.е. $\mu\left(\left[0,2\pi\right]\right)=1$. Будем говорить, что мера сосредоточена на B и писать $\mu\prec B$, если $\mu\left(B\right)=1$, т.е. если

$$\int_B d\mu=\int_0^{2\pi}d\mu=1.$$

Скажем, что множество E, измеримое по Борелю, имеет положительную γ-емкость $\left(0<\gamma<1\right)$, если найдется такая $\mu\prec E$, для которой функция

$$V_\gamma\left(x;z\right)=\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\mu}{\left|e^{it}-re^{ix}\right|^\gamma}$$

остается равномерно ограниченной по x при $r\to 1-0$, т. е., если при некотором $\mu\prec E$ имеем

$$V_\gamma\left(\mu\right)=\sup_{0\le r\le 1}\left\{\max_{0\le x\le 2\pi}V_\gamma\left(x;r\right)\right\}<+\infty .$$

Если же для любой меры $\mu\prec E$ $V_\gamma\left(\mu\right)=+\infty,$ то скажем, что E имеет γ-емкость, равную нулю, и напишем $cap_\gamma E=0$.

В работе [6] доказано, что если последовательность $\left\{z_n\right\}\subset \mathbb{D}$ удовлетворяет условию (1) и имеет место $\left(1+\alpha\right)$ – условие типа Фростмана $\left(-1<\alpha<0\right)$, то везде на $\left[0,2\pi\right]$ существуют конечные радиальные значения (отличные от нуля) произведения $B_\alpha\left(z;\left\{z_n\right\}\right)$, кроме, быть может, некоторого исключительного множества $E\subset\left[0,2\pi\right]$, $\left(1+\alpha\right)$-емкость которого равна нулю: $cap_{1+\alpha}E=0$.

Более того, если точка $z=e^{i\varphi}$ не является точкой сгущения для последовательности $\left\{z_n\right\}$, то произведение $B_\alpha\left(z;\left\{z_n\right\}\right)$ непрерывно в некоторой окрестности точки $z=e^{i\varphi}$ $\left(\left|z\right|\le 1\right)$.

Если последовательность $\left\{z_n\right\}\subset \mathbb{D}$ удовлетворяет условию (1), то для произведения Бляшке также везде на $\left[0,2\pi\right]$ существует радиальный предел (по модулю равный единице) кроме некоторого множества E, для которого $cap_{1+\alpha}E=0$ (см. [7]).

Оператор интегро-дифференцирования $D^{-\alpha}\left(-1<\alpha<+\infty\right)$ в смысле Римана – Лиувилля с началом в нулевой точке определяется следующим образом:

$$D^{-\alpha}\left\{\varphi\left(r\right)\right\}=\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int\limits_0^r\left(r-t\right)^{\alpha-1}\varphi\left(t\right)dt,\ \text{если}\ 0<\alpha<+\infty,$$

$$D^0\left\{\varphi\left(r\right)\right\}=\varphi\left(r\right),$$

$$D^{-\alpha}\left\{\varphi\left(r\right)\right\}=\frac{d}{dr}D^{-(1+\alpha)}\left\{\varphi\left(r\right)\right\},\ \text{если}\ -1<\alpha<0.$$

Обозначим через $U_\alpha\left(-1<\alpha<+\infty\right)$ класс гармонических в единичном круге $\mathbb{D}$ функций $u\left(z\right)$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{0<r<1}\left\{\int_0^{2\pi}\left|u_\alpha\left(re^{i\varphi}\right)\right|d\varphi\right\}<+\infty,$$

где при данном α

$$u_\alpha\left(re^{i\varphi}\right)\equiv r^{-\alpha}D^{-\alpha}u\left(re^{i\varphi}\right).$$

Известно, что если $u(z)$ - гармоническая в единичном круге функция, то при любом $\alpha\left(-1<\alpha<+\infty\right)$ ассоциированная с ней функция $u_\alpha(z)$ также будет гармонической (см. [1], с. 649).

Класс аналитических в единичном круге функций с конечным интегралом Дирихле D_0^2 определяется как множество тех аналитических в единичном круге функций f, для которых

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\left|f'\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 drd\theta<+\infty.$$

Основные результаты. Сначала доказывается утверждение о граничной функции бесконечного произведения B_α.

Теорема 1. *Пусть* $-1<\alpha\leq 0$ *и бесконечная последовательность* $\{a_n\}\subset \mathbb{D}$ *удовлетворяет условию (1). Тогда граничная функция* $B_\alpha\left(e^{i\theta};\{a_n\}\right)$ *почти всюду на* $[0,2\pi]$ *не может совпадать с функцией ограниченной вариации на* $[0,2\pi]$.

Из доказанной теоремы и из того факта, что абсолютно непрерывная функция является функцией конечной вариации, следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. *Пусть* $-1<\alpha\leq 0$ *и бесконечная последовательность комплексных чисел* $\{a_n\}\subset\mathbb{D}$ *удовлетворяет условию (1). Тогда граничная функция* $B_\alpha\left(e^{i\theta};\{a_n\}\right)$ *не может являться абсолютно непрерывной функцией на* $[0,2\pi]$.

Теперь рассмотрим одну из задач, поставленных академиком В. С. Захаряном еще в семидесятые годы прошлого века: пусть множество нулей $\{a_n\}$ произведения М. М. Джрбашяна удовлетворяют условию

$$a_n=\left(1-q^n\right)e^{i\varphi},\ n=1,2,\ldots,0<q<1,0\leq\varphi<2\pi;$$

удовлетворяют ли коэффициенты Тейлора произведения $B_\alpha\left(z;\{a_n\}\right)$ при $-1<\alpha<0$ следующему условию:

$$\left|\hat{B}_\alpha(n)\right|=O\left(\frac{1}{n^{1+\frac{\alpha}{\ln q}}}\right),\qquad(2)$$

и, вообще, существует ли непрерывное в замкнутом круге $|z|\leq 1$ произведение $B_\alpha\left(z;\{a_n\}\right)$.

Пусть коэффициенты Тейлора бесконечного произведения $B_\alpha\left(z;\left\{a_n\right\}\right)$ удовлетворяют условию (2). Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\hat{B}_\alpha(n)\right|^2 n \le C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{2\alpha}{\ln q}}} < +\infty .$$

Отсюда, так как $f(z)=\sum a_n z^n \in D_0^2$ тогда и только тогда, когда $\sum\left|a_n\right|^2 n < +\infty$, следует, что $B_\alpha\left(z;\left\{a_n\right\}\right)\in D_0^2$. Это противоречие и показывает, что первая из поставленных задач имеет отрицательный ответ. Более того, имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $-1<\alpha\le 0$ *и последовательность* $\left\{a_n\right\}\subset \mathbb{D}$ *удовлетворяет условию (1). Тогда, если*

$$\left|\hat{B}_\alpha(n)\right| = \frac{\gamma_n}{n},$$

где $\left\{\gamma_n\right\}$ *– ограниченная последовательность, то*

$$\sum\left|\hat{B}_\alpha(n)\right| = +\infty .$$

Перейдем к анализу второй из выше поставленных задач. Так как (см. [11], с. 52) существует аналитическая в $\mathbb{D}$ и непрерывная в замкнутом круге $\mathbb{D}$ функция $f(z)=\sum b_n z^n$ такая, что $\sum_{n=1}^{\infty}|bn| = +\infty$, то из теоремы 3 еще не следует, что утверждение второй из этих задач также неверно. В этом направлении отметим следующий результат.

Теорема 4. *Пусть* $-1<\alpha\le 0$, *последовательность* $\left\{a_n\right\}\subset \mathbb{D}$ *удовлетворяет условию (1) и для некоторого значения* $\varphi\in[0;2\pi]$ *имеет место условие типа Фростмана*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-\left|a_n\right|}{\left|e^{i\varphi}-a_n\right|}\right)^{1+\alpha} < +\infty .$$

Тогда, если $e^{i\varphi}$ *является точкой сгущения последовательности* $\left\{a_n\right\}$, *то в этой точке произведение* $B_\alpha\left(z;\left\{a_n\right\}\right); |z|\le 1$ *имеет разрыв.*

Замечание. Хотя и утверждение теоремы очевидное, однако автору не удалось найти эту теорему в других работах.

Из теоремы 4 следует, что для того чтобы произведение $B_\alpha\left(z;\left\{a_n\right\}\right); -1<\alpha<0$, было непрерывным в замкнутом круге $|z|\le 1$, необходимо, чтобы во всех точках $e^{i\varphi}$ сгущения последовательности $\left\{a_n\right\}$ имело место условие

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-\left|a_n\right|}{\left|e^{i\varphi}-a_n\right|}\right)^{1+\alpha} = +\infty .$$

Как отмечено во введении, произведение $B_\alpha\left(-1<\alpha<0\right)$ определено везде на единичной окружности $\partial\mathbb{D}$ кроме, быть может, некоторого исключительного множества E такого, что $cap_{1+\alpha}E=0$. Докажем, что на множестве $\partial\mathbb{D}\setminus E$ модуль произведения $B_\alpha\left(-1<\alpha<0\right)$ не может быть постоянным. Отметим, что по теореме Фростмана (см. [5], с. 54) модуль произведения Бляшке везде на $\partial\mathbb{D}$ равен единице, кроме, быть может, точек $e^{i\varphi}$ сгущения последовательности нулей.

Теорема 5. *Пусть* $-1<\alpha<0$, *последовательность* $\left\{a_n\right\}\subset\mathbb{D}$ *удовлетворяет условию (1) и*

$$E=\left\{e^{i\varphi};\varphi\in\left[0;2\pi\right],\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-\left|a_n\right|}{\left|e^{i\varphi}-a_n\right|}\right)^{1+\alpha}=+\infty\right\}.$$

Тогда модуль произведения $B_\alpha\left(z;\left\{a_n\right\}\right)$ *на множестве* $\partial\mathbb{D}\setminus E$ *не может быть постоянным.*

Исследование выполнено при финансовой поддержке Государственного комитета по науке МОН РА в рамках научного проекта № 15T-1A083.

Национальный политехнический университет Армении

Р. В. Даллакян

Некоторые задачи о произведениях Джрбашяна

Пользуясь аппаратом интегро-дифференцирования Римана – Лиувилля, М. М. Джрбашян обобщил класс функций, мероморфных в единичном круге N Р. Неванлинны, введя в рассмотрение классы $N_\alpha\left(-1<\alpha<+\infty\right)$. Фундаментальную роль в этих исследованиях играют произведения B_α, которые в специальном случае $\alpha=0$ превращаются в произведения Бляшке. В статье приведен анализ и решены некоторые задачи о произведениях $B_\alpha\left(-1<\alpha<0\right)$ М. М. Джрбашяна, которые были поставлены в семидесятые годы прошлого века.

Ռ. Վ. Դալլաքյան

Որոշ խնդիրներ Ջրբաշյանի արտադրյալների մասին

Օգտվելով Ռիման-Լիուվիլլի ինտեգրո-դիֆերենցման ապարատից, Մ. Մ. Ջրբաշյանը ընհանրացրել է միավոր շրջանում մերոմորֆ ֆունկցիաների Նևանլիննայի N դասը, ներմուծելով $N_\alpha\left(-1<\alpha<+\infty\right)$ դասերը: Այդ դասերի ուսումնասիրության ժամանակ իրենց հիմնարար դերն ունեն B_α արտադրյալները, որոնք հատուկ $\alpha=0$ դեպքում վեր են ածվում բլյաշկեի արտադրյալների: Այս աշխատանքում լուծված են

$B_\alpha(-1<\alpha<0)$ արտադրյալների մասին խնդիրներ, որոնք դրվել են նախորդ դարի յո-թանասունական թվերին:

R.V. Dallakyan

Some Problems about Products of Djrbashyan

Using the Riemann-Liouville integration-differentiation operator M. M. Djrbashyan generalized the class N - meromorphic functions in the unit circle R. Nevanlinna, introducing classes $N_\alpha(-1<\alpha<+\infty)$. During investigations of these classes essential role have products $B_\alpha(-1<\alpha<+\infty)$, which in the special case of $\alpha=0$ coincide with the Blaschke product. In this article, some problems are solved about products $B_\alpha(-1<\alpha<0)$ proposed at 70-s last century.

Литература

1. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М. Наука. 1966. 672 с.
2. *Джрбашян М. М., Захарян В. С.* – Мат. Заметки. 1968. Т. 4, N 1. С. 3-10.
3. *Джрбашян М. М., Захарян В. С.* Классы и граничные свойства функцийм мероморфных в круге. М. Наука. 1993.213 с.
4. *Djrbashian A. M.* Functions of α-Bounded Type in the Half-Plane.- Springer Science+Business Media, ins. 2005.
5. *Коллингвуд Э., Ловатер А.* Теория предельных множеств. М. Мир. 1971. 312с.
6. *Захарян В. С.* – Изв. АН АрмССР, Математика. 1968. Т. 3. N 4, 5. С. 288-300.
7. *Broman A.* On two classes of trigonometrical series. Thesis. University of Uppsala. 1947.
8. *Захарян В. С., Даллакян Р. В., Оганисян И. В..* – Научные ведомости БелГУ (математика, физика). 2016. N6 (227). Вып. 42. С. 5-11.
9. *Kim M. O* .– Pacific Journal of Math. 1984. V. 114. N 1.
10. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. М. Мир. 1984. 169 с.
11. *Duren P. L.* Theory of H^p spaces. New York and London, Ac. Press. 1970. 260 p.
12. *Захарян В. С.* – Изв. АН АрмССР. Математика. 1988. Т. 23. N 2. С. 189-192.