ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր / Том / Volume 116 2016 № 2

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3

Р. К. Алексанян, В. М. Белубекян, М. В. Белубекян

Особенности в угловых точках упругого клина из пьезоэлектрического материала кубической симметрии

(Представлено академиком С. А. Амбарцумяном 18/I 2016)

Ключевые слова: *пьезоупругость, концентрация напряжений, комплексные переменные.*

Имеются многочисленные исследования по выявлению характера концентрации напряжений в окрестности угловой точки упругого клина из пьезоактивного материала. Рассматривались задачи либо в случае гексагональной симметрии, либо в случае обобщенного плоского напряженного состояния, либо в случае цилиндрической анизотропии, например в [1–4].

В отличие от указанных работ в настоящей статье приводится решение антиплоской задачи для пьезоупругого клина из кубически анизотропного материала класса 23. Решение представляется при помощи комплексных переменных, предложенных Р. К. Алексаняном [5]. Установлено, что пьезоэффект может привести к появлению концентрации упругих напряжений в случае, когда без пьезоэффекта она отсутствует, и, наоборот, появлению концентрации напряженности электрического поля.

1. В прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ упругий клин занимает область $0 \le x < \infty$, $0 \le y \le \alpha x$, $-\infty < z < \infty$. Здесь

$$\alpha = tg\varphi, \tag{1.1}$$

где φ – угол раствора клина. Рассматривается задача антиплоской деформации, т. е. для вектора упругого перемещения $\bar{u} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$ принимается

$$u = w = 0, \ w = w(x, y). \tag{1.2}$$

Предполагается, что материал клина является пьезоэлектриком кубической симметрии класса 23.

При принятых предположениях и отсутствии массовых сил и свободных зарядов уравнения равновесия и электростатики следующие [6, 7]:

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial y} = 0, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial y} - \frac{\partial E_2}{\partial x} = 0 , \quad \frac{\partial D_1}{\partial x} + \frac{\partial D_2}{\partial y} = 0 . \qquad (1.4)$$

Здесь σ_{31}, σ_{32} – напряжения сдвига вдоль координаты z; E_1, E_2, D_1, D_2 – компоненты векторов напряженности и индукции электрического поля вдоль координат $x(1)$ и $y(2)$.

Материальные уравнения (функциональные связи) принимаются в виде [6, 7]

$$\sigma_{31} = c_{44}\frac{\partial w}{\partial x} - e_{14}E_2 , \ \sigma_{32} = c_{44}\frac{\partial w}{\partial y} - e_{14}E_1 , \ D_1 = \varepsilon E_1 + e_{14}\frac{\partial w}{\partial y} , \ D_2 = \varepsilon E_2 + e_{14}\frac{\partial w}{\partial x} , \qquad (1.5)$$

где c_{44} – модуль сдвига; ε – диэлектрическая проницаемость; e_{14} – пьезомодуль.

С помощью представления

$$E = -grad\varphi \qquad (1.6)$$

и соотношений (1.5) уравнения (1.3) и (1.4) приводятся к виду [6]

$$c_{44}\Delta w + 2e_{14}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y} = 0 , \quad \varepsilon\Delta\varphi - 2e_{14}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 . \qquad (1.7)$$

Решение системы уравнений для клиновидной области ($0 \le y \le \alpha x$) удобно представить, следуя методу Р. К. Алексаняна [5], следующим образом:

$$w = A(x + \beta y)^{\lambda} , \quad \varphi = B(x + \beta y)^{\lambda} . \qquad (1.8)$$

Подстановка (1.8) в систему уравнений (1.7) при условиях $\lambda \ne 0$, $\lambda \ne 1$ приводит к однородной алгебраической системе уравнений относительно произвольных постоянных A, B

$$c_{44}(1+\beta^2)\cdot A + 2e_{14}\beta \cdot B = 0 , \qquad (1.9)$$

$$\varepsilon(1+\beta^2)\cdot B - 2e_{14}\beta \cdot A = 0 .$$

Условие существования нетривиального решения системы (1.9) приводит к уравнению относительно параметра β

$$\beta^4 + (2+\chi)\beta^2 + 1 = 0 , \qquad (1.10)$$

где

$$\chi = 4e_{14}^2 / (\varepsilon c_{44}) \qquad (1.11)$$

есть коэффициент электромеханической связи.

Уравнение (1.10) имеет четыре корня

$$\beta = \pm i\beta_1 , \quad \beta = \pm i\beta_2 , \qquad (1.12)$$

где

$$\beta_{1,2} = \sqrt{1 + \chi/2 \pm \sqrt{\chi + \chi^2/4}} . \qquad (1.13)$$

Следовательно, общее решение системы (1.7) будет

$$w = A_1(x + i\beta_1 y)^{\lambda} + A_2(x - i\beta_1 y)^{\lambda} + A_3(x + i\beta_2 y)^{\lambda} + A_4(x - i\beta_2 y)^{\lambda} , \qquad (1.14)$$

$$\varphi = B_1(x + i\beta_1 y)^{\lambda} + B_2(x - i\beta_1 y)^{\lambda} + B_3(x + i\beta_2 y)^{\lambda} + B_4(x - i\beta_2 y)^{\lambda} .$$

Однако согласно системе (1.9) между коэффициентами A_k и B_k имеются связи. Из первого уравнения системы (1.9) с учетом, что $\beta_1\beta_2 = 1$, и используя преобразование типа

$$\frac{1-\beta_1^2}{\beta_1}=\frac{\beta_2-\beta_1^2\beta_2}{\beta_1\beta_2}=\beta_2-\beta_1\,, \tag{1.15}$$

нетрудно получить

$$B_1=-i\delta A_1\,,\quad B_2=i\delta A_2\,,\quad B_3=i\delta A_3\,,\quad B_4=-i\delta A_4\,, \tag{1.16}$$

где

$$\delta=(\beta_1-\beta_2)c_{44}/(2e_{14})\,. \tag{1.17}$$

2. Пусть на границе клина $y=0$ заданы условия [6]

$$w=0\,,\quad D_2=0\,. \tag{2.1}$$

Из (1.5) и (1.6) следует, что условия (2.1) можно заменить условиями

$$w=0\,,\quad \partial\varphi/\partial y=0\,. \tag{2.2}$$

Предполагается, что другая грань клина $y=\alpha x$ закреплена и заземлена

$$w=0\,,\quad \varphi=0\,. \tag{2.3}$$

Требуя, чтобы общее решение (1.14) с учетом (1.16) удовлетворяло (2.2), получим

$$w=A_1\left[(x+i\beta_1 y)^\lambda-(x-i\beta_1 y)^\lambda\right]+A_3\left[(x+i\beta_2 y)^\lambda-(x-i\beta_2 y)^\lambda\right], \tag{2.4}$$

$$\varphi=-i\delta\left\{A_1\left[(x+i\beta_1 y)^\lambda-(x-i\beta_1 y)^\lambda\right]-A_3\left[(x+i\beta_2 y)^\lambda-(x-i\beta_2 y)^\lambda\right]\right\}.$$

Подстановка (2.4) в граничные условия (2.3) при $y=\alpha x$ (после сокращения на x^λ) приводит к системе однородных уравнений относительно произвольных постоянных A_1, A_3

$$A_1\left[(1+i\beta_1\alpha)^\lambda-(1-i\beta_1\alpha)^\lambda\right]+A_3\left[(1+i\beta_2\alpha)^\lambda-(1-i\beta_2\alpha)^\lambda\right]=0\,, \tag{2.5}$$

$$A_1\left[(1+i\beta_1\alpha)^\lambda+(1-i\beta_1\alpha)^\lambda\right]-A_3\left[(1+i\beta_2\alpha)^\lambda+(1-i\beta_2\alpha)^\lambda\right]=0\,.$$

С помощью новых обозначений

$$\Gamma_k=\sqrt{1+\alpha^2\beta_k^2}\,,\quad \cos\psi_k=\Gamma_k^{-1}\,,\quad \sin\psi_k=\alpha\beta_k\Gamma_k^{-1}\,,\quad tg\psi_k=\alpha\beta_k\,,\quad k=1,2 \tag{2.6}$$

система (2.5) приводится к простому виду

$$\Gamma_1^\lambda A_1\sin\lambda\psi_1+\Gamma_2^\lambda A_3\sin\lambda\psi_2=0\,, \tag{2.7}$$

$$\Gamma_1^\lambda A_1\cos\lambda\psi_1-\Gamma_2^\lambda A_3\cos\lambda\psi_2=0\,.$$

Равенство нулю детерминанта системы (2.7) приводит к уравнению, определяющему параметр λ,

$$\sin\lambda(\psi_1+\psi_2)=0\,,\ \lambda_n=\pi n/(\psi_1+\psi_2)\,,\ n=1,2,\ldots\,. \tag{2.8}$$

При отсутствии пьезоэффекта концентрация напряженности в окрестности угловой точки появляется при $\varphi>\pi$ $(\lambda_1<1)$ [5]. Из равенства $tg\psi_k=\alpha\beta_k$ (2.6) при $\varphi=0.5\pi$ $(\alpha\to\infty)$ следует, что $\psi_1=\psi_2=0.5\pi$, откуда $\lambda_1=1$, т. е. наличие пьезоэффекта приводит к появлению концентрации напряжений при $\varphi>0.5\pi$.

В табл. 1 приводится численный пример для клина с угловым раствором $\varphi=3\pi/4$, в зависимости от коэффициента электромеханической связи χ. Приведенные в таблице значения степени особенности λ_1 приближенно соответствуют степени особенности напряженности электрического поля при отсутствии пьезоэффекта.

Таблица 1

χ	0.2	0.4	0.6
λ_1	0.667	0.668	0.670

Таким образом, для рассматриваемой задачи концентрация упругих напряжений появляется вследствие концентрации напряженности электрического поля.

Для сравнения рассматривается задача, когда на грани клина $y = 0$ $(\varphi = 0)$ вместо (2.2) даются условия

$$\partial w/\partial y = 0 \,, \quad \varphi = 0 \,. \tag{2.9}$$

Аналогичным образом нетрудно получить, что вместо уравнений относительно произвольных постоянных (2.7) имеют место следующие уравнения:

$$\begin{gathered} \Gamma_1^{\lambda} A_1 \cos\lambda\psi_1 + \Gamma_2^{\lambda} A_3 \cos\lambda\psi_2 = 0 \,, \\ \Gamma_1^{\lambda} A_1 \sin\lambda\psi_1 - \Gamma_2^{\lambda} A_3 \sin\lambda\psi_2 = 0 \,. \end{gathered} \tag{2.10}$$

Отсюда следует, что уравнение, определяющее λ, будет совпадать с уравнением (2.8). Однако в отличие от предыдущей задачи особенность напряженности электрического поля появляется вследствие концентрации упругих напряжений.

Наконец, рассмотрим случай, когда на обеих гранях клина заданы условия

$$w = 0 \,, \quad \varphi = 0 \,. \tag{2.11}$$

В этом случае уравнение, определяющее степень концентрации λ, приводится к виду

$$\cos\lambda(\psi_1 + \psi_2) = \frac{\Gamma_1^{2\lambda} + \Gamma_2^{2\lambda}}{2\Gamma_1^{\lambda}\Gamma_2^{\lambda}} \,. \tag{2.12}$$

При неучете пьезоэффекта правая часть уравнения (2.12) равна единице и получаются отдельные решения для упругого клина и электрического потенциала. При учете пьезоэффекта правая часть больше единицы и уравнение (2.12) не имеет действительных корней.

Институт механики НАН РА

Р. К. Алексанян, В. М. Белубекян, М. В. Белубекян

Особенности в угловых точках упругого клина из пьезоэлектрического материала кубической симметрии

Приводится решение антиплоской задачи для пьезоупругого клина из кубически анизотропного материала 23. Установлено, что пьезоэффект может привести к появлению концентрации упругих напряжений в случае, когда без пьезоэф-

фекта она отсутствует, и, наоборот, к появлению концентрации напряженности электрического поля.

Ռ. Կ. Ալեքսանյան, Վ. Մ. Բելուբեկյան, Մ. Վ. Բելուբեկյան

Խորանարդ համաչափությամբ անիզոտրոպ նյութից պիեզոէլեկտրիկ սեպի անկյունային կետում եզակիությունները

Ստացված է 23 դասի խորանարդային անիզոտրոպ նյութից պատրաստված պիեզոառաձգական սեպի հակահարթ խնդրի լուծումը: Հաստատված է, որ պիեզո-էֆեկտը կարող է բերի առաձգական լարումների կենտրոնացմանը այն դեպքում, երբ առանց պիեզոէֆեկտի լարումների կենտրոնացումը բացակայում է և հակառակը՝ առաջացնի էլեկտրական դաշտի լարվածության կենտրոնացում:

R. K. Aleksanyan, V. M. Belubekyan, M. V. Belubekyan

Singularities in the Corner Points of the Elastic Wedge from the Piezoelectric Material of the Cubic Symmetry

The solution of the antiplane problem for the piezoelectric wedge from the anisotropic material of the 23 class is given. It is established that the piezoeffect can bring to the appearance of the stress concentration when it is absent without piezoeffect, and vice versa – to the appearance of the electric field concentration.

Литература

1. *Белубекян М. В., Галпчян П. В.* – Изв. РАН. МТТ. 1994. N 3. С.102-108.
2. *Galpchian P. V.* – Int. J. of Applied Electromagnetic and Mechanics. 1997. N8. P. 243-258.
3. *Аветисян А. Г., Нерсисян Г. Г., Саргсян А. М.* – Изв. НАН Армении. Механика. 2008. Т.61(2). С. 45-51.
4. *Саргсян А. М.* – Механика композитных материалов. 2015. Т. 51. № 2. С. 309–322.
5. *Алексанян Р. К.* – ДАН АрмССР. 1975. Т. 61. № 4. С. 219–224.
6. *Балакирев М. К., Гилинский И.А.* Волны в пьезокристаллах. Новосибирск. Наука. 1982. 239 с.
7. *Аветисян А. С.* – Изв. АН АрмССР. Механика. 1985. Т. 38(1). С. 13-18.