ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 116 2016 № 4

**МЕХАНИКА**

УДК 539.3

**М. С. Григорян, М. С. Мкртчян,**
**член-корреспондент НАН РА С. М. Мхитарян**

# О двух смешанных граничных задачах для упругого слоя при антиплоской деформации

(Представлено 19/IX 2016 )

**Ключевые слова:** *упругий слой, антиплоская деформация, смешанные граничные задачи, гармонические функции, интегральные уравнения.*

Контактные и смешанные граничные задачи математической теории упругости составляют одну из обширных областей механики деформируемого твердого тела. Ввиду их важного теоретического и практического значения они стали предметам исследования многих авторов. Многочисленные результаты исследований в этой области подытожены в [1-6]

В настоящей статье рассматриваются две смешанные граничные задачи математической теории упругости для упругого слоя, находящегося в условиях антиплоской деформации. Такие задачи возникают в геомеханике в расчетах напряженно-деформированного состояния горных массивов, подверженных сдвиговым деформациям, которые при оползнях грунтов или землетрясениях значительнее других типов деформаций. Эти задачи математически формулируются в виде смешанных граничных задач теории гармонических функций, и их решения сводятся к решениям интегральных уравнений Фредгольма первого рода с симметрическими ядрами, допускающих точные решения. Рассматриваемые здесь задачи тесно примыкают к граничным задачам теории установившейся фильтрации жидкости под гидротехническими сооружениями типа плотин в пористом грунтовом слое [7-9].

1. Пусть отнесенный к правой прямоугольной системе координат $Oxyz$ упругий слой $\Omega = \{-\infty < x, z < \infty; -H \le y \le 0\}$ модуля сдвига $G$ и высоты $H$ в направлении оси $Oz$ находится в условиях антиплоской деформации (продольного сдвига). В первой смешанной граничной задаче для слоя $\Omega$ предположим, что на его верхней

грани на участке $\omega_- = \{-\infty < x < -a;\ y = 0;\ -\infty < z < \infty\}$ заданы постоянные перемещения $w_0$ в положительном направлении оси $Oz$, участок $\omega_+ = \{a < x < \infty;\ y = 0;\ -\infty < z < \infty\}$ жестко защемлен, на центральном участке $\omega_0 = \{-a < x < a;\ y = 0;\ -\infty < z < \infty\}$ в отрицательном направлении оси $Oz$ действуют касательные силы интенсивности $f(x)$, а нижняя грань слоя свободна от внешних сил.

Основные уравнения теории упругости при антиплоской деформации с базовой плоскостью $Oxy$ состоят из одного уравнения равновесия и закона Гука. Они имеют, соответственно, вид

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0; \qquad \tau_{xz} = G\frac{\partial u_z}{\partial x}; \qquad \tau_{yz} = G\frac{\partial u_z}{\partial y};$$

где $\tau_{xz}$ и $\tau_{yz}$ – компоненты касательных напряжений, а $u_z = u_z(x, y)$–единственная отличная от нуля компонента перемещений в направлении оси $Oz$.

Вводя в рассмотрение функцию $\varphi(x, y) = G u_z(x, y)$, обнаружим, что эта функция, а также функция $u_z(x, y)$, в базовой полосе $\omega = \{-\infty < x < \infty;\ -H < y < 0\}$ являются гармоническими функциями. Далее при помощи условий Коши – Римана

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y},\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad ((x, y) \in \omega) \tag{1.1}$$

введем сопряженную с $\varphi(x, y)$ гармоническую функцию $\psi(x, y)$. Тогда

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \psi}{\partial y},\ \ \tau_{yz} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Очевидно, что линии $\varphi(x, y) = const$ представляют собой линии равных приведенных перемещений. Линии же $\psi(x, y) = const$ представляют собой траектории касательных напряжений. Действительно, можем записать

$$\psi(x, y) = const \ \Rightarrow\ \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy = 0 \ \Rightarrow\ -\tau_{yz}dx + \tau_{xz}dy = 0 \ \Rightarrow\ \frac{dx}{\tau_{xz}} = \frac{dy}{\tau_{yz}}.$$

Функция $\psi(x, y)$– аналог функции тока в гидродинамике.

Теперь описанную выше первую смешанную граничную задачу для упругого слоя $\Omega$ математически можем сформулировать в виде следующей граничной задачи для гармонической функции $\varphi_1(x, y) = G u_z^{(1)}(x, y)$ в базовой полосе $\omega$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2}=0 \quad ((x,y)\in\omega) \\ \varphi_1(x,y)\big|_{y=-0}=w_0G \quad (-\infty<x<a); \quad \varphi_1(x,y)\big|_{y=-0}=0 \quad (a<x<\infty); \\ \left.\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right|_{y=-0}=-f(x) \quad (-a<x<a); \quad \left.\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right|_{y=-H}=0 \quad (-\infty<x<\infty). \end{cases} \qquad (1.2)$$

Граничная задача (1.2) эквивалентна следующей смешанной граничной задаче для сопряженной с $\varphi_1(x,y)$ функции $\psi_1(x,y)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2}=0 \qquad ((x,y)\in\omega) \\ \left.\dfrac{\partial\psi_1}{\partial y}\right|_{y=-0}=0 \quad (|x|>a); \quad \psi_1(x,y)\big|_{y=-H}=0 \quad (-\infty<x<\infty); \\ \psi_1(x,y)\big|_{y=-0}=\int\limits_{-a}^{x} f(s)\,ds+c_1 \quad (-a\le x\le a); \end{cases} \qquad (1.3)$$

где $c_1$ – постоянная, подлежащая определению.

Во второй смешанной задаче для упругого слоя $\Omega$ прежние условия на участках $\omega_-$ и $\omega_0$ останутся неизменными, а на участке $\omega_+$ теперь задаются постоянные перемещения $w_0$ в отрицательном направлении оси $Oz$ и грань $y=-H$ слоя жестко защемлена. Эта задача математически формулируется в виде следующей смешанной граничной задачи для функции $\varphi_2(x,y)=Gu_z^{(2)}(x,y)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2}=0 \qquad ((x,y)\in\omega) \\ \varphi_2(x,y)\big|_{y=-0}=-G\,w_0\,\mathrm{sign}x \ (|x|>a); \left.\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right|_{y=-0}=-f(x) \ (|x|\le a); \\ \varphi_2(x,y)\big|_{y=-H}=0 \ (-\infty<x<\infty). \end{cases} \qquad (1.4)$$

Граничная задача (1.4) при помощи условий (1.1) преобразуется в следующую смешанную граничную задачу для сопряженной функции $\psi_2(x,y)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2}=0 \qquad ((x,y)\in\omega) \\ \left.\dfrac{\partial\psi_2}{\partial y}\right|_{y=-0}=0 \ (|x|>a); \ \psi_2(x,y)\big|_{y=-0}=\int\limits_{-a}^{x} f(s)\,ds+c_2; \ (|x|\le a); \\ \left.\dfrac{\partial\psi_2}{\partial y}\right|_{y=-H}=0 \ (-\infty<x<\infty); \end{cases} \qquad (1.5)$$

где $c_2$ – постоянная, подлежащая определению.

2. Решения задач (1.2)-(1.5) можно построить при помощи интегрального преобразования Фурье. Но удобно сначала построить

решения граничных задач (1.3) и (1.5), а затем из условий (1.1) найти сопряженные гармонические функции $\varphi_k(x,y)$ $(k=1,2)$.

Приступим к решению граничной задачи (1.3), сводя ее решение к решению интегрального уравнения. С этой целью для функции $\psi_1(x,y)$ предварительно рассмотрим следующую вспомогательную граничную задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2}=0 \qquad ((x,y)\in\omega) \\ \left.\dfrac{\partial\psi_1}{\partial y}\right|_{y=-0}=g(x); \quad \psi_1|_{y=-H}=0 \qquad (-\infty<x<\infty); \end{cases} \quad g(x)=\begin{cases} 0 & (|x|>a); \\ \chi_1(x) & (|x|<a); \end{cases} \tag{2.1}$$

где $\chi_1(x)$–искомая расчетная функция. Теперь применив к граничной задаче (2.1) интегральное преобразование Фурье, придем к следующей одинарной граничной задаче:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\overline{\psi}_1}{dy^2}-\lambda^2\overline{\psi}_1=0 \qquad (-H<y<0) \\ \left.\dfrac{d\overline{\psi}_1}{dy}\right|_{y=-0}=\overline{g}(\lambda); \quad \overline{\psi}_1|_{y=-H}=0; \end{cases} \quad \left\{\overline{\psi}_1(\lambda,y);\,\overline{g}(\lambda)\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\psi_1(x,y);\,g(x)\right\}e^{i\lambda x}dx. \tag{2.2}$$

Решение граничной задачи (2.2) имеет вид

$$\overline{\psi}_1(\lambda,y)=sh(\lambda(y+H))\,\overline{g}(\lambda)\big/\lambda ch(\lambda H) \quad (-H\le y\le 0),$$

откуда по формуле обратного преобразования Фурье находим

$$\psi_1(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}K_1(|x-s|,y)\chi_1(s)ds \qquad ((x,y)\in\omega) \tag{2.3}$$

$$K_1(x,y)=\int_0^{\infty}sh(\lambda(y+H))\cos(\lambda x)d\lambda\big/\lambda ch(\lambda H).$$

Отсюда

$$\psi_1(x,0)=\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\ln\left(cth\left(\frac{\pi|x-s|}{4H}\right)\right)\chi_1(s)ds, \tag{2.4}$$

где использовано выражение известного косинус-интеграла Фурье из [10] (с. 530, формула 4.116.2). При помощи (2.4), реализуя третье условие задачи (1.3), относительно функции $\chi_1(x)$ придем к следующему определяющему интегральному уравнению (ИУ) Фредгольма первого рода:

$$\int_{-a}^{a}\ln\left(cth\left(\frac{\pi|x-s|}{4H}\right)\right)\chi_1(s)ds=h_1(x)=\pi h(x)+\pi c_1; \qquad h(x)=\int_{-a}^{x}f(s)ds. \tag{2.5}$$

Далее решение ИУ (2.5) при правой части $h(x)$ обозначим через $\omega_1(x)$, а при правой части 1– через $q_1(x,a)$. Тогда будем иметь $\chi_1(x)=\pi\omega_1(x)+\pi c_1\,q_1(x,a)$ $(-a<x<a)$ и, следовательно, (2.3) можно записать в виде

$$\psi_1(x,y)=\int_{-a}^{a}\left[\omega_1(s)+c_1\,q_1(s,a)\right]ds\int_0^\infty \frac{sh(\lambda(y+H))}{\lambda ch(\lambda H)}\cos(\lambda(x-s))\,d\lambda\quad ((x,y)\in\omega). \quad (2.6)$$

Отсюда по первой формуле условий Коши – Римана (1.1) получим

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}=\frac{\partial\psi_1}{\partial y}=\int_{-a}^{a}\left[\omega_1(s)+c_1\,q_1(s,a)\right]ds\int_0^\infty \frac{ch(\lambda(y+H))}{ch(\lambda H)}\cos(\lambda(x-s))\,d\lambda\quad ((x,y)\in\omega).$$

После интегрирования по $x$ этого равенства будем иметь

$$\varphi_1(x,y)=\int_{-a}^{a}\left[\omega_1(s)+c_1\,q_1(s,a)\right]ds\int_0^\infty \frac{ch(\lambda(y+H))}{\lambda ch(\lambda H)}\sin(\lambda(x-s))\,d\lambda+$$

$$+p_1(y)\quad ((x,y)\in\omega), \quad (2.7)$$

где $p_1(y)$ – пока произвольная функция. Отсюда

$$\varphi_1(x,0)=\int_{-a}^{a}\left[\omega_1(s)+c_1\,q_1(s,a)\right]ds\int_0^\infty \sin(\lambda(x-s))\frac{d\lambda}{\lambda}+p_1(0)\quad (-\infty<x<\infty). \quad (2.8)$$

Приняв во внимание значение второго интеграла (разрывного интеграла Дирихле), обсудим следующие случаи: 1) $-\infty<x<-a.$ В этом случае $x-s<0$ и на основании первого условия граничной задачи (1.2) из (2.8) получим

$$p_1(0)-(\pi Q_1/2)c_1=Gw_0+(\pi/2)\Omega_1;\quad Q_1=\int_{-a}^{a}q_1(s,a)\,ds,\ \Omega_1=\int_{-a}^{a}\omega_1(s)\,ds. \quad (2.9)$$

2) $\alpha<x<2$. Тогда $x-s>0$ и по второму условию граничной задачи (1.2) из (2.8) получим

$$p_1(0)+(\pi Q_1/2)c_1=-(\pi/2)\Omega_1. \quad (2.10)$$

Из (2.9) и (2.10) находим

$$p_1(0)=Gw_0/2,\ \ c_1=-(\pi\Omega_1+w_0G)/\pi Q_1. \quad (2.11)$$

Отметим, что если второе граничное условие задачи (1.2) заменить условием $\varphi_1(x,-0)=-w_0\ G(a<x<\infty)$, то вместо (2.11) будем иметь $p_1(0)=0,\ c_1=-(\pi\Omega_1+2w_0G)/\pi Q_1$ .

Продолжая задачу определения функции $\varphi_1(x,y)$, обратимся ко второму условию Коши – Римана (1.1). Тогда по (2.6) и (2.7) можем записать

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}=\int_{-a}^{a}\left[\omega_1(s)+c_1\,q_1(s,a)\right]ds\int_0^\infty \frac{sh(\lambda(y+H))}{ch(\lambda H)}\sin(\lambda(x-s))\,d\lambda+p_1'(y)=$$

$$=-\frac{\partial\psi_1}{\partial x}=\int_{-a}^{a}\left[\omega_1(s)+c_1\,q_1(s,a)\right]ds\int_0^\infty \frac{sh(\lambda(y+H))}{ch(\lambda H)}\sin(\lambda(x-s))\,d\lambda\qquad ((x,y)\in\omega).$$

Отсюда вытекает, что $p_1'(y)=0\Rightarrow p_1(y)\equiv const\ \ \Rightarrow\ p_1(y)\equiv p_1(0)=Gw_0/2.$

Следовательно, окончательно будем иметь

$$\varphi_1(x,y)=\int_{-a}^{a}\left[\omega_1(s)+c_1\,q_1(s,a)\right]ds\int_0^\infty \frac{ch(\lambda(y+H))}{\lambda ch(\lambda H)}\sin(\lambda(x-s))\,d\lambda+\frac{Gw_0}{2}\quad ((x,y)\in\omega).$$

Обращаясь к граничным задачам (1.4) и (1.5), совершенно аналогичным образом придем к следующему определяющему ИУ:

$$\int_{-a}^{a}\ln\left(1\Big/2sh\left(\frac{\pi|x-s|}{2H}\right)\right)\chi_2(s)\,ds=h_2(x)=\pi h(x)+\pi c_2 q_2(x,a),\; h(x)=\int_{-a}^{x}f(s)\,ds. \quad (2.12)$$

Обозначим, как выше, решение ИУ (2.12) при правой части $h(x)$ через $\omega_2(x)$, а при правой части 1 – через $q_2(x,a)$. Тогда будем иметь $\chi_2(x)=\pi\omega_2(x)+\pi c_2\,q_2(x,a)\quad(-a<x<a)$ и

$$\psi_2(x,y)=\int_{-a}^{a}\left[\omega_2(s)+c_2\,q_2(s,a)\right]ds\int_0^{\infty}\frac{ch(\lambda(y+H))}{\lambda sh(\lambda H)}\cos(\lambda(x-s))\,d\lambda;\quad((x,y)\in\omega);$$

$$\varphi_2(x,y)=\int_{-a}^{a}\left[\omega_2(s)+c_2\,q_2(s,a)\right]ds\int_0^{\infty}\frac{sh(\lambda(y+H))}{\lambda sh(\lambda H)}\sin(\lambda(x-s))\,d\lambda;$$

$$p_2(0)=0,\quad c_2=-(\pi\Omega_2+2Gw_0)/\pi Q_2;\;\Omega_2=\int_{-a}^{a}\omega_2(s)\,ds;\quad Q_2=\int_{-a}^{a}q_2(s,a)\,ds,$$

где приняты соответствующие первой граничной задаче обозначения.

3. Приступив к решению ИУ (2.5) и (2.12), сначала в них положим

$$\xi=\pi x/H,\;\eta=\pi s/H;\;\alpha=\pi a/H;$$
$$\chi_k^0(\xi)=(H/\pi)\chi_k(H\xi/\pi);\;h_k^0(\xi)=h_k(H\xi/\pi)\;(k=1,2).$$

В результате они примут, соответственно, вид

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\ln cth\left(\frac{|\xi-\eta|}{4}\right)\chi_1^0(\eta)\,d\eta=h_1^0(\xi); \quad (3.1)$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\ln\left(1\Big/2sh\left(\frac{|\xi-\eta|}{2}\right)\right)\chi_2^0(\eta)\,d\eta=h_2^0(\xi);\quad(-\alpha<\xi<\alpha); \quad (3.2)$$

$$h_k^0(\xi)=\pi h(H\xi/\pi)+\pi c_k;\;\chi_k^0(\xi)=\pi\omega_k^0(\xi)+\pi c_k\,q_k^0(\xi,\alpha);$$
$$\omega_k^0(\xi)=\omega_k(H\xi/\pi)\quad(k=1,2).$$

Здесь $q_1^0(\xi,\alpha)$ и $q_2^0(\xi,\alpha)$ – решения, соответственно, ИУ

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\ln cth\left(\frac{|\xi-\eta|}{4}\right)q_1^0(\eta,\alpha)\,d\eta=1;\quad\int_{-\alpha}^{\alpha}\ln\left(1\Big/2sh\left(\frac{|\xi-\eta|}{2}\right)\right)q_2^0(\eta,\alpha)\,d\eta=1.$$

Эти функции даются формулами [11] (с. 245)

$$\begin{aligned}&q_1^0(\xi,\alpha)=\left[\pi Q_{-1/2}(ch\alpha)\sqrt{2(ch\alpha-ch\xi)}\right]^{-1};\\&q_2^0(\xi,\alpha)=\pi^{-1}M_0(\alpha)ch(\xi/2)\left[2(ch\alpha-ch\xi)\right]^{-1/2};M_0(\alpha)=\left[\ln(1/sh(\alpha/2))\right]^{-1},\end{aligned} \quad (3.3)$$

где $Q_{-1/2}(x)$– функция Лежандра второго рода. В прежних переменных будем иметь

$$\begin{aligned}&q_1(x,\alpha)=\left[HQ_{-1/2}(ch(\pi a/H))\sqrt{2(ch(\pi a/H)-ch(\pi x/H))}\right]^{-1};\\&q_2(x,\alpha)=(M(a)/H)ch(\pi x/2H)\left\{2\left[ch(\pi a/H)-ch(\pi x/H)\right]\right\}^{-1/2};\\&M(a)=-(\ln(sh(\pi a/2H)))^{-1}.\end{aligned} \quad (3.4)$$

Теперь при помощи (3.4) можно вычислить величины $Q_1$ и $Q_2$ :

$$Q_1=P_{-1/2}(ch(\pi a/H))/Q_{-1/2}(ch(\pi a/H));\quad Q_2=M(a)=\left[\ln(1/sh(\pi a/2H))\right]^{-1},$$

где $P_{-1/2}(x)$ – функция Лежандра первого рода.

Решения ИУ (3.1) и (3.2) можно построить различными методами. На основании (3.3) их решения можно получить по формулам М.Г. Крейна [11] (гл.IV, §8). Далее дифференцированием обеих частей (3.1) и (3.2) по $\xi$ придем к следующим сингулярным интегральным уравнениям:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \chi_1^0(\eta)\,d\eta \Big/ sh\big((\eta-\xi)/2\big) = 2\left[h_1^0(\xi)\right]'; \qquad \int_{-\alpha}^{\alpha} cth\big((\eta-\xi)/2\big)\chi_2^0(\eta)\,d\eta = 2\left[h_2^0(\xi)\right]';$$

формулы решений которых приведены в [12].

Решения этих ИУ можно найти также методом ортогональных многочленов. А именно, решение ИУ (3.1) этим методом можно получить при помощи установленных в работе [13] спектральных соотношений. Чтобы этим же методом решить и ИУ (3.2), известные спектральные соотношения [14]

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \ln\frac{1}{|x-s|}\frac{T_n(s)\,ds}{\sqrt{1-s^2}} = \begin{cases} \dfrac{1}{n}T_n(x) & (n=1,2,...); \\ \ln 2 & (n=0), \end{cases} \quad (-1<x<1) \tag{3.5}$$

где $T_n(x)$– многочлены Чебышева первого рода, преобразуем в соответствующие соотношения для ядра ИУ (3.2). С этой целью в (3.5) при $n=2m\ (m=0,1,2,...)$ положим

$$x = sh(\xi/2)/sh(\alpha/2), \quad s = sh(\eta/2)/sh(\alpha/2) \quad (-\alpha<\xi,\eta<\alpha),$$

а при $n=2m+1\ (m=0,1,2,...)$ -

$$x = th(\xi/2)/th(\alpha/2), \quad s = th(\eta/2)/th(\alpha/2) \quad (-\alpha<\xi,\eta<\alpha).$$

После несложных преобразований придем к следующим спектральным соотношениям:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} \ln\left[1\Big/2sh\left(\frac{|\xi-\eta|}{2}\right)\right]\frac{T_{2m}\left(\dfrac{sh(\eta/2)}{sh(\alpha/2)}\right)ch(\eta/2)\,d\eta}{\sqrt{2(ch\alpha-ch\eta)}} = \begin{cases} \dfrac{1}{2m}T_{2m}\left(\dfrac{sh(\xi/2)}{sh(\alpha/2)}\right) & (m=1,2,...); \\ \ln\dfrac{1}{sh(\alpha/2)} & (m=0); \end{cases} \tag{3.6}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} \ln\left[1\Big/2sh\left(\frac{|\xi-\eta|}{2}\right)\right]\frac{T_{2m+1}\left(\dfrac{th(\eta/2)}{th(\alpha/2)}\right)d\eta}{ch(\eta/2)\sqrt{2(ch\alpha-ch\eta)}} = \frac{T_{2m+1}\left(\dfrac{th(\xi/2)}{th(\alpha/2)}\right)}{(2m+1)\,ch(\alpha/2)} \quad (m=0,1,2,...). \tag{3.7}$$

При этом условия ортогональности многочленов Чебышева первого рода с указанными видоизмененными аргументами имеют вид

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} T_{2m}\left(\frac{sh(\eta/2)}{sh(\alpha/2)}\right)T_{2n}\left(\frac{sh(\eta/2)}{sh(\alpha/2)}\right)\frac{ch(\eta/2)\,d\eta}{\sqrt{2(ch\alpha-ch\eta)}} = \begin{cases} \pi & (m=n=0); \\ \dfrac{\pi}{2} & (m=n\neq 0); \\ 0 & (m\neq n); \end{cases} \tag{3.8}$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} T_{2m+1}\left(\frac{th(\eta/2)}{th(\alpha/2)}\right)T_{2n+1}\left(\frac{th(\eta/2)}{th(\alpha/2)}\right)\frac{d\eta}{ch(\eta/2)\sqrt{2(ch\alpha-ch\eta)}}=\begin{cases}\frac{\pi}{2}ch(\alpha/2) & (m=n);\\ 0 & (m\neq n).\end{cases} \quad (3.9)$$

Далее решение ИУ (3.2) разложим на симметрическую и кососимметрическую части:

$$\chi_2^0(\xi)=\chi_+(\xi)+\chi_-(\xi),\quad h_2^0(\xi)=h_+(\xi)+h_-(\xi);$$
$$\chi_\pm(-\xi)=\pm\chi_\pm(\xi);\quad h_\pm(-\xi)=\pm h_\pm(\xi).$$

В результате придем к следующим ИУ:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\ln\left[1\Big/2sh\left(\frac{|\xi-\eta|}{2}\right)\right]\chi_\pm(\eta)\,d\eta=h_\pm(\xi)\qquad(-\alpha<\xi<\alpha). \quad (3.10)$$

Теперь решения ИУ (3.10) представим в форме бесконечных рядов

$$\chi_+(\xi)=\frac{ch(\xi/2)}{\sqrt{2(ch\alpha-ch\xi)}}\sum_{m=0}^{\infty}X_m^+T_{2m}\left(\frac{sh(\xi/2)}{sh(\alpha/2)}\right);\quad(-\alpha<\xi<\alpha) \quad (3.11)$$

$$\chi_-(\xi)=\frac{1}{ch(\xi/2)\sqrt{2(ch\alpha-ch\xi)}}\sum_{m=0}^{\infty}X_m^-T_{2m+1}\left(\frac{th(\xi/2)}{th(\alpha/2)}\right) \quad (3.12)$$

с неизвестными коэффициентами $X_m^\pm\ (m=0,1,2,...)$. Подставляя (3.11) в ИУ (3.10) со знаком “+”, а (3.12) – в ИУ (3.10) со знаком “-” и воспользовавшись спектральными соотношениями (3.6) и (3.7), а также условиями ортогональности (3.8) и (3.9), после простых преобразований находим

$$X_0^+=-h_0^+\big/\pi^2\ln sh(\alpha/2);\quad X_m^+=4mh_m^+\big/\pi^2\quad(m=1,2,...);$$
$$X_m^-=2\pi^{-2}(2m+1)ch(\alpha/2)\,h_m^-\qquad(m=0,1,2,...); \quad (3.13)$$
$$h_m^+=\int_{-\alpha}^{\alpha}h_+(\xi)\frac{T_{2m}\left(sh(\xi/2)/sh(\alpha/2)\right)ch(\xi/2)\,d\xi}{\sqrt{2(ch\alpha-ch\xi)}}$$
$$h_m^-=\int_{-\alpha}^{\alpha}h_-(\xi)\frac{T_{2m+1}\left(th(\xi/2)/th(\alpha/2)\right)d\xi}{ch(\xi/2)\sqrt{2(ch\alpha-ch\xi)}}\qquad(m=0,1,2,...).$$

Таким образом, получено точное решение ИУ (3.2) в форме бесконечных рядов (3.11) и (3.12) с коэффициентами (3.13).

Институт механики НАН РА
e-mail: smkhitaryan39@rambler.ru

**М.С. Григорян, М.С. Мкртчян,**
**член-корреспондент НАН РА С.М. Мхитарян**

## О двух смешанных граничных задачах для упругого слоя при антиплоской деформации

Рассматриваются две смешанные граничные задачи математической теории упругости для упругого слоя при антиплоской деформации. Такие задачи встречаются в геомеханике в расчетах горных массивов, подверженных сдвиговым деформациям. Решения обсуждаемых задач сводятся к решениям интегральных уравнений Фредгольма первого рода с симметрическими ядрами, допускающих точные решения.

Մ. Ս. Գրիգորյան, Մ. Ս. Մկրտչյան,
ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ս. Մ. Մխիթարյան

## Հակահարթ դեֆորմացիայի ժամանակ առաձգական շերտի համար խառը եզրային երկու խնդիրների մասին

Հակահարթ դեֆորմացիայի ժամանակ առաձգական շերտի համար դիտարկվում են առաձգականության մաթեմատիկական տեսության խառը եզրային երկու խնդիրներ: Այդպիսի խնդիրներ հանդիպում են գեոմեխանիկայում՝ սահքի դեֆորմացիաների ենթարկված լեռնային զանգվածների հաշվարկներում: Քննարկվող խնդիրների լուծումները հանգեցվում են ճշգրիտ լուծումներ թույլատրող սիմետրիկ կորիզներով Ֆրեդհոլմի առաջին սեռի ինտեգրալ հավասարումների լուծումներին:

**M. S. Grigoryan, M. S. Mkrtchyan,**
**corresponding member of NAS RA S.M. Mkhitaryan**

## On Two Mixed Boundary Value Problems for an Elastic Layer under Antiplane Deformation

This paper considers two mixed boundary problems of mathematical theory of elasticity for the elastic layer at antiplane deformation. Such problems occur in geomechanics calculations of mountainous masses, subject to shear deformations. Problem ofconsidered solutionsreduce Fredholm first kind integral equations solutions for symmetric kernels that permit to obtain exact solutions.

## Литература

1. *Штаерман И.Я.* Контактная задача теории упругости. Гостехтеориздат. М.–Л. 1949. 270 с.

2. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М. Наука. 1980. 304 с.
3. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М. Наука. 1974. 456 с.
4. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. М. Мир. 1989. 509 с.
5. Развитие теории контактных задач в СССР. М. Наука. 1976. 493 с.
6. Механика контактных взаимодействий. Под ред. И.И. Воровича и В.М. Александрова. М. Физматлит. 2001. 670 с.
7. *Фильчаков П.Ф.* Теория фильтрации под гидротехническими сооружениями. Т. 1–2. Киев. Изд-во АН УССР. 1959–1960. 308–256 с.
8. *Mkhitaryan M.S.* - Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute. 2011. V. 155. P. 55-72.
9. *Мхитарян С.М., Григорян М.С.* В кн.: Избр. труды междунар. научн. конф. «Образование, наука и экономика в вузах». 26–30 сентября. Ереван. 2012. С. 134–144.
10. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М. Наука. 1971. 1108 с.
11. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. М. Наука. 1967. 508 с.
12. *Чибрикова Л.И.* - Уч. зап. Казанского гос.ун-та. 1962. Т. 122. Кн. 3. С. 95-125.
13. *Мхитарян С.М.* - Изв. АН АрмССР. Механика. 1982. Т. 35. № 6. С. 3 – 18.
14. *Попов Г.Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М. Наука. 1982. 344 с.