ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 116 2016 № 2

МЕХАНИКА

УДК 539.3

Р. М. Киракосян

Неклассическая задача изгиба упруго защемленной ортотропной круглой пластинки

(Представлено академиком Л. А. Агаловяном 14/III 2016)

Ключевые слова: *цилиндрическая ортотропия, круглая пластинка, упругое защемление, поперечный сдвиг, обжатие.*

В рамках уточненной теории С. Амбарцумяна [1] рассматривается осесимметричная задача изгиба упруго защемленной ортотропной круглой пластинки под действием равномерно распределенной нагрузки при учете влияний поперечного сдвига и обжатия. На основе полученных безразмерных расчетных величин пластинки делаются качественные заключения.

1. В правой системе цилиндрических координат r,θ,z рассмотрим ортотропную круглую пластинку радиуса R и толщины h. Координатная плоскость совпадает со срединной плоскостью пластинки, а главные направления анизотропии материала параллельны координатным линиям. Край пластинки $r=R$ некоторой малой длиной $2a$ вставлен в упругий массив, образуя упруго защемленную опору ([2-4] и др.). Условия этой опоры имеют вид [5, 6]:

$$\left.\frac{dw}{dr}\right|_{r=R}=D\left(aN_r+M_r\right),\ \ w\big|_{r=R}=-\left(a\frac{dw}{dr}+BN_r\right). \tag{1.1}$$

Здесь w – прогиб, N_r – поперечная сила, M_r – изгибающий момент пластинки, постоянные D и B – параметры, являющиеся обратными величинами жесткостей упруго защемленной опоры на вращение и поступательное вертикальное смещение соответственно. Когда торец вставленной части не контактирует с упругим массивом, между параметрами D и B существует соотношение [5]

$$\frac{D}{B}=\frac{3}{a^2}. \tag{1.2}$$

На пластинку действует равномерно распределенная нагрузка интенсивности q.

Рассмотрим задачу изгиба пластинки при учете влияний поперечного сдвига и обжатия. Общее решение в рамках уточненной теории Амбарцумяна имеет вид ([1], с. 178):

$$w = c_1 + c_2 r^{1+n} + b_1 r^2 + b_2 r^4 ,$$

$$N_r = -\frac{qr}{2}, \ \left(\varphi = -\frac{6qr}{h^3}\right), \ \frac{D_\theta}{D_r} = n^2 \ ,$$

$$M_r = -D_r \frac{d^2 w}{dr^2} - D_r \nu_\theta \frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \frac{h^2}{10} D_r a_r \left(\frac{d\varphi}{dr} + \nu_\theta \frac{\varphi}{r}\right) - \frac{h^2}{10} A_1 q ,$$

$$M_\theta = -D_\theta \frac{1}{r}\frac{dw}{dr} - D_\theta \nu_r \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{h^2}{10} D_\theta a_r \left(\frac{\varphi}{r} + \nu_r \frac{d\varphi}{dr}\right) - \frac{h^2}{10} A_2 q , \qquad (1.3)$$

$$b_1 = \frac{qh^2}{20\left(1-n^2\right)}\left[\frac{6a_r\left(n^2-1\right)}{h^3} + \frac{A_2 - A_1}{D_r}\right], \ b_2 = \frac{q}{8\left(9-n^2\right)D_r} \ .$$

Здесь приняты общеизвестные обозначения цилиндрически ортотропного упругого тела ([1], с. 72, 73, 177). Постоянные A_1 и A_2 учитывают влияние обжатия, а постоянные c_1 и c_2 должны определяться из краевых условий упругого защемления (1.1).

Примем обезразмеривающие обозначения:

$$w = h\bar{w}, \ \ h = mR, \ \ r = \rho R, \ \ a = sh, \ \ B_r a_r = \chi, \ \ q = B_r \bar{q}, \ \ c_1 = h\bar{c}_1, \ c_2 = R^{-n}\bar{c}_2,$$

$$N_r = B_r h^2 \bar{N}_r, \ M_r = B_r h^2 \bar{M}_r, \quad M_\theta = B_r h^2 \bar{M}_\theta, \quad b_1 = \frac{\bar{b}_1}{h}, \ \ b_2 = \frac{\bar{b}_2}{h^3}, \qquad (1.4)$$

$$D = \frac{\alpha h}{D_r}, \qquad \left(\frac{D}{B} = \frac{3}{a^2}, \Rightarrow B = \frac{\alpha s^2 h^3}{3D_r}\right).$$

С учетом этих обозначений из (1.3) получим:

$$w_1 = \bar{c}_1 + \frac{\bar{c}_2}{m}\rho^{1+n} + \frac{\bar{b}_1}{m^2}\rho^2 + \frac{\bar{b}_2}{m^4}\rho^4, \quad \bar{N}_r = -\frac{\bar{q}\rho}{2m}$$

$$\bar{b}_1 = \frac{3\bar{q}}{10\left(1-n^2\right)}\left[\chi\left(n^2-1\right) + 2\left(A_2 - A_1\right)\right], \quad \bar{b}_2 = \frac{3\bar{q}}{2\left(9-n^2\right)}$$

$$\begin{aligned}\bar{M}_r = -\frac{1}{60m^2}\Big[&5m^3(1+n)(n+\nu_\theta)\bar{c}_2\rho^{n-1} + 10\bar{b}_1(1+\nu_\theta)m^2 + \\ &+ 20\bar{b}_2(3+\nu_\theta)\rho^2 + 3\chi(1+\nu_\theta)m^2\bar{q} + 6A_1 m^2 \bar{q}\Big]\end{aligned} \qquad (1.5)$$

$$\begin{aligned}\bar{M}_\theta = -\frac{n^2}{60m^2}\Big[&5m^3(1+n)(1+n\nu_r)\bar{c}_2\rho^{n-1} + 10\bar{b}_1(1+\nu_r)m^2 + \\ &+ 20\bar{b}_2(1+3\nu_r)\rho^2 + 3\chi(1+\nu_r)m^2\bar{q} + \frac{6A_2 m^2 \bar{q}}{n^2}\Big]\end{aligned}$$

Удовлетворив условиям упругого защемления (1.1) и имея в виду (1.5), для безразмерных постоянных интегрирования получим:

$$\bar{c}_2 = -\frac{1}{5m^3(1+n)\left[1+\alpha m(n+\nu_\theta)\right]}\left\{10\bar{b}_1 m^2\left[1+\alpha m(1+\nu_\theta)\right]+\right.$$
$$\left. +20\bar{b}_2\left[1+\alpha m(3+\nu_\theta)\right]+3\alpha m^2\bar{q}\left[10s+\chi m(1+\nu_\theta)+2A_1 m\right]\right\} \qquad (1.6)$$

$$\bar{c}_1 = -\frac{1}{m^4}\left\{m^3\left[1+sm(1+n)\right]\bar{c}_2+\bar{b}_1 m^2(1+2sm)+\bar{b}_2(1+4sm)-2\alpha s^2 m^3\bar{q}\right\}.$$

2. Рассмотрим численный пример. Пользуясь линейностью задачи, положим $\bar{q}=1$. В каждом конкретном случае, умножив решение на действительное значение $\bar{q}$, получим истинные безразмерные значения расчетных величин пластинки.

Пусть

$$n=\sqrt{2}\,(E_\theta = 2E_r), \quad E_z=\frac{2}{3}E_r, \quad m=0.25, \quad s=0.5,$$
$$\nu_r = 0.15(\nu_r=\nu_{\theta r}), \quad \nu_{zr}=0.4, \quad \nu_{\theta z}=0.2. \qquad (2.1)$$

Пользуясь условиями симметрии упругих свойств цилиндрически ортотропного тела ([1], с. 23), для постоянных A_1 и A_2 в случае (2.1) получим

$$A_1=-0.5131, \quad A_2=-0.7539. \qquad (2.2)$$

Рассмотрим следующие частные случаи:

1. $\chi=A_1=A_2=0$ (пренебрегаются влияния поперечнего сдвига и обжатия);
2. $\chi=10,\ A_1=-0.5131,\ A_2=-0.75390$ (учитываются эти влияния одномерно);
3. $\chi=10,\ A_1=A_2=0$ (учитываются только влияния поперечнего сдвига);
4. $\chi=0,\ A_1=-0.5131,\ A_2=-0.75390$ (учитываются только влияния обжатия).

Случаи		$\bar{w}$			$\bar{M}_r$			$\bar{M}_\theta$		
		ρ			ρ			ρ		
		0	0.5	1	0	0.5	1	0	0.5	1
α=0.1	1	43.22	28.59	1.818	0	0.614	-1.697	0	1.373	-0.38
	2	53.03	33.79	2.276	0.02	0.046	-2.46	0.02	0.562	-1.468
	3	53.58	34.10	2.311	0	-0.003	-2.519	0	0.501	-1.543
	4	42.67	28.28	1.723	0.02	0.663	-1.638	0.02	1.434	-0.305
α=1	1	88.99	68.02	13.81	0	1.160	-0.969	0	2.146	0.649
	2	111.2	83.88	17.15	0.02	0.747	-1.526	0.02	1.554	-0.147
	3	112.8	85.01	17.41	0	0.710	-1.569	0	1.509	-0.199
	4	87.48	66.89	13.56	0.02	1.198	-0.926	0.02	2.190	0.702
α=10	1	193.8	160.3	51.93	0	2.238	0.468	0	3.671	2.681
	2	240.6	197.2	60.96	0.02	2.131	0.317	0.02	3.510	2.460
	3	244.0	199.9	61.66	0	2.117	0.306	0	3.499	2.452
	4	190.4	157.5	51.23	0.02	2.252	0.479	0.02	3.682	2.689

В приведенной таблице представлены значения безразмерных расчетных величин пластинки для вышеотмеченных четырех случаев при некоторых значениях координаты ρ и параметра упруго защемленной опоры α. Данные таблицы приводят к следующим заключениям.

1. При возрастании параметра α жесткость упруго защемленной опоры уменьшается, в силу чего прогибы пластинки увеличиваются.

2. Начиная с некоторого большого значения α изгибающие моменты на краю пластинки $\rho = 1$ становятся положительными. Это является следствием уменьшения второй производной и увеличения абсолютного значения первой производной прогиба.

3. При учете обжатия изгибающие моменты в центре пластинки $\rho = 0$ принимают одинаковые положительные значения.

4. Как и следовало ожидать, учет поперечного сдвига приводит к заметному увеличению прогиба.

5. Учет же обжатия, наоборот, приводит к незначительному уменьшению прогиба.

Институт механики НАН РА

Р. М. Киракосян

Неклассическая задача изгиба упруго защемленой ортотропной круглой пластинки

Рассматривается задача изгиба упруго защемленной ортотропной круглой пластинки под действием равномерно распределенной нагрузки при учете влияний поперечного сдвига и обжатия. На основе полученных безразмерных расчетных величин пластинки делаются качественные заключения.

Ռ. Մ. Կիրակոսյան

Առաձգական ամրակցված օրթոտրոպ կլոր սալի ծռման ոչ դասական խնդիրը

Դիտարկվում է առաձգական ամրակցված օրթոտրոպ կլոր սալի ծռման խնդիրը, հավասարաչափ բաշխված բեռի ազդեցության դեպքում՝ ընդլայնական սահքի և սեղմման ազդեցությունների հաշվառմամբ: Սալի հաշվային անչափ մեծությունների ստացած արժեքների հիման վրա արվում են որակական եզրակացություններ:

R. M. Kirakosyan

The Non-Classical Problem of a Bend of an Elastically Fastened Orthotropic Round Plate

The problem of bend of an elastically fastened orthotropic round plate under the action of uniformly distributed load is considered, taking into account the influence of the cross section shear and compression. On the basis of the calculated values of the dimensionless plate the qualitative conclusions are made.

Литература

1. *Амбарцумян С. А*. Теория анизотропных пластин. М. Наука. 1987. 360 с.
2. *Киракосян Р. М.* - ДНАН РА. 2014. Т. 114. №2. С.101-107.
3. *Киракосян Р. М.*, *Степанян С. П.* - ДНАН РА. 2014. Т. 114. №3. С. 205-212.
4. *Киракосян Р. М.*, *Степанян С. П.* - ДНАН РА. 2014. Т. 114, №4. С. 309-315.
5. *Киракосян Р.М.* В кн.: Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Тр. VIII междунар. конф., сентябрь 22-26. 2014. Горис – Степанакерт. 2014. С. 261-265.
6. *Киракосян Р. М.* - ДНАН РА. 2015. Т. 115. №4. С. 284-289.