ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 116 2016 № 2

МАТЕМАТИКА

УДК 517.984.46

П. Э. Мелик-Адамян

О симметрических операторах с вещественной точкой регулярного типа

(Представлено академиком Н. У. Аракеляном 19/II 2016)

Ключевые слова: *симметрический оператор, точка регулярного типа, масштабное подпространство, характеристическая функция, спектр.*

1. Пусть $\mathfrak{H}$ – гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ и T – простой замкнутый симметрический оператор с областью определения $\mathscr{D}(\mathsf{T})$, плотной в $\mathfrak{H}$, так что определен и сопряженный оператор T^* с областью $\mathscr{D}(\mathsf{T}^*)\supset\mathscr{D}(\mathsf{T})$. Пространство линейных ограниченных операторов, действующих из $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$ обозначим $[\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2]$. Открытые верхнюю, нижнюю полуплоскости комплексной плоскости C обозначим C^+, C^-. $\mathscr{K}(\cdot)$ и $\mathscr{R}(\cdot)$ означают ядро и образ оператора.

Далее всюду некоторое $\gamma\in C^+$ будет фиксированным. Пусть $\mathfrak{N}_\gamma$, $\mathfrak{N}_{\bar\gamma}$ – дефектные подпространства оператора T и $dim\,\mathfrak{N}_\gamma = dim\,\mathfrak{N}_{\bar\gamma} = \mathsf{n}\le\infty$. Приведем необходимые определения и факты.

Разложение линейного многообразия $\mathscr{D}(\mathsf{T}^*)$ в прямую сумму

$$\mathscr{D}(\mathsf{T}^*) = \mathscr{D}(\mathsf{T}) \dotplus \mathfrak{N}_\gamma \dotplus \mathfrak{N}_{\bar\gamma}$$

определяет косые проекторы P_γ, $\mathsf{P}_{\bar\gamma}$ в $\mathscr{D}(\mathsf{T}^*)$ на подпространства $\mathfrak{N}_\gamma$, $\mathfrak{N}_{\bar\gamma}$ параллельно $\mathscr{D}(\mathsf{T}) \dotplus \mathfrak{N}_{\bar\gamma}$, $\mathscr{D}(\mathsf{T}) \dotplus \mathfrak{N}_\gamma$, и следующие сужения оператора T^*

$$\mathsf{T}_\gamma = \mathsf{T}^*\big|\,[\,\mathscr{D}(\mathsf{T}_\gamma) = \mathscr{K}(\mathsf{P}_{\bar\gamma})\,] \text{ и } \mathsf{T}_{\bar\gamma} = \mathsf{T}^*\big|\,[\,\mathscr{D}(\mathsf{T}) = \mathscr{K}(\mathsf{P}_\gamma)] \qquad (1)$$

являются максимальными диссипативным ($Im\,\langle\mathsf{T}_\gamma\,\mathsf{f},\mathsf{f}\rangle\ge 0$, $\mathsf{f}\in\mathscr{D}(\mathsf{T}_\gamma)$) и аккумулятивным ($Im\,\langle\mathsf{T}_{\bar\gamma}\,\mathsf{f},\mathsf{f}\rangle\le 0$, $\mathsf{f}\in\mathscr{D}(\mathsf{T}_{\bar\gamma})$) расширениями оператора T. Операторы $(\mathsf{T}_\gamma-\zeta\mathrm{I})^{-1}$, $\zeta\in C^-$; $(\mathsf{T}_{\bar\gamma}-\lambda\mathrm{I})^{-1}$, $\lambda\in C^+$ существуют, определены всюду на $\mathfrak{H}$ и ограниченны (см. [2, XXII, 4.]) .

Образ $\mathscr{R}(\mathsf{T}-\sigma\mathrm{I})$ является подпространством для любого $\sigma\in C$, $Im\,\sigma\neq 0$, и в работе [7] доказано, что прямые разложения

$$\mathfrak{H} = \mathscr{R}(T - \lambda I) \dotplus \mathfrak{N}_{\bar\gamma},\ \lambda \in C^+;\ \ \mathfrak{H} = \mathscr{R}(T - \zeta I) \dotplus \mathfrak{N}_{\gamma},\ \zeta \in C^-, \quad (2)$$

определяют аналитические в C^+, C^- операторные функции $P_{\bar\gamma}(\lambda)$, $P_\gamma(\zeta)$, значениями которых являются проекторы в $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}_{\bar\gamma}$, $\mathfrak{N}_\gamma$ параллельно $\mathscr{R}(T - \lambda I)$, $\mathscr{R}(T - \zeta I)$. Если существуют комплексные числа $\lambda_0 \in C^+$, $\zeta_0 \in C^-$ и подпространство $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{H}$ размерности n такие, что

$$\mathfrak{H} = \mathscr{R}(T - \lambda_0 I) \dotplus \mathfrak{M},\ \ \mathfrak{H} = \mathscr{R}(T - \zeta_0 I) \dotplus \mathfrak{M}, \quad (3)$$

то они называются $\mathfrak{M}$-регулярными (регулярными) точками оператора T, а подпространство $\mathfrak{M}$ – его масштабным подпространством. Множество $\Lambda(T) \subseteq C$ регулярных точек оператора T является открытым (см. [4], [1, App.1], [3]). Ниже всюду полагается, что переменные λ, ζ принадлежат C^+, C^- соответственно и, если не оговорено противное, $n = \infty$.

2. Пусть оператор T имеет по крайней мере одну вещественную точку регулярного типа. Не ограничивая общности, такой можно полагать точку 0, то есть рассмотрим случай, когда оператор T имеет обратный T^{-1} с областью определения $\mathscr{D}(T^{-1})=\mathscr{R}(T)$, $\mathscr{R}(T^{-1})=\mathscr{D}(T)$ и $\|T^{-1}\| < \infty$. Обозначим $\tau = \|T^{-1}\|^{-1}$.

Область определения оператора T^{-1} является подпространством и в ортогональном разложении

$$\mathfrak{H} = \mathscr{R}(T) \dotplus \mathscr{K}(T^*) \quad (4)$$

имеем $\dim \mathscr{K}(T^*) = n$.

Теорема 1. *Пусть точка* 0 *является точкой регулярного типа для симметрического оператора* T *с равными дефектными числами. Тогда подпространство* $\mathscr{K}(T^*)$ *является масштабным для* T *таким, что*

$$\mathfrak{H} = \mathscr{R}(T - \sigma I) \oplus \mathscr{K}(T^*),\ \ |\sigma| < \tau. \quad (5)$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$\mathscr{R}(T - \sigma I) \cap \mathscr{K}(T^*) = \{0\} \quad (6)$$

для всех невещественных σ. Действительно, если $(T - \sigma I)f_0 = h_0$, $f_0 \in \mathscr{D}(T)$, $h_0 \in \mathscr{K}(T^*)$, то

$$\langle (T - \sigma I) f_0, Tf_0 \rangle = \langle h_0, Tf_0 \rangle = \langle T^* h_0, f_0 \rangle = 0,$$

и $\|Tf_0\|^2 = \sigma \langle Tf_0, f_0 \rangle$, что является противоречием, поскольку $Tf_0 \neq 0$. Для произвольного вектора $h \in \mathfrak{H}$ из формулы (4) имеем $h = g_0 + h_0 = Tf_0 + h_0$.

Определим расширение S оператора T^{-1} на $\mathfrak{H}$ по правилу $Sh = T^{-1}g_0 = f_0$, $\mathscr{K}(S) = \mathscr{K}(T^*)$. Очевидно $\|S\| = \|T^{-1}\|$, следовательно для $|\sigma| < \tau$ оператор $I - \sigma S$ ограниченно обратим и $\mathscr{D}((I - \sigma S)^{-1}) = \mathfrak{H}$. Для всякого λ, $|\lambda| < \tau$ и произвольного $h \in \mathfrak{H}$, не принадлежащего $\mathscr{R}(T - \lambda I)$, из формулы (2) имеем

$$h = (T - \lambda I)f_0 + f_{\bar\gamma},\ f_{\bar\gamma} \in \mathfrak{N}_{\bar\gamma},\ f_{\bar\gamma} \neq 0. \quad (7)$$

Тогда ненулевой вектор $h' = (I - \lambda S)^{-1} f_{\bar\gamma}$ таков, что

$$f_{\bar\gamma} = (I - \lambda S)h' = (I - \lambda S)(g' + h'_0) = g' - \lambda S g' + h'_0 .$$

Поскольку $g' = Tf'_0$, $Sg' = f'_0$, то формула (7) запишется как

$$h = (T - \lambda I)f_0 + (T - \lambda I) f'_0 + h'_0 = (T - \lambda I)(f_0 + f'_0) + h'_0,$$

доказывая формулу (5) для $\lambda \in C^+$. Для $\zeta \in C^-$, $|\zeta| < \tau$ доказательство аналогично. Из обратимости оператора $T - \mu I$ для вещественных $\mu \in (-\tau, \tau)$ следует замкнутость $\mathscr{R}(T - \mu I)$, значит справедливо и ортогональное разложение

$$\mathfrak{H} = \mathscr{R}(T - \mu I) \oplus \mathscr{K}(T^* - \mu I),$$

так что для произвольного $h \in \mathfrak{H}$ имеем $h = (T - \mu I) f_0 + h_\mu$, $h_\mu \in \mathscr{K}(T^* - \mu I)$. Как и выше, из $(I - \mu S)^{-1} h_\mu = Tf'_0 + h_0$, $h_0 \in \mathscr{K}(T^*)$ следует, что $h = (T - \mu I)(f_0 + f'_0) + h_0$.

Теорема доказана.

Отметим связь этой теоремы со следующим результатом. Симметрический оператор T называется целым, если существует масштабное подпространство $\mathfrak{M}$ такое, что разложение (3) справедливо для всех $\sigma \in C$ (см. [4], [1, App.1]).

В работе [8] доказано, что оператор T является целым тогда и только тогда, когда точка 0 является его точкой регулярного типа и оператор T^{-1} имеет квазинильпотентное расширение S такое, что $\mathscr{D}(S) = \mathfrak{H}$, $\mathscr{R}(S) = \mathscr{D}(T)$, при этом $\mathfrak{M} = \mathscr{K}(S)$.

Замечание 1. *В случае* $\dim \mathscr{K}(T^*) = n < \infty$ *из формулы* (6) *уже следует разложение* (5) *для* $\sigma \in C^+ \cup C^-$, *так как из* (2) *имеем* $\operatorname{codim} \mathscr{R}(T - \sigma I) = n$, *следовательно формула* (5) *верна и для* $\sigma \in C^+ \cup C^- \cup (-\tau, \tau)$.

Обозначим

$$\mathfrak{N}_0 = \mathscr{K}(T^*),\ D^+(\tau) = \{\lambda \in C^+, |\lambda| < \tau\};\ D^-(\tau) = \{\zeta \in C^-, |\zeta| < \tau\}$$

и на областях $D^+(\tau)$, $D^-(\tau)$ рассмотрим операторные функции

$$Q(\lambda, \bar\gamma) = P_{\bar\gamma}(\lambda)\,|\,\mathfrak{N}_0 \in [\mathfrak{N}_0, \mathfrak{N}_{\bar\gamma}],\quad Q(\zeta, \gamma) = P_\gamma(\zeta)\,|\,\mathfrak{N}_0 \in [\mathfrak{N}_0, \mathfrak{N}_\gamma].$$

Следствие 1. *Значения операторных функций* $Q(\lambda, \bar\gamma)$, $Q(\zeta, \gamma)$ *ограниченно обратимы.*

Действительно, на области $D^+(\tau)$ разложения (2) и (3) справедливы одновременно, так что для произвольных $h_0 \in \mathfrak{N}_0$ и $f_{\bar\gamma} \in \mathfrak{N}_\gamma$ имеем

$$h_0 = (T - \lambda I)f_0 + f'_{\bar\gamma},\ f'_{\bar\gamma} \neq 0;\quad f_{\bar\gamma} = (T - \lambda I)f'_0 + h'_0,\ h'_0 \neq 0.$$

Из первого следует $P_{\bar\gamma}(\lambda)h_0 = f'_{\bar\gamma} \neq 0$, то есть обратимость $Q(\lambda, \bar\gamma)$, а из второго имеем $f_{\bar\gamma} = P_{\bar\gamma}(\lambda)\, h'_0$, то есть образ обратного оператора совпадает с $\mathfrak{N}_{\bar\gamma}$.

Случай оператора $Q(\zeta, \gamma)$ аналогичен.

Теперь произвольной паре $(\lambda \in D^+(\tau), \zeta \in D^-(\tau))$ соотнесем ограниченно обратимый оператор $W(\gamma, \gamma) = Q(\lambda, \gamma)Q^{-1}(\zeta, \gamma) \in [\mathfrak{N}_\gamma, \mathfrak{N}_{\bar\gamma}]$. Тогда оператор

$$V(\bar\gamma, \gamma) = W(\bar\gamma, \gamma)\,[\,\underline{W}(\bar\gamma, \gamma)\, W(\bar\gamma, \gamma)\,]^{-1/2} \in [\mathfrak{N}_\gamma, \mathfrak{N}_{\bar\gamma}]$$

в полярным представлением $W(\gamma, \gamma)$ является изометрией.

Согласно теории расширений фон Неймана, изометрический оператор $V(\gamma, \gamma) \in [\mathfrak{N}_\gamma, \mathfrak{N}_{\bar\gamma}]$ задает самосопряженное расширение симметрического оператора T, следовательно при условиях теоремы 1 оператор T определяет некоторое семейство своих самосопряженных расширений, отвечающих всевозможными парами $(\lambda\in D^{+}(\tau)\,,\ \zeta\in D^{-}(\tau))$.

3. А. В. Штраусом в [7] введено понятие характеристической функции (х. ф.) симметрического оператора T с равными дефектными числами как аналитической в C^{+} сжимающей операторной функции

$$\Theta(\lambda) = (T_{\lambda} - \gamma I)(T_{\lambda} - \bar{\gamma} I)^{-1} \big| \mathfrak{N}_{\gamma} \in [\mathfrak{N}_{\gamma}, \mathfrak{N}_{\bar{\gamma}}],$$

где максимальные диссипативные расширения T_{λ} определены аналогично (1), и доказано, что

$$\Theta(\lambda) = (\lambda - \gamma)(\lambda - \bar{\gamma})^{-1} P_{\bar{\gamma}}(\lambda) \big| \mathfrak{N}_{\gamma}. \tag{8}$$

В работе [5] показано, что х.ф. оператора T_{γ} в определении Надя – Фойаша [6, IX, 4] совпадает с функцией

$$\Theta_{\gamma}(\lambda) = \Theta(\bar{\gamma}, \lambda)\Theta^{-1}(\gamma, \lambda)\,;\ \ \Theta(\bar{\gamma}, \lambda) = P_{\bar{\gamma}} \big| \mathfrak{N}_{\lambda},\ \ \Theta(\gamma, \lambda) = P_{\gamma} \big| \mathfrak{N}_{\lambda} \tag{9}$$

и отличается от х.ф. Штрауса лишь знаком $\Theta_{\gamma}(\lambda) = -\,\Theta(\lambda)$.

Связь спектра оператора с ее х.ф. установлена в [6, VI, 4].

Ясно, что γ и $\mathfrak{N}_{\gamma}$ являются собственными значением и подпространством оператора T_{γ} соответственно, и в следующей теореме полагается $\lambda \neq \gamma$, если $\gamma \in D^{+}(\tau)$.

Теорема 2. *Пусть оператор* T *удовлетворяет условиям теоремы* 1. *Тогда* $\dim \mathscr{K}(\Theta_{\gamma}(\lambda)) \leq 1$ *для всех* $\lambda \in D^{+}(\tau)$ *и* λ *является собственным значением оператора* T_{γ} *тогда и только тогда, когда* $\dim \mathscr{K}(\Theta_{\gamma}(\lambda)) = 1$. *Замыкание полукруга* $D^{+}(\tau)$ *принадлежит спектру оператора* T_{γ}.

Доказательство. Из определений функций $P_{\bar{\gamma}}(\lambda)$ и $\Theta(\gamma, \lambda)$ имеем

$$\mathscr{K}(P_{\bar{\gamma}}(\lambda) \big| \mathfrak{N}_{\gamma}) = \mathscr{R}(T - \lambda I) \cap \mathfrak{N}_{\gamma},\ \ \mathscr{K}(\Theta(\gamma, \lambda)) = \mathscr{D}(T_{\gamma}) \cap \mathfrak{N}_{\lambda}.$$

Очевидно, число λ является собственным значением оператора T_{γ} тогда и только тогда, когда $\mathscr{K}(\Theta(\gamma, \lambda)) \neq \{0\}$, то есть вектор $f_0 + f_{\gamma} \in \mathscr{D}(T_{\gamma})$ таков, что $f_0 + f_{\gamma} = f_{\lambda}$. Отсюда имеем $T_{\gamma}(f_0 + f_{\gamma}) = Tf_0 + \gamma f_{\gamma} = \lambda (f_0 + f_{\gamma})$, $(T - \lambda I)f_0 = (\lambda - \gamma) f_{\gamma}$, значит и $\mathscr{R}(T - \lambda I) \cap \mathfrak{N}_{\gamma} \neq \{0\}$.

Обратно, если $\mathscr{R}(T - \lambda I) \cap \mathfrak{N}_{\gamma} \neq \{0\}$, то есть $(T - \lambda I)g_0 = g_{\gamma}$, тогда $g_0 - (\gamma - \lambda)^{-1} g_{\gamma} \in \mathscr{D}(T_{\gamma})$ и $(T_{\gamma} - \lambda I)\,[\,g_0 - (\gamma - \lambda)^{-1} g_{\gamma}] = 0$.

Пусть $P_{\bar{\gamma}}(\lambda)f_{\gamma} = 0$ и векторы f_{γ}, g_{γ} линейно независимы. Тогда $g_{\gamma} = f_{\gamma} + h_0$, $h_0 \in \mathscr{K}(T^{*})$ и, в силу следствия 1, имеем $P_{\bar{\gamma}}(\lambda) g_{\gamma} \neq 0$, значит $\dim \mathscr{K}(\Theta_{\gamma}(\lambda)) = \dim \mathscr{K}(\Theta(\gamma, \lambda)) = 1$.

Если $\dim \mathscr{K}(\Theta_{\gamma}(\lambda)) = 0$, то есть λ не является собственным значением оператора T_{γ}, то оператор $T_{\gamma} - \lambda I$ обратим и $\mathscr{R}(T - \lambda I) \cap \mathfrak{N}_{\gamma} = \{0\}$. Тогда

$$\mathscr{D}((T_{\gamma} - \lambda I)^{-1}) = \mathscr{R}(T_{\gamma} - \lambda I) = \mathscr{R}(T - \lambda I) \dotplus \mathfrak{N}_{\gamma}.$$

Покажем, что $\mathscr{R}(T_{\gamma} - \lambda I) \neq \mathfrak{H}$, то есть λ не принадлежит резольвентному множеству $\rho(T_{\gamma})$.

Допуская противное, для произвольного $h \in \mathfrak{H}$, не принадлежащего $\mathscr{R}(T - \lambda I)$, будем иметь как $h = (T - \lambda I)f_0 + f_{\gamma}$, так и, в силу (5), $h = (T - \lambda I)\, g_0 + h_0$, откуда будет следовать, что

$$(T - \lambda I)\,(\,g_0 - f_0) = f_{\gamma} - h_0 = g_{\gamma} \neq 0,$$

в противоречии с $\mathscr{R}(T - \lambda I) \cap \mathfrak{N}_{\gamma} = \{0\}$.

Таким образом $D^{+}(\tau)$ принадлежит спектру оператора T_{γ}, и замкнутость спектра доказывает теорему.

Институт механики НАН РА
maperch@gmail.com

П. Э. Мелик-Адамян

О симметрических операторах с вещественной точкой регулярного типа

Показано, что симметрический оператор с вещественной точкой регулярного типа определяет и некоторое семейство своих самосопряженных расширений. В множестве регулярности указана область, замыкание которой принадлежит спектру его максимального диссипативного расширения.

Պ. Է. Մելիք-Ադամյան

Իրական ռեգուլյար տիպի կետով սիմետրիկ օպերատորների մասին

Ցույց է տրված, որ իրական ռեգուլյար տիպի կետով սիմետրիկ օպերատորն է առաջացնում է նաև իր ինքնքնահամալուծ ընդլայնումների մի որոշ ընտանիք: Ռեգուլյարության բազմության մի տիրույթ է նշված, որի փակումը պատկանում է նրա մաքսիմալ դիսիպատիվ ընդլայնման սպեկտրին:

P. E. Melik-Adamyan

On Symmetric Operators with a Real Point of Regular Type

It is shown that a symmetric operator with a real point of regular type defines also some family of its self-adjoint extensions. In the set of a regularity the domain is specified, closure of which belongs to the spectrum of its maximal dissipative extension.

Литература

1. *Gorbachuk M.L., Gorbachuk V. I.* Krein's Lectures on Entire Operators. Birkhauser. Basel. 1997.
2. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Т. 2. М. Мир. 1966.
3. *Гохберг И.Ц., Маркус А.С.* – Изв. вузов. Матем. Т. 15 N. 2. 1960. С. 74-87.
4. *Крейн М. Г.* – Укр. матем. ж. 1949. 1:2. С. 3-66.
5. *Melik-Adamyan P.* – Armen. J. Math. V. 5. N2. 2013. P. 75-97.
6. *С.- Надь Б., Фойаш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М. Мир. 1966.
7. *Штраус А.В.* – Изв. АН СССР. Серия мат. 1968. Т. 32. N1. С. 186-207.
8. *Strauss A.V.* – O T: Adv. and Appl. V.123. Birkhauser. Basel. 2001. P. 469-484.