ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 116 2016 № 4

МАТЕМАТИКА

УДК 517.51

К. А. Керян

Теорема единственности для кратных рядов Чисельского

(Представлено академиком Г. Г. Геворкяном 15/VI 2016)

Ключевые слова: *система Чисельского, единственность, мажоранта частных сумм.*

А. Б. Александровым получена теорема о восстановлении по своим граничным значениям при помощи A-интеграла для функций из $H^p(D)(p<1)$ [1]. Далее Г. Г. Геворкян получил необходимое и достаточное условие для того, чтобы тригонометрический ряд являлся рядом Фурье интегрируемой функции [2]. Для рядов Франклина в [3] им получена следующая

Теорема А. *Для того, чтобы ряд* $\sum_{m=0}^{\infty} a_m f_m(x)$ *был рядом Фурье – Франклина некоторой интегрируемой функции* $f(x)$, *необходимо и достаточно, чтобы этот ряд почти всюду сходился к* $f(x)$ *и*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\inf \lambda\cdot\mu\left\{x\in[0,1]:\sup_N\left|\sum_{m=0}^{N} a_m f_m(x)\right|>\lambda\right\}=0.$$

Г. Г. Геворкян в [4] получил формулы, выражающие коэффициенты ряда Франклина, п.в. сходящегося к функции $f(x)$ через функцию $f(x)$ при помощи A-интеграла. В работах [5-8] получены также теоремы восстановления при помощи A-интеграла для систем Хаара, Виленкина, для аддитивных функций интервала, а также параллелепипедов.

В настоящей работе исследуется вопрос единственности кратных рядов по системе Чисельского. Ортонормальная система Чисельского состоит из кусочно-полиномиальных функций и является базисом в пространстве непрерывных на [0,1] функций [9]. Важным частным случаем системы Чисельского является система Франклина, состоящая из кусочно-линейных функций.

Г. Г. Геворкяном получена теорема единственности для кратных рядов по системе Франклина. Основной целью настоящей работы является обобщение указанной теоремы для кратных рядов по системе Чисельского.

Во-первых, дадим необходимые определения, далее приведем формулировки и доказательства некоторых вспомогательных лемм.

Пусть $n = 2^v + j$, где $v \geq 0, 1 \leq j \leq 2^v$. Обозначим через

$$s_{n,i} = \begin{cases} \dfrac{i}{2^v + 1}, \text{для } 0 \leq i \leq 2v, \\ \dfrac{i - v}{2^v}, \text{для } 2v \leq i \leq n. \end{cases}$$

Через S_n обозначим пространство полиномиальных сплайнов порядка r с узлами $s_{n,i}$, $i = 0,\ldots,n$, т.е. пространство функций, являющихся полиномами степени меньше r на каждом из отрезков $\left[s_{n,i}, s_{n,i+1}\right]$, для $i = 0, \ldots, n-1$ и с непрерывными производными порядка $r-2$ на [0,1]. Ясно, что $\dim S_n = \dim S_{n-1} + 1$, поэтому существует единственная с точностью до знака функция $f_n \in S_n$, которая ортогональна S_{n-1}, и $\left\|f_n\right\|_2 = 1$. Далее, пусть $f_n, -r+2 \leq n \leq 1-$ система ортогональных полиномов в $L^2\left[0,1\right]$ и степень f_n равна $n+r-2$. Система функций $\left\{f_n\right\}_n^\infty = -r+2$ называется системой Чисельского порядка r.

Пусть k – некоторое натуральное число. Зафиксируем r. В тех случаях, где r будет переменной, в индексах соответствующих функций r не будет опущен.

Рассмотрим кратные ряды Чисельского

$$\sum\nolimits_{\mathrm{m} \in \mathbb{N}^k} a_{\mathrm{m}} f_{\mathrm{m}}\left(\mathrm{x}\right), \tag{1}$$

где $\mathbb{N}^k = \left\{-r+2, -r+1, \ldots\right\}^k$, а $\mathrm{m} = \left(m_1, m_2, \ldots, m_k\right)$ – вектор с целочисленными координатами, $\mathrm{x} = \left(x_1, x_2, \ldots, x_k\right) \in \left[0,1\right]^k$ и $f_{\mathrm{m}}\left(\mathrm{x}\right) = f_{m_1}\left(x_1\right) \cdot \ldots \cdot f_{m_k}\left(x_k\right)$.

Обозначим через $\sigma_\nu(x)$ кубические частичные суммы ряда (1) с номерами 2^ν, т.е.

$$\sigma_v\left(\mathrm{x}\right) = \sum\nolimits_{\mathrm{m}: m_i \leq 2^v} a_{\mathrm{m}} f_{\mathrm{m}}\left(\mathrm{x}\right), \tag{2}$$

где $\mathrm{m} = (m_1, \ldots, m_{\mathrm{k}})$. Положим

$$\sigma^*\left(\mathrm{x}\right) = \sup_v \left|\sigma_v\left(\mathrm{x}\right)\right|. \tag{3}$$

Введем следующие обозначения: $t_j^v = \dfrac{j}{2^v}$ для $j \in \mathbb{Z}$, $\hat{N}_j^v$ – В-сплайны порядка r, соответствующие узлам $t_j^\nu, \ldots, t_{j+r}^\nu$, $N_j^v = \hat{N}_j^v \cdot 1_{\left[0,1\right]}$ для $-r+1 \leq$ $\leq j \leq 2^v - 1$, где 1_E – характеристическая функция множества E, а $\delta_{v,j}^r \subset \left[t_j^v, t_{j+r}^v\right]$ – носитель функции N_j^v.

Для натурального ν положим $\mathbb{N}_v^k = \left\{-r+1,\ldots,2^v-1\right\}^k$. Для вектора $\mathrm{j} = \left(j_1,\ldots,j_k\right) \in \mathbb{N}_v^k$ обозначим

$$\Delta_{\mathrm{j}}^v = \delta_{v,j_1}^r \times \ldots \times \delta_{v,j_k}^r, \qquad t_{\mathrm{j}}^v = \left(t_{j_1}^v,\ldots,t_{j_k}^v\right)$$

и

$$N_{\mathrm{j}}^v\left(\mathrm{t}\right) = N_{\mathrm{j}}^v\left(t_1,\ldots,t_k\right) = N_{j_1}^v\left(t_1\right)\ldots N_{j_k}^v\left(t_k\right).$$

Известно, что $\sum_{j=-r+1}^{2^v-1} N_j^v\left(t\right) = 1$, когда $t \in \left[0,1\right]$, следовательно

$$\sum_{\mathrm{j}\in\mathbb{N}_v^k} N_{\mathrm{j}}^v\left(\mathrm{t}\right) = 1, \quad \text{когда } \mathrm{t} \in \left[0,1\right]^k \ \text{ и } \operatorname{supp} N_{\mathrm{j}}^v = \Delta_{\mathrm{j}}^v.$$

Нетрудно убедиться, что система функций $\left\{N_{\mathrm{j}}^v\left(t\right)\right\}_{\mathrm{j}\in\mathbb{N}_v^k}$ образует базис в линейном пространстве

$$S_\nu := \left\{\sum_{\mathrm{m}:m_i\le 2^v} a_{\mathrm{m}} f_{\mathrm{m}}\left(\mathrm{x}\right) : a_{\mathrm{m}} \in \mathbb{R}\right\}.$$

Поэтому верна следующая

Лемма 1. *Если* $G \subset S_v$ *и* $G \neq 0$, *то существует* $\mathrm{j} \in \mathbb{N}_v^k$ *такое, что*

$$\left(G, N_{\mathrm{j}}^\nu\right) := \int_{[0,1]^k} G\left(\mathrm{t}\right) N_{\mathrm{j}}^\nu\left(\mathrm{t}\right)\mathrm{dt} \neq 0.$$

Имеем также

$$\int_{[0,1]^k} N_{\mathrm{j}}^\nu\left(\mathrm{t}\right)\mathrm{dt} = \int_{\Delta_j^v} N_{\mathrm{j}}^\nu\left(\mathrm{t}\right)\mathrm{dt} = \prod_{i=1}^k \int_{\delta_{j_i}^v} N_{j_i}^\nu\left(t_i\right)\mathrm{d}t_i = \frac{\mu\left(\Delta_{\mathrm{j}}^\nu\right)}{r^k}.$$

Обозначив

$$M_{v,j}^r\left(t\right) = \frac{r}{\mu\left(\delta_{v,j}^r\right)} N_j^v\left(t\right) \ \text{ для } \ t \in \left[0,1\right] \ \text{ и } \ M_{\mathrm{j}}^\nu\left(\mathrm{t}\right) = \frac{r^k}{\mu\left(\delta_{\mathrm{j}}^\nu\right)} N_{\mathrm{j}}^\nu\left(\mathrm{t}\right) \ \text{ для } \ \mathrm{t} \in \left[0,1\right]^k,$$

получим

$$\int_0^1 M_{v,j}^r\left(t\right)\mathrm{d}t = \int_{[0,1]^k} M_{\mathrm{j}}^\nu\left(\mathrm{t}\right)\mathrm{dt} = 1.$$

Верна следующая лемма.

Лемма 2. *Для любых* $M_{\mathrm{j}_0}^{\nu_0}\left(\mathrm{t}\right)$ *и* $\nu > \nu_0$ *существуют числа* α_{j} *такие, что*

$$M_{\mathrm{j}_0}^{\nu_0}\left(\mathrm{t}\right) = \sum_{\mathrm{j}\in\mathbb{N}_v^k} \alpha_{\mathrm{j}} M_{\mathrm{j}}^\nu\left(\mathrm{t}\right),$$

причем

$$\sum_{\mathrm{j}\in\mathbb{N}_v^k} \alpha_{\mathrm{j}} = 1, \alpha_{\mathrm{j}} \ge 0 \ \textit{ и } \ \alpha_{\mathrm{j}} = 0, \textit{ если } \Delta_{\mathrm{j}}^\nu \not\subset \Delta_{\mathrm{j}_0}^{\nu_0}$$

Доказательство. Заметим, что достаточно доказать лемму в случае $k=1$. Докажем по индукции на r-ранг сплайнов. Случай $r=2$

рассмотрен Г. Геворкяном. Допустим, что $M^r_{\nu_0,j_0}(t)=\sum_{j=-r+1}^{2^\nu-1}\alpha_j M^\nu_{\nu,j}(t)$ и коэффициенты удовлетворяют следующим условиям:

$$\sum_{j=-r+1}^{2^\nu-1}\alpha_j=1, \alpha_j\geq 0 \text{ и } \alpha_j=0, \text{ если } \delta^r_{\nu,j}\not\subset\delta^r_{\nu_0,j_0}.$$

Известно, что

$$\frac{d}{dt}\left(M^{r+1}_{\nu,j}(t)\right)=\frac{r}{\mu\left(\delta^{r+1}_{\nu,j}\right)}\left(M^r_{\nu,j}(t)-M^r_{\nu,j+1}(t)\right). \tag{4}$$

Отсюда, используя предположение индукции и положив $s=\min\left(j:\delta^r_{v,j}\subset\delta^r_{v_0,j_0}\right)$, $t=\max\left(j:\delta^r_{v,j}\subset\delta^r_{v_0,j_0}\right)$, получим

$$\frac{d}{dt}\left(M^{r+1}_{v_0,j_0}(t)\right)=\frac{r}{\mu\left(\delta^{r+1}_{v_0,j_0}\right)}\sum_{j:\delta^r_{v,j}\subset\delta^r_{v_0,j_0}}\alpha_j\left(M^r_{v,j}(t)-M^r_{v,j+2^{v-v_0}}(t)\right)=$$

$$=\frac{r}{\mu\left(\delta^{r+1}_{v_0,j_0}\right)}\sum_{j:\delta^r_{v,j},\delta^r_{v,j+1}\subset\delta^{r+1}_{v_0,j_0}}\beta_j\left(M^r_{v,j}(t)-M^r_{v,j+1}(t)\right),$$

где

$$\beta_j=\begin{cases}\alpha_s+\ldots+\alpha_j, \text{при } s\leq j<s+2^{v-v_0}\\ \alpha_{j-2^{v-v^0}+1}+\ldots+\alpha_j, \text{при } s+2^{v-v_0}\leq j\leq t\\ \alpha_{j-2^{v-v^0}+1}+\ldots+\alpha_t, \text{при } t<j\leq t+2^{v-v_0}-1.\end{cases}$$

Заметим, что все коэффициенты $\beta_j\geq 0$ ввиду индукционного предположения. Следовательно, используя (4), получим, что для некоторых $c_j\geq 0$ имеет место

$$\frac{d}{dt}\left(M^{r+1}_{v_0,j_0}(t)\right)=\sum_{j:\delta^{r+1}_{v,j}\subset\delta^{r+1}_{v_0,j_0}}c_j\frac{d}{dt}\left(M^{r+1}_{v,j}(t)\right),$$

откуда получим $M^{r+1}_{v_0,j_0}(t)=\sum_{j:\delta^{r+1}_{v,j}\subset\delta^{r+1}_{v_0,j_0}}c_jM^{r+1}_{v,j}(t)+C$. Взяв $t\notin\delta^{r+1}_{v_0,j_0}$, из последнего равенства получим, что $C=0$. Проинтегрировав по [0,1] и воспользовавшись равенством $\int_0^1 M^r_{v,j}(t)dt=1$, получим $\sum_j c_j=1$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* g *является полиномом степени не больше* r *на* $[\alpha,\beta]$ *и* $l:=\max_{t\in[\alpha,\beta]}|g(t)|$, *тогда*

$$\mu\left\{t\in[\alpha,\beta]:|g(t)|>\frac{l}{2}\right\}\geq\frac{\beta-\alpha}{4r^2}.$$

Доказательство. Согласно неравенству Маркова $\left|g'(t)\right| \le \dfrac{2r^2}{\beta-\alpha}\cdot l$ для $t\in[\alpha,\beta]$. Следовательно, если $\left|g(t_0)\right| = l$ для некоторого $t_0\in[\alpha,\beta]$, то $\left|g(t)-g(t_0)\right| \le \dfrac{l}{2}$ для всех $t_0 \in \left[t_0-\dfrac{\beta-\alpha}{4r^2}, t_0+\dfrac{\beta-\alpha}{4r^2}\right]\cap[\alpha,\beta]$. Из последнего вытекает необходимая оценка.

Лемма 4. *Пусть функция G определена на $\Delta=[\alpha_1,\beta_1]\times\ldots\times[\alpha_k,\beta_k]$, $k\in\mathbb{N}$ и G является полиномом степени не больше r по каждой переменной. Тогда если $L=\max_{t\in\Delta}\left|G(t)\right|$, то*

$$\mu\left\{\mathrm{t}\in\Delta : \left|G(\mathrm{t})\right| > \frac{L}{2^k}\right\} \ge \frac{\mu(\Delta)}{\left(4r^2\right)^k}.$$

Доказательство. Докажем методом индукции по k. Для $k=1$ утверждение совпадает с леммой 3. Допустим, что утверждение верно для k, и докажем для $k+1$. Пусть $L=\left|G(\mathrm{t}_0)\right| = \left|G\left(t_1^0,\ldots,t_{k+1}^0\right)\right|$ где $\mathrm{t}_0\in\Delta$. Из леммы 3 следует, что

$$\mu\left(A_{k+1}\right) \ge \frac{\beta_{k+1}-\alpha_{k+1}}{4r^2}, \text{ где } A_{k+1} = \left\{t_{k+1}\in\left[\alpha_{k+1},\beta_{k+1}\right] : \left|G\left(t_1^0,\ldots,t_k^0,t_{k+1}\right)\right| > \frac{L}{2}\right\}.$$

.

Из этого, применяя индукционное предположение для всякого $t_{k+1}\in A_{k+1}$, будем иметь

$$\mu\left\{\tilde{\mathrm{t}}\in[\alpha_1,\beta_1]\times\ldots\times[\alpha_k,\beta_k] : \left|G\left(\tilde{\mathrm{t}},\mathrm{t}_{k+1}\right)\right| > \frac{L}{2^{k+1}}\right\} \ge$$

$$\ge \mu\left\{\tilde{\mathrm{t}}\in[\alpha_1,\beta_1]\times\ldots\times[\alpha_k,\beta_k] : \left|G\left(\tilde{\mathrm{t}},\mathrm{t}_{k+1}\right)\right| > \frac{\max_{\tilde{t}}\left|G\left(\tilde{\mathrm{t}},\mathrm{t}_{k+1}\right)\right|}{2^k}\right\} \ge$$

$$\ge \frac{\mu\left([\alpha_1,\beta_1]\times\ldots\times[\alpha_k,\beta_k]\right)}{\left(4r^2\right)^k},$$

следовательно

$$\mu\left\{\mathrm{t}\in\Delta : \left|G(\mathrm{t})\right| > \frac{L}{2^{k+1}}\right\} \ge \mu\left(A_{k+1}\right)\cdot\frac{\mu\left([\alpha_1,\beta_1]\times\ldots\times[\alpha_k,\beta_k]\right)}{\left(4r^2\right)^k} \ge \frac{\mu(\Delta)}{\left(4r^2\right)^{k+1}}.$$

Используя метод, разработанный Г. Геворкяном, и предыдущие леммы, можно доказать следующие теоремы.

Теорема 1. *Если суммы (2) по мере сходятся к нулю и выполняется условие*

$$\liminf_{\lambda\to\infty} \lambda\cdot\mu\left\{\mathrm{x}\in\left[0,1\right]^k : \sigma^*\left(\mathrm{x}\right)>\lambda\right\}=0,$$

то все коэффициенты ряда (1) равны нулю.

Теорема 2. *Если ряд (1) является рядом Фурье – Чисельского некоторой функции* $f\in L\left(\left[0,1\right]^k\right)$ *, то суммы (2) сходятся п.в. к* f *и выполняется*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\cdot\mu\left\{\mathrm{x}\in\left[0,1\right]^k : \sigma^*\left(\mathrm{x}\right)>\lambda\right\}=0.$$

Теорема 3. *Ряд (1) является рядом Фурье – Чисельского некоторой функции* $f\in L\left(\left[0,1\right]^k\right)$ *тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1. *суммы* $\sigma_v\left(\mathrm{x}\right)$ *по мере сходятся к* $f\left(\mathrm{x}\right)$,
2. $\liminf_{\lambda\to\infty} \lambda\cdot\mu\left\{\mathrm{x}\in\left[0,1\right]^k : \sigma^*\left(\mathrm{x}\right)>\lambda\right\}=0$.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта 15T-1A006.

Ереванский государственный университет
e-mail: karenkeryan@ysu.am

К. А. Керян

Теорема единственности для кратных рядов Чисельского

Доказывается теорема единственности для кратных рядов по системе Чисельского, сходящихся по мере, мажоранта кубических частичных сумм с номерами 2^v которой удовлетворяет некоторому условию.

Կ. Ա. Քերյան

Միակության թեորեմ Չիսելսկու բազմապատիկ շարքերի վերաբերյալ

Ապացուցվում է Չիսելսկու պատիկ շարքերի համար միակության թեորեմ, որոնք զուգամիտում են ըստ չափի, և որոնց 2^v համարներով խորանարդային մասնակի գումարների մաժորանտը բավարարում է որոշակի պայմանի:

K. A. Keryan

Uniqueness Theorem for Multiple Ciesielski Series

The uniqueness theorem for multiple Ciesielski series converging in measure with majorant of the cubic 2^v partial sums satisfying some condition is proved.

Литература

1. *Александров А. Б.* - Мат. заметки. 1981. Т. 30. N1. С. 59–72.
2. *Геворкян Г. Г.* - Мат. сб. 1989. Т. 180. N11. С.1462–1474.
3. *Геворкян Г. Г.* - Мат. заметки. 1989. Т. 46. N2. С. 51–58.
4. *Геворкян Г. Г.* - Мат. заметки. 1996. Т. 59. N4. С. 521–545.
5. *Галстян С. Ш.* - Мат. заметки. 1994. Т. 56. N 4. С. 38–47.
6. *Геворкян Г. Г.* - Изв. НАН Армении. Математика. 1995. Т. 30. N 5. С. 7-21.
7. *Костин В. В.* –Мат. заметки. 2015. Т. 73. N 5. С. 704-723.
8. *Керян К. А.*- Мат. заметки. 2015. Т. 97. N 3. С. 382–396
9. *Ciesielski Z* .- Studia Math. 1975. V. 53. P. 277-302.
10. *Геворкян Г. Г.* - Мат. заметки. 2015. Т. 98, N 5. С. 786-789.