ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 116 2016 № 3

МАТЕМАТИКА

УДК 517

Академик В. С. Захарян, Р. В. Даллакян

О граничных значениях частного произведений Джрбашяна и Бляшке

(Представлено 29/ VI 2016)

Ключевые слова: *оператор интегродифференцирования Римана – Лиувилля, произведения Бляшке и Джрбашяна, класс гармонических в единичном круге функций U_α, α-емкость множества E.*

Введение. Пусть $-1<\alpha<+\infty, D$ – единичный круг комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и последовательность $\{z_n\}\subset D, z_n\neq 0, n=1,2,\ldots$ такая, что

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-|z_n|\right)^{1+\alpha}<+\infty. \tag{1}$$

Бесконечное произведение $B_\alpha(z;\{z_n\}), z\in D$ М. М. Джрбашяна определяется следующим образом (см. [1], гл. IX):

$$B_\alpha(z;\{z_n\})=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)\exp\left\{-W_\alpha(z;z_n)\right\},$$

где для $\xi\in D$

$$W_\alpha(z;\xi)=\int_{|\xi|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}dx-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)}\cdot$$
$$\cdot\left\{\xi^{-}\int_0^{|\xi|}(1-x)^\alpha x^{k-1}dx-\bar{\xi}^k\int_{|\xi|}^{1}(1-x)^\alpha x^{-k-1}dx\right\}z^k.$$

В специальном случае $\alpha=0$ эти произведения превращаются в произведения Бляшке (см. [1], с. 625):

$$B_0\left(z;\left\{z_n\right\}\right)=B\left(z;\left\{z_n\right\}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{z_n-z}{1-\overline{z}_n z}\frac{\left|z_n\right|}{z_n}.$$

В работе [2] доказано следующее утверждение о взаимосвязи между произведениями $B_\alpha,\left(-1<\alpha<0\right)$ и B.

Теорема. *Пусть* $-1<\alpha<0$ *и последовательность* $\left\{z_n\right\}\subset \not{D}$ *удовлетворяет условию (1). Тогда*

$$B_0\left(z;\left\{z_n\right\}\right)=B\left(z;\left\{z_n\right\}\right)\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_\alpha\left(e^{-i\theta}z\right)d\omega\left(\theta\right)\right\},$$

где

$$S_\alpha\left(z\right)=\Gamma\left(1+\alpha\right)\left\{\frac{2}{\left(1-z\right)^{1+\alpha}}-1\right\},\left|z\right|<1,$$

$\omega\left(\theta\right)$ *– некоторая невозрастающая функция ограниченной вариации на* $\left[0,2\pi\right]$.

Отметим, что для любой функции $\omega\left(x\right)$ из класса Ω (см. [3], гл. 1) М. М. Джрбашяном также определены классы N_ω и произведения B_ω. Подобные классы и произведения определены и верхом полуплоскости [4].

Как известно (см. [5], с. 54), для существования радиального предела произведения Бляшке в граничной точке $e^{i\varphi}$ необходимо и достаточно чтобы в этой точке выполнялось условие Фростмана:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-\left|z_n\right|}{\left|e^{i\varphi}-z_n\right|}<+\infty$$

Для произведений $B_0\left(-1<\alpha<0\right)$ доказано, что если имеет место условие типа Фростмана (см. [6], с. 139)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-\left|z_n\right|}{\left|e^{i\varphi}-z_n\right|}\right)^{1+\alpha}<+\infty,$$

то в граничной точке $e^{i\varphi}$ существует конечный предел произведения B_α.

Рассмотрим систему всех множеств $\{B\}$, измеримых по Борелю и лежащих на $[0,2\pi]$. Назовем мерой μ всякую неотрицательную, вполне аддитивную функцию множеств, определенную на $\{\beta\}$ и нормированную, т. е. $\mu([0,2\pi]) = 1$. Скажем, что мера сосредоточена на B, и запишем $\mu \prec B$, если $\mu(B) = 1$, т. е. если

$$\int_B d\mu = \int_0^{2\pi} d\mu = 1 .$$

Множество E, измеримое по Борелю, имеет положительную γ-емкость $(0 < \gamma < 1)$, если найдется такая $\mu \prec E$, для которой функция

$$V_\gamma(x;z) = \int_0^{2\pi} \frac{d\mu}{\left|e^{it} - re^{ix}\right|^\gamma}$$

остается равномерно ограниченной по x при $r \to 1-0$, т. е. если при некоторой $\mu \prec E$

$$V_\gamma(\mu) = \sup_{0\le r\le 1}\left\{\max_{0\le x\le 2\pi} V_\gamma(x;r)\right\} < +\infty .$$

Если же для любой меры $\mu \prec E$ $V_\gamma(\mu) = +\infty$ то скажем, что E имеет γ-емкость, равную нулю, и запишем $cap_\gamma E = 0$.

В работе [6] доказано, что если последовательность $\{z_n\} \subset \mathbb{D}$ удовлетворяет условию (1) и имеет место $(1+\alpha)$-условие типа Фростмана $(-1 < \alpha < 0)$, то везде на $[0,2\pi]$ существуют конечные радиальные значения (отличные от нуля) произведения $B_\alpha(z;\{z_n\})$, кроме некоторого множества $E \subset [0,2\pi]$, $(1+\alpha)$-емкость которого равна нулю: $cap_{1+\alpha} E = 0$.

Более того, если точка $z = e^{i\varphi}$ не является точкой сгущения для последовательности $\{z_n\}$, то произведение $B_\alpha(z;\{z_n\})$ непрерывно в некоторой окрестности точки $z = e^{i\varphi}$.

Если последовательность $\left\{z_n\right\} \subset D$ удовлетворяет условию (1), то (см. [7]) для произведения Бляшке также везде на $\left[0,2\pi\right]$ существует радиальный предел (по модулю равный единице) кроме некоторого множества E, для которого $cap_{1+\alpha} E = 0$.

Класс $U_\alpha \left(-1 < \alpha < +\infty\right)$ можно определить (см. [1], с. 650) как множество всех тех функций $u\left(z\right), z \in D$, которые можно представить в следующем виде:

$$u\left(z\right) = \int_0^{2\pi} P_\alpha \left(\varphi - \theta; r\right) d\psi\left(\theta\right), \ \left(z = re^{i\varphi}\right),$$

где

$$P_\alpha \left(\varphi; r\right) = \Gamma\left(1+\alpha\right) \mathrm{Re}\left\{\frac{2}{\left(1 - re^{i\varphi}\right)^{1+\alpha}} - 1\right\},$$

$\psi\left(\vartheta\right)$ – вещественная функция с конечным полным изменением на $\left[0,2\pi\right]$.

В работе [8] доказано, что если для некоторой точки $e^{io}, \varphi \in \left[0,2\pi\right]$, при каком-либо $\alpha, -1 < \alpha < +\infty$ выполняется условие

$$\overline{\lim_{z \to e^{it}}} \left(1 - \left|z\right|\right)^{1+\alpha} \left|u\left(z\right)\right| = d > 0,$$

где $z \to e^{i\varphi}$ по касательному к единичной окружности пути, то $u\left(z\right)$ не принадлежит классу U_α.

Отметим, что это утверждение в специальном случае $\alpha = 0$ доказано Нафталевичем [9].

Основные результаты. В этой работе доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $-1 < \alpha < 0$, *последовательность* $\left\{z_n\right\} \subset D$ *удовлетворяет условию (1) Бляшке – Джрбашяна и* $n\left(r\right)$ *– количество точек* z_n, *лежащих в круге* $\left|z\right| \le r < 1$. *Тогда если*

$$n(r) \le \frac{\lambda(r)}{(1-r)^{1+\alpha}},$$

где $\lambda(r)$ *такая, что*

$$\lim_{r \leftrightarrow 1-0} \lambda(r) = 0,$$

то для любого значения $\varphi, \varphi \in [0, 2\pi]$

$$\lim_{z \leftrightarrow e^{i\varphi}} (1-|z|)^{1+\alpha} \left| \log \left| \frac{B_\alpha(z;\{z_n\})}{B(z;\{z_n\})} \right| \right| = 0.$$

Из теоремы 1 следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. *Пусть* $-1 < \alpha < 0$, *последовательность* $\{z_n\} \subset \mathbb{D}$ *удовлетворяет условию (1) Бляшке – Джрбашяна. Тогда, если для некоторого значения* $\varphi, \varphi \in [0, 2\pi]$

$$\overline{\lim_{z \leftrightarrow e^{i\varphi}}} (1-|z|)^{1+\alpha} \left| \log \left| \frac{B_\alpha(z;\{z_n\})}{B(z;\{z_n\})} \right| \right| = d > 0,$$

то существует последовательность $\{r_k\}$

$$0 < r_1 < r_2 < \ldots < r_{k-1} < r_k < \ldots < 1, r_k \xrightarrow[k \to \infty]{} 1,$$

такая, что

$$n(r_k) = \frac{c}{(1-r_k)^{1+\alpha}}.$$

Теорема 3. *Пусть* $-1 < \alpha < 0$, *последовательность* $\{z_n\} \subset \mathbb{D}$ *удовлетворяет условию (1) Бляшке – Джрбашяна и* z *стремится к граничной точке* $e^{i\varphi}$ *касательным путем. Тогда*

$$\lim_{z \leftrightarrow e^{i\varphi}} (1-|z|)^{1+\alpha} \log \left| \frac{B_\alpha(z;\{z_n\})}{B(z;\{z_n\})} \right| = 0.$$

Следуя М. М. Джрбащяну (см. [2], с. 26), через Ω обозначим класс функций $\omega(x)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\omega(x)$ положительна и непрерывна на $[0,1)$.

2) $\omega(0)=1$, $\int_0^1 \omega(x)dx<+\infty$.

Докажем следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть* $-1<\alpha<0$, *последовательность* $\{z_n\}\subset \mathbb{D}$ *удовлетворяет условию (1) Бляшке – Джрбашяна, последовательность* $\{r_k\}$

$$0<r_1<r_2<\ldots<r_{k-1}<r_k<\ldots<1, \lim_{k\to\infty} r_k=1,$$

такая, что

$$n(r_k)=\frac{c}{(1-r_k)}, \ k=1,2,\ldots.$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{|Z_n|}^{1}\omega(x)dx=+\infty,$$

где $\omega(x)$ *– любая неубывающая функция из класса* Ω, *такая, что*

$$\frac{\omega(r)}{(1-r)^{\alpha}}\xrightarrow[r\to 1-0]{}+\infty.$$

С учетом теоремы 4 из теоремы 2 следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 5. *Пусть* $-1<\alpha<0$, *последовательность* $\{z_n\}\subset \mathbb{D}$ *удовлетворяет условию (1) Бляшке – Джрбашяна. Тогда если для некоторого значения* $\varphi,\varphi\in[0,2\pi]$

$$\varlimsup_{z\leftrightarrow e^{i\varphi}}(1-|z|)^{1+\alpha}\left|\log\left|\frac{B_\alpha(z;\{z_n\})}{B(z;\{z_n\})}\right|\right|=d>0,$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{|Z_n|}^{1}\omega(x)dx=+\infty,$$

где $\omega(x)$ *– любая неубывающая функция из класса* Ω, *такая, что*

$$\frac{\omega(r)}{(1-r)^{\alpha}} \xrightarrow[r\to 1-0]{} +\infty .$$

Далее нетрудно доказать справедливость следушщего утверждения.

Теорема 6. *Пусть* $-1<\alpha<0$, *последовательность* $\{z_n\}\subset \mathbb{D}$ *удовлетворяет условию (1) Бляшке – Джрбашяна. Тогда если для некоторого значения* $\varphi, \varphi\in[0,2\pi]$

$$\overline{\lim_{z\leftrightarrow e^{i\varphi}}}\,(1-|z|)^{1+\alpha}\left|\log\left|\frac{B_{\alpha}(z;\{z_n\})}{B(z;\{z_n\})}\right|\right| = d>0 ,$$

то точка $e^{i\varphi}$ *является точкой сгущения для последовательности* $\{z_n\}$.

Теорема 7. *Пусть* $-1<\alpha<0$, *последовательность* $\{z_n\}\subset \mathbb{D}$ *удовлетворяет условию (1) Бляшке – Джрбашяна и* E *– множество тех точек* $e^{i\varphi}, \varphi\in[0,2\pi]$, *для которых*

$$\overline{\lim_{z\leftrightarrow e^{i\varphi}}}\,(1-|z|)^{1+\alpha}\left|\log\left|\frac{B_{\alpha}(z;\{z_n\})}{B(z;\{z_n\})}\right|\right| = d>0 .$$

Тогда $cap_{1+\alpha}E=0$.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Государственного комитета по науке МОН РА в рамках научного проекта № 15T-1A083.

Национальный политехнический университет Армении
e-mail: dallakyan57@mail.ru, mathdep@seua.am

Академик В. С. Закарян, Р. В. Даллакян

О граничных значениях частного произведений Джрбашяна и Бляшке

Пользуясь аппаратом интегродифференцирования Римана – Лиувилля, М. М. Джрбашян обобщил класс мероморфных в единичном круге функций N Р. Неванлинны, вводя в рассмотрение классы $N_{\alpha}(-1<\alpha<\infty)$. Фундаментальную роль в этих исследованиях играют произведения B_{α}, которые в специальном

случае $\alpha = 0$ превращаются в произведения Бляшке. В настоящей статье исследуется граничное поведение частного произведений $B_\alpha, (-1 < \alpha < 0)$ и $B_0 \equiv B$ Бляшке.

Ակադեմիկոս Վ. Ս. Զաքարյան, Ռ. Վ. Դալլաքյան

Ջրբաշյանի և Բլյաշկեի արտադրյալների հարաբերության եզրային արժեքների մասին

Օգտվելով Ռիման-Լիուվիլլի ինտեգրո-դիֆերենցման գաղափարից, Մ. Մ. Ջրբաշյանը ընդհանրացրել է Նևանլիննայի N դասերը, ներմուծելով միավոր շրջանում մորոմորֆ ֆունկցիաների N_α դասերը: Այդ ուսումնասիրությունների մեջ էական դեր են խաղում B_α արտադրյալները, որոնք $\alpha = 0$ մասնավոր դեպքում վերածվում են Բլյաշկեի արտադրյալների: Այս աշխատանքում հետազոտվում է Բլյաշկեի $B_\alpha, (-1 < \alpha < 0)$ և $B_0 \equiv B$ արտադրյալների հարաբերության եզրային վարքը:

Academician V. S. Zakaryan, R. V. Dallakyan

On Boundary Properties of Partial Products of Djrbashyan and Blaschke

Using the Riemann-Liouville integration-differentiation operator, M. M. Djrbashyan generalized the class of Nevanlinna's meromorphic functions in the unit circle, introducing classes $N_\alpha, (-1 < \alpha < +\infty)$. Products B_α, which in special case $\alpha = 0$ coincide with the Blaschke product, play the essential role in these investigations. Boundary properties of partial products $B_\alpha, (-1 < \alpha < 0)$ and $B_0 \equiv B$ - products Blaschke are investigated.

Литература

1. *Джрбашян М. М.* Интегральные прообразования и представления функций в комплексной области. М. Наука. 1966. 672 с.
2. *Джрбашян М. М., Захарян В. С.* – Мат. заметки. 1968. Т. 4. N 1. С. 3-10.
3. *Джрбашян М. М., Захарян В. С.* – Классы и граничные свойства функций мероморфных в круге. М. Наука. 1993. 217 с.
4. *Djrbashian A. M.* Functions of α-Bounded Type in the Half-Plane. Springer Science+Business Media, ins. 2005.
5. *Коллингвуд Э., Ловатер А.* Теория предельных множеств. М. Мир. 1971. 312 с.
6. *Захарян В. С.* – Изв. АН АрмССР. Математика. 1968. Т. 3. N 4, 5. С. 288-300.
7. *Broman A.* On two classes of trigonometrical series. Thesis. University of Uppsala. 1947.
8. *Dallakyan R. V.* – Eurasian Math. Journal. 2013. V. 4. N 2. P. 57-63.
9. *Нафталевич А. Г.* – Уч. записки Вильнюсского ун-та. 1956. Т. 5. С. 5-27.
10. *Захарян В. С.* – Изв. АН АрмССР. Математика. 1988. Т. 23. N 2. С. 189-192.