ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 116 2016 № 2

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

ՀՏԴ 514.112.6; 514.174.2

Ա. Հ. Առաքելյան

Սֆերաների կոնֆիգուրացիաները հաստատուն կորության տարածություններում

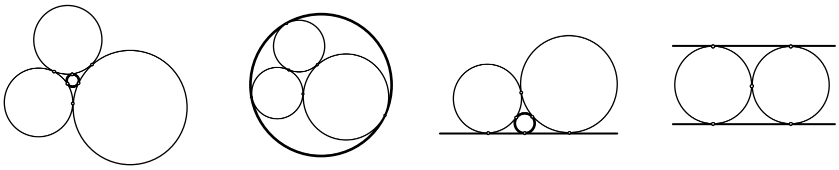
(Ներկայացված է ակադեմիկոս Վ. Ս. Զաքարյանի կողմից 18/IV 2016)

Առանցքային բառեր. *սֆերաների դեկարտյան կոնֆիգուրացիա, սֆերիկ և հիպերբոլական երկրաչափություն, կորություն:*

1. Ներածություն: Շրջանագծերի և սֆերաների հետ կապված խնդիրները մշտապես գրավել են երկրաչափների ուշադրությունը: Չնայած նրան, որ սֆերայի ուսումնասիրությունն արդեն իսկ բավական հետաքրքիր է, այնուամենայնիվ առաջ են գալիս բազմաթիվ ուշագրավ հնարավորություններ, երբ դիտարկվում են մի քանի սֆերաների՝ միմյանց նկատմամբ կոնֆիգուրացիաները: Այս կոնֆիգուրացիաների տեսությունն ակնհայտորեն սկիզբ է առնում Ապոլլոնիուսի, Պապի շրջանագծերի անվերջ շղթաների և միմյանց փոխադարձաբար շոշափող չորս շրջանագծերի՝ Դեկարտի դասական խնդիրներից [1,2]: Թվացյալ պարզ այս խնդիրներն իրականում էվկլիդեսյան երկրաչափության բավականին բարդ լուծում ունեցող խնդիրներից են: Մեծ թվով հեղինակներ՝ սկսած Պապ Ալեքսանդրացուց մինչև Յ. Շտայներ և Հ. Քոքստեր անդրադարձել են այս խնդիրների լուծմանը՝ առաջարկելով կիրառել ինչպես դասական, այնպես էլ ոչ դասական երկրաչափության մեթոդներ [3, 4]:

Ժամանակակից շրջանում դասական համարվող այս խնդիրները զարգացման նոր փուլ են մտել: Դրանց ընդհանրացումներն ու կիրառությունները երկրաչափության տարբեր բնագավառներում մի շարք արժեքավոր արդյունքների ստացման խթան են [5,6]: Հոդվածում ամփոփվում են միմյանց փոխադարձաբար շոշափող չորս շրջանագծերի՝ Դեկարտի դասական թեորեմի ընդհանրացումները բազմաչափ էվկլիդեսյան տարածությունում, կոմպլեքս հարթությունում, սֆերիկ և հիպերբոլական երկրաչափությունում [7,8]:

Սահմանում 1 (դեկարտյան կոնֆիգուրացիա): Միմյանց զույգ առ զույգ շոշափող $C_j, j=\overline{1,4}$ չորս շրջանագծերի դասավորությունը կանվանենք դեկարտյան կոնֆիգուրացիա (նկ.1), եթե դրանցից ցանկացած երեքը չունեն ընդհանուր շոշափում:



Նկ. 1. Միմյանց զույգ առ զույգ շոշափող չորս շրջանագծերի դեկարտյան կոնֆիգուրացիաներ:

1643 թ. Բոհեմիայի թագուհի Եղիսաբեթին ուղղված իր նամակում Ռ. Դեկարտը նշում է հետևյալ պնդմանը համարժեք մի առնչություն [1].

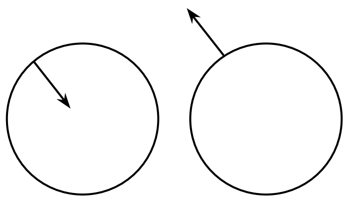
Թեորեմ 1 (Դեկարտի դասական թեորեմ): *Չորս միմյանց զույգ առ զույգ շոշափող շրջանագծերի դեկարտյան կոնֆիգուրացիաների համար ճիշտ է հետևյալ առնչությունը.*

$$\sum_{j=1}^{4} b_j^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{4} b_j\right)^2, \tag{1}$$

որտեղ $b_j = r_j^{-1}$ -ը C_j շրջանագծի կորությունն է:

Դեկարտը դիտարկում էր միայն նկ.1-ում բերված առաջին տիպի կոնֆիգուրացիան, սակայն նրա թեորեմի պնդումը ճիշտ է կոնֆիգուրացիաների բոլոր տիպերի դեպքում, եթե միայն շրջանագծերի կորությունների համար սահմանենք որոշակի նշաններ: Դեկարտի թեորեմն ընդհանրացնելու և հետագա շարադրանքն ավելի խիստ մաթեմատիկական հիմքի բերելու համար ներմուծենք կողմնորոշված շրջանագծի և կողմնորոշված դեկարտյան կոնֆիգուրացիայի գաղափարները:

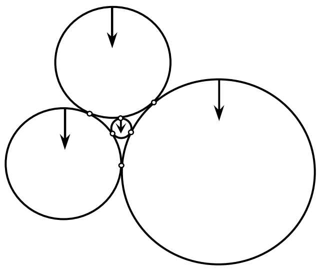
Սահմանում 2: *Շրջանագիծն իր միավորի նորմալ վեկտորի որոշված ուղղությամբ (դեպի ներս կամ դուրս) կոչվում է կողմնորոշված շրջանագիծ:*



Նկ. 2. Դեպի ներս և դուրս կողմնորոշումներ:

Սահմանում 3: *Դիցուք C -ն r շառավղով կողմնորոշված շրջանագիծ է: Կհամարենք, որ C -ն ունի $b = \dfrac{1}{r} > 0$ դրական կորություն, C -ն կողմնորոշված է դեպի ներս: Հակառակ դեպքում C ուղղորդված* *շրջանագիծը սահմանվում է* $b = -\frac{1}{r} < 0$ *բացասական կորությամբ և սահմանափակում է ընդհանրացված շրջան: Ուղիղն ընդունվում է որպես զրոյական կորությամբ շրջանագիծ:*

Սահմանում 3: Կողմնորոշված դեկարտյան կոնֆիգուրացիա կանվանենք այն դեկարտյան կոնֆիգուրացիան, որում շրջանագծերի կողմնորոշվածությունները համատեղելի են հետևյալ իմաստով. կամ բոլոր շրջանագծերի ներքին տիրույթները չեն հատվում, կամ ներքին տիրույթները չեն հատվում, եթե բոլոր շրջանագծերի կողմնորոշվածությունները հակուղղվեն:



Նկ. 3. Կողմնորոշված դեկարտյան կոնֆիգուրացիա:

2. Դեկարտի թեորեմի էվկլիդեսյան ընդհանրացումները: Միմյանց զույգ առ զույգ շոշափող չորս շրջանագծերի՝ Դեկարտի դասական թեորեմի ընդհանրացումները սկսենք նրա կոմպլեքս անալոգից:

Թեորեմ 2 (Դեկարտի կոմպլեքս թեորեմ): *Դիցուք տրված է կամայական* $C_1C_2C_3C_4$ *Դեկարտյան կոնֆիգուրացիա, որտեղ* i*-րդ շրջանագիծը՝* $i=\overline{1,4}$, *ունի* b_i *կորություն և* $z_i = x_i + iy_i$ *կենտրոն: Այդ դեպքում տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը.*

$$\sum_{i=1}^{4}\left(b_i z_i\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{4} b_i z_i\right)^2 : \qquad (2)$$

Դեկարտի թեորեմը ստանում է ավելի գեղեցիկ տեսք, երբ ներկայացվում է մատրիցների միջոցով: Դիտարկենք (1)-ի հիման վրա կառուցված

$$Q_2\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right) := x^T\mathbf{Q_2}x = \left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\right) - \frac{1}{2}\left(x_1+x_2+x_3+x_4\right)^2 \qquad (3)$$

Դեկարտի քառակուսային ձևը: Նշանակելով $\mathbf{1}_n$-ով $(1\times n)$-չափանի 1-երից բաղկացած մատրիցը՝ (3) քառակուսային ձևի գործակիցների $\mathbf{Q_2}$ մատրիցի համար կստանանք հետևյալ ներկայացումը.

$$\mathbf{Q_2} = I_4 - \frac{1}{2}\mathbf{1}_4\mathbf{1}_4^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

որտեղ $\mathbf{Q}$ -ի ինդեքսը ցույց է տալիս դիտարկվող տարածության չափը:

Ելնելով այս նշանակումներից՝ Դեկարտի (1) հավասարումն ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$$b^T\mathbf{Q_2}b = 0\,,$$

որտեղ $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)^T$ -ն դեկարտյան կոնֆիգուրացիայի շրջանագծերի կորությունների վեկտորն է: Համանմանորեն Դեկարտի կոմպլեքս թեորեմի (2) առնչությունը կարելի է ներկայացնել

$$c^T\mathbf{Q_2}c = 0 \tag{4}$$

մատրիցային տեսքով, որտեղ $c = (b_1z_1, b_2z_2, b_3z_3, b_4z_4)^T$ -ը կոնֆիգուրացիայի շրջանագծերի կենտրոնների և համապատասխան կորությունների արտադրյալների վեկտորն է:

Նկատենք, որ (4) առնչությունից հնարավոր չէ ստանալ այդ շրջանագծերի երկրաչափական դիրքերը: Հետևյալ թեորեմը տալիս է այդ հնարավորությունը:

Թեորեմ 3 (Դեկարտի ընդլայնված թեորեմ): *Դիցուք տրված է* C_i, $i = \overline{1,4}$ *,չորս կողմնորոշված շրջանագծերի դասավորություն, որտեղ* i *-րդ շրջանագիծն ունի* b_i *կորություն և* $O_i(x_i, y_i)$ *կենտրոն: Նշանակենք* M *-ով* 4×3 *չափի հետևյալ մատրիցը.*

$$\mathrm{M} := \begin{pmatrix} b_1 & b_1x_1 & b_1y_1 \\ b_2 & b_2x_2 & b_2y_2 \\ b_3 & b_3x_3 & b_3y_3 \\ b_4 & b_4x_4 & b_4y_4 \end{pmatrix}:$$

Տրված չորս շրջանագծերը կկազմեն կողմնորոշված դեկարտյան կոնֆիգուրացիա այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$\mathrm{M^TQ_2M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}: \tag{4'}$$

Ընդ որում ուղիղներ պարունակող դեկարտյան կոնֆիգուրացիաների համար գոյություն ունի M *մատրիցի այնպիսի սահմանում, որը պահպանում է* $(4')$ *առնչության ճշմարտացիությունը:*

Դիտողություն: Այս թեորեմից բխում է Դեկարտի կոմպլեքս թեորեմը, եթե այն կիրառենք $z = x + iy$ վեկտորի համար, որտեղ x-ը և y-ը M -ի երկրորդ և երրորդ սյուներն են:

Թեորեմ 3-ը կարելի է ընդհանրացնել n-չափանի տարածության համար: Վերջինիս նպատակով սահմանենք n-չափանի սֆերաների դեկարտյան կոնֆիգուրացիայի և կորություն-կենտրոնային կոորդինատային համակարգի գաղափարները:

Էվկլիդեսյան n-չափանի $\mathbb{R}^n$ տարածությունում կողմնորոշված դեկարտյան կոնֆիգուրացիան սահմանվում է որպես $n+2$ հատ միմյանց, զույգ առ զույգ, տարբեր կետերում շոշափող կողմնորոշված $(n-1)$-սֆերաների դասավորություն, որտեղ սֆերաների կողմնորոշվածությունները համադրելի են այն իմաստով, որ բոլոր սֆերաների ներքին տիրույթները չեն հատվում, կամ ներքին տիրույթները չեն հատվում, եթե բոլոր սֆերաների կողմնորոշվածությունների վեկտորները հակուղղվեն: Դիտարկված և տրիվյալ դեպքերից խուսափելու նպատակով ենթադրենք, որ $n \geq 2$: Այդ դեպքում որպես սֆերայի սահմանային տարբերակ կարելի է վերցնել հիպերհարթություն, որն ունի զրոյական կորություն և կողմնորոշվածություն, որը տրվում է միավոր նորմալ վեկտորով: Դիտարկենք Դեկարտի թեորեմի ընդհանրացված տարբերակը n-չափանի տարածությունում կողմնորոշված դեկարտյան կոնֆիգուրացիայի համար:

Թեորեմ 4 (Դեկարտի բազմաչափ Էվկլիդեսյան թեորեմ): $\mathbb{R}^n$*-ում տրված* $S_j,\ j=\overline{1,n+2}$ *սֆերաների կողմնորոշված դեկարտյան կոնֆիգուրացիայի համար տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը.*

$$\sum_{j=1}^{n+2} b_j^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n+2} b_j\right)^2, \tag{5}$$

որտեղ b_j*-ն* S_j *սֆերայի կորությունն է:*

Առնչություն (5)-ը կարելի է գրել հետևյալ մատրիցային տեսքով.

$$Q_n(b) := b^T \mathrm{Q}_n b = 0, \tag{6}$$

որտեղ $b = (b_1, b_2, \dots, b_{n+2})^T$, իսկ $Q_n(x) = x^T \mathrm{Q}_n x$-ը n-չափանի դեկարտյան քառակուսային ձև է, որի գործակիցների Q_n մատրիցն ունի հետևյալ տեսքը.

$$\mathrm{Q}_n = I_{n+2} - \frac{1}{n} 1_{n+2} 1_{n+2}^T:$$

Սահմանում 4: *Էվկլիդեսյան* $\mathbb{R}^n$ n*-չափանի տարածությունում* S *սֆերայի կորություն-կենտրոնային կոորդինատներ կանվանենք* $(n+1)$*-չափանի* $\mathrm{m}(S) = (b, bx_1, \dots, bx_n)$ *վեկտորը, որտեղ* b*-ն* S *սֆերայի կորությունն է (ոչ զրոյական), իսկ* $x(S) = x = (x_1, \dots, x_n)$*-ը՝ կենտրոնը:* H *կողմնորոշված հիպերհարթության դեպքում կորություն-կենտրոնային կոորդինատները կանվանենք* $\mathrm{m}(H) = (0, h)$ *վեկտորը, որտեղ* $h =$

$= (h_1, \ldots, h_n)$ *-ը* H *-ի այնմիավոր նորմալ վեկտորն է, որն ուղղված է դեպի վերջինիս ներքին տիրույթ*[1]*:*

Թեորեմ 4 (Դեկարտի ընդհանրացված բազմաչափ Էվկլիդեսյան թեորեմ): *Դիցուք* $S_1, S_2, \ldots, S_{n+2}$ *կողմնորոշված սֆերաները կազմում են կողմնորոշված դեկարտյան կոնֆիգուրացիա, իսկ* M *-ը* $(n+2)\times(n+1)$ *-չափանի մատրից է, որի* i *-րդ տողը* $\mathrm{m}(S_i)$ *վեկտորն է: Այդ դեպքում տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը.*

$$\mathrm{M}^T \mathrm{Q}_n \mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2I_n \end{pmatrix}: \tag{7}$$

Ճիշտ է նաև թեորեմի հակադարձ պնդումը՝ (7)-ի կամայական իրական M լուծմանը համապատասխանում է միակ կողմնորոշված դեկարտյան կոնֆիգուրացիա, նույնիսկ երբ այն պարունակում է հիպերհարթություններ, որոնք միարժեքորեն որոշվում են կոնֆիգուրացիայի այլ սֆերաների միջոցով:

Թեորեմ 4-ի հետագա ընդհանրացման համար դիտարկենք ինվերսիայի գործողությունը n -չափանի $\mathbb{R}^n$ էվկլիդեսյան տարածությունում: Համաձայն սահմանման՝ սկզբնակետում կենտրոն ունեցող միավոր S_I սֆերայի նկատմամբ ինվերսիան x կետն արտապատկերում է $\frac{x}{|x|^2}$ կետին, որտեղ $|x|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$: Դիտարկենք կամայական x կենտրոնով և r շառավղով S կողմնորոշված սֆերա: Նրա ինվերս պատկերը S_I սֆերայի նկատմամբ կլինի կողմնորոշված $\overline{S}$ սֆերա $\overline{x} = \frac{x}{|x|^2 - r^2}$ կենտրոնով և $\overline{r} = \frac{r}{|x|^2 - r^2}$ շառավղով: Այդ սֆերաների միջև առկա է հետևյալ կապը.

$$\frac{x}{r} = \frac{\overline{x}}{\overline{r}}, \overline{b} = \frac{|x|^2}{r} - r: \tag{8}$$

Նկատենք, որ $|x|^2 > r^2$ դեպքում $\overline{S}$ սֆերան կունենա նույն կողմնորոշումը, ինչ S -ը: Օգտվելով ինվերսիայի գաղափարից՝ ընդլայնենք կորություն-կենտրոնային կոորդինատները հետևյալ կերպ:

[1] Նկատենք, որ կորություն-կենտրոնային կոորդինատային համակարգը միշտ չէ, որ միանշանակորեն նկարագրում է կողմնորոշված սֆերան: Եթե տրված $\mathrm{m} \in \mathbb{R}^{n+1}$ կորություն-կենտրոնային կոորդինատի առաջին տարրը զրոյից տարբեր է, ապա սֆերան որոշվում է միարժեքորեն: Սակայն առաջին տարրի զրոյական լինելու դեպքում (հիպերհարթության դեպք) m վեկտորով որոշվում է հիպերհարթություն այն և միայն այն դեպքում, երբ $\sum h^2 = 1$, ընդ որում այս պայմանին բավարարող m կորություն-կենտրոնային կոորդինատներով որոշվում է հիպերհարթությունների փունջ, որոնք ստացվում են միմյանցից զուգահեռ տեղափոխության միջոցով:

Սահմանում 5: $\mathbb{R}^n$ *-ում տրված* S *կողմնորոշված սֆերայի ընդլայնված կորություն-կենտրոնային կոորդինատներ կանվանենք* $(n+2)$ *-չափանի*

$$\mathrm{w}(S) = (\bar{b}, b, bx_1, \ldots, bx_n) = (\bar{b}, \mathrm{m})$$

վեկտորը, որտեղ $\bar{b}$ -ը սկզբնակետում տեղադրված միավոր շրջանագծի նկատմամբ S սֆերայի ինվերս $\bar{S}$ սֆերայի կորությունն է: Հիպերհարթության համար ընդլայնված կորություն-կենտրոնային կոորդինատները կընդունեն հետևյալ տեսքը.

$$\mathrm{w}(H) = (\bar{b}, 0, h_1, \ldots, h_n) = (\bar{b}, \mathrm{m}(H)),$$

որտեղ $\bar{b}$ -ը սկզբնակետում տեղադրված միավոր շրջանագծի նկատմամբ H հիպերհարթության ինվերս $\overline{H}$ պատկերի կորությունն է:

Էվկլիդեսյան $\mathbb{R}^n$ n -չափանի տարածությունում ընդլայնված կորություն - կենտրոնային կոորդինատային համակարգը միանշանակորեն որոշում է սֆերան: Ի տարբերություն կորություն-կենտրոնային համակարգի՝ հիպերհարթությունները ևս միարժեքորեն որոշվում են իրենց ընդլայնված կորություն-կենտրոնային կոորդինատներով:

Դեկարտյան կոնֆիգուրացիա կազմող S_i, $i = \overline{1, n+2}$ կողմնորոշված սֆերաների համար կազմենք $(n+2)\times(n+2)$-չափանի W մատրիցը, որի i-րդ տողը $\mathrm{w}(S_i)$ վեկտորն է: Քանի որ ինվերսիան պահպանում է սֆերաների շոշափելիությունը, ապա դիտարկվող կոնֆիգուրացիային համապատասխանում է մեկ այլ դեկարտյան կոնֆիգուրացիա, որի շրջանագծերը ստացվում են առաջինի շրջանագծերի միավոր սֆերայի նկատմամբ ինվերս պատկերներից: Այս երկու կոնֆիգուրացիաների համար (8)-ից կարելի է ստանալ W և W_{inv} մատրիցների կապը.

$$\mathrm{W} = \mathrm{W}_{inv} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \end{pmatrix}: \tag{9}$$

Թեորեմ 4 (Դեկարտի ընդլայնված Էվկլիդեսյան թեորեմ): *Տրված* S_i, $i = \overline{1, n+2}$ *կողմնորոշված սֆերաներից կազմված դեկարտյան կողմնորոշված կոնֆիգուրացիայի համար կառուցված* W *մատրիցի համար ճիշտ է հետևյալ մատրիցային հավասարումը.*

$$\mathrm{W}^{\mathrm{T}} \mathrm{Q}_n \mathrm{W} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2I_n \end{pmatrix}: \tag{10}$$

Ճիշտ է նաև թեորեմի հակադարձ պնդումը. (10) հավասարման ցանկացած իրական լուծում որոշում է միակ դեկարտյան կողմնորոշված կոնֆիգուրացիա:

Այս թեորեմը բնութագրում է դեկարտյան կոնֆիգուրացիաները մինչ այժմ դիտարկված ամենաընդհանուր ձևով: Այն ներառում է մինչ հիմա դիտարկված բոլոր թեորեմները: Նրա ապացույցը հետևում է այս թեորեմի ոչ էվկլիդեսյան երկրաչափություններում առկա համանման թեորեմներից [3]:

3. Դեկարտի թեորեմի սֆերիկ և հիպերբոլական ընդհանրացումները: Սֆերիկ երկրաչափության ստանդարտ մոդելում տարածությունը դիտարկվում է R^{n+1}-ի սկզբնակետում կենտրոն ունեցող, միավոր շառավղով n -չափանի $S^n := \{y : y_0^2 + y_1^2 + \ldots + y_n^2 = 1\}$ սֆերայի վրա: Ստանդարտ մոդելում որպես մետրիկա ընտրվում է R^{n+1}-ում որոշված Ռիմանյան մետրիկան: Այս մոդելում տրված երկու կետերի միջև հեռավորությունն այդ կետերում ծայրակետեր ունեցող շառավիղ վեկտորների միջև անկյունն է, որը բավարարում է $0 \leq \alpha \leq \pi$ պայմանին:

Հեռավորության նման սահմանման դեպքում տրված կետից (կենտրոն) հավասարահեռ կետերի բազմությունը S^n սֆերիկ երկրաչափությունում կոչվում է *սֆերա* (C): C սֆերայի կենտրոնում և նրա ցանկացած կետում ծայրակետեր ունեցող շառավիղ-վեկտորների կազմած $\alpha = \alpha(C)$ անկյան մեծությունը կոչվում է *սֆերիկ* կամ *անկյունային շառավիղ*: Նկատենք, որ տրված սֆերայի համար կարելի է ընտրել երկու կենտրոններ, որոնք S^n սֆերայի վրա տեղաբաշխված են միմյանց տրամագծորեն հակառակ: Սֆերայի կենտրոնի ընտրությունը որոշում է նրա կողմնորոշվածությունը: Այս մոդելում սֆերայի ներքին տիրույթը կարելի է դիտարկել որպես S^n սֆերայի և հիպերհարթության հատույթով միավոր սֆերայից առանձնացած սեգմենտ, որը կանվանենք *սֆերիկ սեգմենտ* (կողմնորոշված սֆերա): Ակնհայտ է, որ տրված սֆերայով կարելի է որոշել երկու սֆերիկ սեգմենտներ, որոնց անկյունային շառավիղների գումարը π է: Որոշակիության համար որպես տրված սֆերայի ներքին տիրույթ ընտրենք այն սեգմենտը, որը պարունակում է նրա կենտրոնը:

Սահմանում 6: *Սֆերիկ դեկարտյան կոնֆիգուրացիա* կանվանենք $(n+2)$ հատ միմյանց զույգ առ զույգ շոշափող սֆերիկ սեգմենտների այնպիսի դասավորություն, որտեղ կամ բոլոր սֆերիկ սեգմենտների, կամ դրանց բոլորի լրացումների ներքին տիրույթները չեն հատվում:

Թեորեմ 5 (Դեկարտի սֆերիկ թեորեմ): *Դիցուք միավոր շառավղով n -չափանի S^n սֆերայի վրա տրված են $\alpha_i, i = \overline{1, n+2}$ սֆերիկ շառավիղներով C_i կողմնորոշված սֆերաները, որոնք կազմում են դեկար-*

տյան սֆերիկ կոնֆիգուրացիա, այդ դեպքում α_i շառավիղների համար տեղի ունի հետևյալ առնչությունը՝

$$\sum_{i=1}^{n+2} \operatorname{ctg}^2 \alpha_i = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n+2} \operatorname{ctg} \alpha_i)^2 - 2 \text{ ։}$$

Դեկարտի սֆերիկ թեորեմը կախված է միայն սֆերիկ երկրաչափության ռիմանյան մետրիկայից և ոչ թե այն կոորդինատային համակարգից, որն օգտագործվում է՝ նկարագրելու համար տրված բազմաձևությունը: Սակայն այնկարելի է ապացուցել, որպես մասնավոր դեպք մի ավելի ընդհանրացված թեորեմի, որը կախված է որոշակի կոորդինատային համակարգի ընտրությունից:

Սահմանում 7: Դիցուք C-ն սֆերիկ սեգմենտ է $y = (y_0, y_1, ..., y_n)$ կենտրոնով և α անկյունային շառավղով: Այդ դեպքում C սֆերիկ սեգմենտի *կորություն-կենտրոնային* կոորդինատներ կանվանենք $(n+2)$-չափանի հետևյալ վեկտորը.

$$w_+(C) = \left(\operatorname{ctg} \alpha, \frac{y_0}{\sin \alpha}, \frac{y_1}{\sin \alpha}, ..., \frac{y_n}{\sin \alpha} \right):$$

Նկատենք, որ այս կոորդինատային համակարգը միարժեքորեն որոշում է սֆերիկ սեգմենտը: Միարժեքությունը բխում է $w_+(C)$ վեկտորի առաջին տարրից α անկյանմիանշանակ որոշելուց, ինչն էլ իր հերթին միարժեքորեն որոշում է սֆերիկ սեգմենտի կենտրոնի կոորդինատները $w_+(C)$ վեկտորի մնացած կոորդինատներից:

C_i, $i = \overline{1, n+2}$ սֆերիկ սեգմենտների կամայական դասավորության համար սահմանենք $(n+2) \times (n+2)$-չափանի W_+ մատրիցը, որի i-րդ տողը $w_+(C_i)$ վեկտորն է:

Թեորեմ 6 (Դեկարտի ընդհանրացված սֆերիկ թեորեմ): *Դիցուք տրված C_i, $i = \overline{1, n+2}$ սֆերիկ սեգմենտները կազմում են կողմնորոշված դեկարտյան կոնֆիգուրացիա: Այդ դեպքում կոնֆիգուրացիայի W_+ մատրիցը բավարարում է*

$$\mathrm{W}_+^T \mathrm{Q}_n \mathrm{W}_+ = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2I_n \end{pmatrix} \qquad (11)$$

առնչությանը, որտեղ I_n-ը n-չափանի միավոր մատրից է, իսկ $Q_n = I_{n+2} - \frac{1}{n} 1_{n+2} 1_{n+2}^T$ ։

Ճիշտ է նաև թեորեմի հակադարձ պնդումը. (11) հավասարման ցանկացած իրական լուծմանը համապատասխանում է որևէ դեկարտյան սֆերիկ կոնֆիգուրացիա:

Դեկարտյան կոնֆիգուրացիայի հիպերբոլական ընդհանրացման համար դիտարկենք H^n հիպերբոլական երկրաչափության հիպերբոլոիդի մոդելը: H^n-ում նույնպես սֆերան սահմանվում է որպես մի կետից (կենտրոն) հավասարահեռ (հիպերբոլական մետրիկայի իմաստով) կետերի բազմություն:

Հիպերբոլոիդի մոդելում տարածությունը դիտարկվում է $\mathbb{R}^{n+1}$ տարածությունում տեղադրված $H^n_{\pm}$ երկխոռոչ հիպերբոլոիդի վերին H^n_{+} մասի վրա: Դիցուք $H^n_{\pm}$ հիպերբոլոիդը որոշվում է $u_0^2 = 1 + u_1^2 + ... + u_n^2$ հավասարումով, այդ դեպքում H^n_{+}-ը կորոշվի նույն հավասարումով, եթե $u_0 > 0$: Մետրիկան այս մոդելում տրվում է

$$ds^2 = -du_0^2 + du_1^2 + ... + du_n^2,$$

իսկ u և u' կետերի միջև հեռավորություն

$$\operatorname{ch}\left(d\left(u,u'\right)\right) = u_0 u_0' - u_1 u_1' - ... - u_n u_n'$$

առնչություններով: Հիպերբոլոիդի մոդելի համար ընտրված հեռավորության սահմանումից հետևում է, որ սֆերան այդ մոդելում ծնվում է H^n_{+} հիպերբոլոիդիվ երին խոռոչի և $G\left(u\right) = 0$ հարթության հատումից, որտեղ

$$G\left(u\right) = g_0 u_0 - \sum_{i=1}^{n} g_i u_i - g\,,\ g > 1,$$

և նորմալացված է $g_0^2 = 1 + \sum_{i=1}^{n} g_i^2$ պայմանով, այսինքն՝ $\mathbf{g} = \left(g_0, ..., g_n\right)$ կետը ընտրվում է այնպես, որ այն գտնվի H^n_{+} հիպերբոլոիդի վերին խոռոչի վրա: Այս կերպ սահմանված սֆերան էվկլիդեսյան երկրաչափությունում էլիպսոիդ է, նրա կենտրոնը $\mathbf{g}$ կետն է, իսկ d շառավիղը բավարարում է $\operatorname{ch}\left(d\right) = g$ հավասարմանը: Ինչպես սֆերիկ երկրաչափությունում, այնպես էլ այստեղ, որպես սֆերայի ներքին տիրույթ վերցնենք H^n_{+} հիպերբոլոիդի վերին խոռոչի և $G\left(u\right) = 0$ հարթության հատումից առաջացած այն հատվածը, որը ներառում է այդ սֆերայի կենտրոնը:

Սահմանում 8: H^n*-ում կողմնորոշված հիպերբոլական դեկարտյան կոնֆիգուրացիա կանվանենք* $n+2$ *հատ միմյանց զույգ առ զույգ շոշափող հիպերբոլական սֆերաների այնպիսի կոնֆիգուրացիա, որտեղ կամ դրանց ներքին տիրույթները չեն հատվում, կամ կամայական երկու սֆերաների ներքին տիրույթները հատվում են ոչ դատարկ բաց բազմությամբ:*

Թեորեմ 6 (Դեկարտի հիպերբոլական թեորեմ): H^n *հիպերբոլական երկրաչափությունում* $n+2$ *հատ սֆերաների կողմնորոշված դեկար-*

տյան կոնֆիգուրացիայի $s_i, i=\overline{1,n+2}$ *շառավիղները բավարարում են հետևյալ առնչությանը.*

$$\sum_{i=1}^{n+2}(\operatorname{cth}\mathrm{s}_i)^2=\frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{n+2}\operatorname{cth}\mathrm{s}_i\Big)^2+2\text{ :}$$

Սահմանում 9: Դիցուք S -ը $u=(u_0,u_1,...,u_n)$ կենտրոնով և s շառավղով հիպերբոլական սֆերա է H_+^n-ում: S հիպերբոլական սֆերայի *կոբություն-կենտրոնային* կոորդինատներ կանվանենք $(n+2)$-չափանի հետևյալ վեկտորը.

$$w_-(S)=\left(\operatorname{ch}s,\frac{u_0}{\operatorname{sh}s},\frac{u_1}{\operatorname{sh}s},...,\frac{u_n}{\operatorname{sh}s}\right):$$

$S_1,S_2,\dots,S_{n+2}$ հիպերբոլական սֆերաների կոնֆիգուրացիայի համար կառուցենք $(n+2)\times(n+2)$-չափանի W_- մատրիցը, որի i-րդ տողը $w_-(S_i)$ վեկտորն է:

Թեորեմ 7 (Դեկարտի ընդհանրացված հիպերբոլական թեորեմ): *Դիցուք տրված է* S_i, $i=\overline{1,n+2}$ *հիպերբոլական սֆերաների դեկարտյան կողմնորոշված կոնֆիգուրացիա: Այդ սֆերաների համար կառուցված* W_- *մատրիցը բավարարում է հետևյալ պայմանին.*

$$\mathrm{W}_-^{\mathrm{T}}\mathrm{Q}_n\mathrm{W}_-=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&2I_n\end{pmatrix}:$$

Ուշագրավ է, որ գոյություն ունի փոխմիարժեք համապատասխանություն էվկլիդեսյան, սֆերիկ և հիպերբոլական կողմնորոշված դեկարտյան կոնֆիգուրացիաների միջև, մասնավորապես դրանց համար համապատասխանաբար կառուցված W, W_+ և W_- մատրիցների համար տեղի ունի հետևյալը.

$$\mathrm{W}=\mathrm{W}_+\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&1&0\\0&0&I_n\end{pmatrix}=\mathrm{W}_-\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&1&0\\0&0&I_n\end{pmatrix}:$$

Հայաստանի ազգային պոլիտեխնիկական համալսարան
e-mail: arman.arakelyan@gmail.com

Ա. Հ. Առաքելյան

Սֆերաների կոնֆիգուրացիաները հաստատուն կորության տարածություններում

Ամփոփվում են միմյանց զույգ առ զույգ շոշափող չորս շրջանագծերի՝ Դեկարտի դասական թեորեմի ընդհանրացումները կոմպլեքս հարթությունում, բազմաչափ էվկլիդեսյան, սֆերիկ և հիպերբոլական տարածություններում:

А. Г. Аракелян

Конфигурации сфер в пространствах постоянной кривизны

Приводится краткий обзор результатов обобщений классической задачи Декарта о конфигурациях четырех попарно касающихся окружностей на комплексной плоскости, в многомерном евклидовом, сферическом и гиперболическом пространствах.

A. H. Arakelyan

Configurations of Spheres in Spaces of Constant Curvature

The generalizations of Decartes' classical problem of four mutually tangent circles forcomplex plane, *n*-dimensional eculidean, spherical and hyperbolic spaces are resumed.

Գրականություն

1. *Descartes R.* Oeuvres de Descartes, Correspondance IV. (C. Adam and P. Tannery, Eds.). Paris: Leopold Cerf. 1901.
2. *Զաքարյան Վ.Ս., Առաքելյան Ա. Հ,* – ՀՀ ԳԱԱ Զեկույցներ, 2009, h. 109, № 4, էջ 275-282:
3. *Steiner J.* – J. Reine Angew. Math. 1826. №1. P. 161–184, 252–288; *J. Steiner*. Gesammelte Werke. V. I. Reimer. Berlin. 1881. P. 17–76.
4. *Coxeter H. M.* – Amer. Math. Monthly. 1968. V. 75. P. 5–15.
5. *Sarnak P.* - Amer. Math. Monthly. 2011. V. 118. P.291-306.
6. *Kontorovich A., Apollonian Oh. H.* - J. Amer. Math. Soc. 2011. V. 24. P. 603-648.
7. *Առաքելյան Ա. Հ.* – Մաթեմատիկան բարձրագույն դպրոցում, 2014, h. 10, № 1, էջ 5-15:
8. *Առաքելյան Ա. Հ.* – Մաթեմատիկան բարձրագույն դպրոցում, 2015, h. 11, № 1, էջ 5-14: