ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 116 2016 № 1

МЕХАНИКА

УДК 539.3

**Член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян,
М. В. Хачатрян**

Математическая модель плоского кривого (кругового) упругого стержня по классической теории упругости с учетом поперечных сдвиговых деформаций

(Представлено 30/XI 2015)

Ключевые слова: *круговой стержень, модель, классическая упругость, поперечные сдвиги.*

Введение. В работе [1] выдвигаются гипотезы построения теории упругих тонких оболочек (как классических, так и микрополярных), которые обосновываются асимптотическим методом интегрирования уравнений соответствующей трехмерной теории. Кинематическая часть этих гипотез, в классическом случае – кинематические гипотезы теории С. П. Тимошенко (в микрополярном случае – аналогичные гипотезы, которые обобщены и распространены также на свободные вращения), а их статическая часть отличается от соответствующих гипотез указанной теории. На основе гипотез [1] построены асимптотически точные и энергетически правильные прикладные теории (как классические, так и микрополярные) упругих тонких балок (прямолинейных), пластин и оболочек [2-6].

Отметим, что в классической постановке многочисленные задачи прочности, свободных и вынужденных колебаний, распространения волн для соответствующих тонких тел изучались и продолжают изучаться на основе уточненных моделей теории типа С.П.Тимошенко для статики и динамики стержней [7-9] и моделей, обобщенных на случаи пластины и оболочки [9-14]. Основные уравнения деформации (статики и динамики) упругого кругового кольца на базе гипотез С. П. Тимошенко приведены в работе [15].

В данной работе развивается метод гипотез работы [1] для построения на основе классической теории упругости прикладной модели кривого (кругового) упругого стержня с учетом поперечных сдвиговых деформаций.

1. Постановка задачи. Рассмотрим кривой стержень постоянного поперечного сечения (в виде прямоугольника: $2h\times b, b=1$), ось которого очерчена по окружности (рис. 1). Будем считать, что имеет место плоское напряженное состояние (на рис. 1 показана срединная плоскость кривого стержня), в которое вводим полярную систему координат (r,φ).

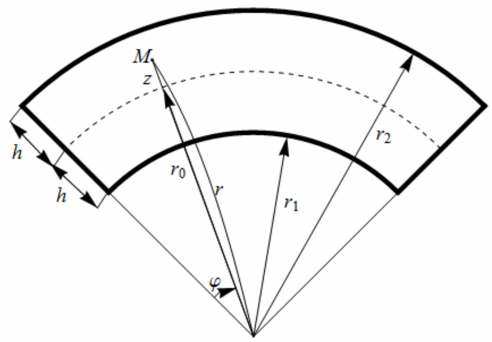

Рис. 1

В срединной плоскости стержня ($r_1 \le r \le r_2$, $0 \le \varphi \le \varphi_1$) имеют место основные уравнения плоской задачи классической теории упругости в полярных координатах [16]:

уравнения равновесия

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \varphi}+\frac{1}{r}\sigma_{22}+\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial r}-\frac{1}{r}\sigma_{11}=0 \quad , \quad \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \varphi}+\frac{2}{r}\sigma_{12}+\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial r}=0; \tag{1.1}$$

физические соотношения упругости

$$\gamma_{11}=\frac{1}{E}\left[\sigma_{11}-\upsilon\sigma_{22}\right] \ , \ \ \gamma_{22}=\frac{1}{E}\left[\sigma_{22}-\upsilon\sigma_{11}\right] \ , \ \ \gamma_{12}=\frac{1}{\mu}\sigma_{12}; \tag{1.2}$$

геометрические соотношения

$$\gamma_{11}=\frac{1}{r}\frac{\partial V_1}{\partial \varphi}+\frac{1}{r}V_2, \ \ \gamma_{22}=\frac{\partial V_2}{\partial r}, \ \ \gamma_{12}=\frac{1}{r}\frac{\partial V_2}{\partial \varphi}-\frac{1}{r}V_1+\frac{\partial V_1}{\partial r}; \tag{1.3}$$

граничные условия

$$\text{на } r=r_1,\ \sigma_{12}=q_1^-,\ \sigma_{22}=q_2^-; \qquad \text{на } r=r_2,\ \sigma_{12}=q_1^+, \sigma_{22}=q_2^+. \tag{1.4}$$

На кромках $\varphi=0$ и $\varphi=\varphi_1$ рассмотрим следующие граничные условия:

$$\text{a) на } \varphi=0,\ \sigma_{11}=\sigma_{11}',\ \sigma_{12}=\sigma_{12}'; \qquad \text{на } \varphi=\varphi_1,\ \sigma_{11}=\sigma_{11}'',\ \sigma_{12}=\sigma_{12}'' \tag{1.5}$$

$$\text{b) на } \varphi=0,\ V_1=V_1',\ V_2=V_2'; \qquad \text{на } \varphi=\varphi_1, V_1=V_1'', V_2=V_2'' \tag{1.6}$$

Известным способом на основе уравнений (1.1)-(1.3) легко получить уравнение баланса энергии

$$\iint_D W r dr d\varphi=\frac{1}{2}A \ , \tag{1.7}$$

где W – плотность потенциальной энергии деформации

$$W=\frac{1}{2}\left(\sigma_{12}\gamma_{12}+\sigma_{22}\gamma_{22}+\sigma_{11}\gamma_{11}\right)=\frac{E}{2\left(1-\upsilon^2\right)}\left(\gamma_{11}{}^2+2\upsilon\gamma_{11}\gamma_{22}+\gamma_{22}{}^2+\frac{1}{2}\left(1-\upsilon\right)\gamma^2\right), \tag{1.8}$$

A – работа внешних приложенных усилий

$$A=\int_0^{\varphi_1}\left(q_1^+V_1+q_2^+V_2\right)_{r=r_2}r_2d\varphi-\int_0^{\varphi_1}\left(q_1^-V_1+q_2^-V_2\right)_{r=r_1}r_1d\varphi-\int_{r_1}^{r_2}\left(\sigma_{11}'V_1+\sigma_{12}'V_2\right)_{\varphi=\varphi_1}dr+$$

$$+\int_{r_1}^{r_2}\left(\sigma_{11}''V_1+\sigma_{12}''V_2\right)_{\varphi=\varphi_2}dr. \qquad (1.9)$$

Краевую задачу (1.1)-(1.6) можно сформулировать по вариационной трактовке, при этом общий функционал задачи будет выглядеть следующим образом:

$$I=\iint_{(D)}\left[W-\left\{\sigma_{11}\left[\gamma_{11}-\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_1}{\partial\varphi}+\frac{1}{r}V_2\right)\right]+\sigma_{22}\left[\gamma_{22}-\frac{\partial V_2}{\partial r}\right]+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sigma_{12}\left[\gamma_{12}-\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_2}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}V_1+\frac{\partial V_1}{\partial r}\right)\right]\right\}\right]rdrd\varphi-$$

$$-\int_0^{\varphi_1}\left[q_1^+V_1+q_2^+V_2\right]_{r=r_2}r_2d\varphi+\int_0^{\varphi_1}\left[q_1^-V_1+q_2^-V_2\right]_{r=r_1}r_1d\varphi+\tilde{I}, \qquad (1.10)$$

а) $$\tilde{I}=\int_{r_1}^{r_2}\left[\sigma_{11}'V_1+\sigma_{12}'V_2\right]_{\varphi=0}dr-\int_{r_1}^{r_2}\left[\sigma_{11}''V_1+\sigma_{12}''V_2\right]_{\varphi=\varphi_1}dr \qquad (1.11)$$

в случае граничных условий (1.5),

б) $$\tilde{I}=\int_{r_1}^{r_2}\left[\sigma_{11}\left(V_1-V_1'\right)+\sigma_{12}\left(V_2-V_2'\right)\right]_{\varphi=0}dr-\int_{r_1}^{r_2}\left[\sigma_{11}\left(V_1-V_1''\right)+\sigma_{12}\left(V_2-V_2''\right)\right]_{\varphi=\varphi_1}dr \qquad (1.12)$$

в случае граничных условий (1.6).

Варьируя I по всем независимым функциональным аргументам, из вариационного уравнения $\delta I=0$ получим основные уравнения ((1.1)-(1.3)) и граничные условия ((1.4)-(1.6)) кругового стержня при плоском напряженном состоянии.

2. Исходные предположения [1-6] и построение прикладной модели упругого кругового тонкого стержня. Этот параграф посвящен построению уточненной теории упругого кругового тонкого стержня. При этом исходим из того, что рассматриваемые уравнения кривого стержня должны учитывать один из важнейших факторов, а именно, поперечные сдвиги, и в то же время иметь достаточно простую форму и невысокий порядок для того, чтобы в дальнейшем использовать их при разработке эффективных численных методов решения практически важных задач.

А) В качестве исходной кинематической примем гипотезу прямой линии (гипотезу Тимошенко), согласно которой первоначально перпендикулярный к средней линии срединной плоскости кругового стержня до деформации остается после деформации прямолинейным, но уже не перпендикулярным к деформированной средней линии, а поворачивается на некоторый угол, не изменяя при этом своей длины. Вследствие этого имеем линейный закон изменения перемещений по толщине средней плоскости кругового стержня:

$$V_1=u(\varphi)+z\psi(\varphi),\ V_2=w(\varphi), \qquad (2.1)$$

где следует иметь в виду, что $r = r_0 + z$, r_0 – радиус средней линии, $-h \le z \le h$ $\left(\dfrac{\partial(\cdot)}{\partial r} = \dfrac{\partial(\cdot)}{\partial z}\right)$.

Здесь, $u(\varphi)$ и $w(\varphi)$ – перемещения точек средней линии в направлениях по ее касательной и по нормали; $\psi(\varphi)$ – угол поворота первоначально нормального элемента.

Кинематическая гипотеза (2.1) дополняется статическими гипотезами:

Б) О малости нормального напряжения σ_{22}, относительно нормального напряжения σ_{11} в первом уравнении закона Гука (1.2);

В) относительно единицы будем пренебрегать величиной порядка $\dfrac{h}{r_0}$

$$\left(\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0 + z} = \frac{1}{r_0\left(1 + \dfrac{z}{r_0}\right)} \approx \frac{1}{r_0}\right),$$

Г) при определении деформаций и напряжений, сначала для касательного напряжения σ_{12} примем

$$\sigma_{12} = \overset{0}{\sigma}_{12}(\varphi). \tag{2.2}$$

После определения указанных выше величин формулу для σ_{12} поправим следующим образом. Интегрируем по z второе из (1.1) уравнение равновесия и при определении постоянного интегрирования (вернее функции от φ) будем требовать равенство нулю интеграла от $-h$ до h от полученного выражения. Полученное окончательное выражение после указанного интегрирования прибавим к формуле (2.2).

В соответствии с принятым законом распределения перемещений (2.1), подставляя его в формулы (1.3), находим

$$\gamma_{11} = \left(\frac{1}{r_0}\frac{du}{d\varphi} + \frac{1}{r_0}w\right) + z\frac{1}{r_0}\frac{d\psi}{d\varphi}, \quad \gamma_{22} = 0, \quad \gamma_{12} = \frac{1}{r_0}\frac{dw}{d\varphi} - \frac{1}{r_0}u + \psi. \tag{2.3}$$

Примем следующие обозначения:

$$\Gamma_{11} = \frac{1}{r_0}\frac{du}{d\varphi} + \frac{1}{r_0}w, \quad \Gamma_{12} = \frac{1}{r_0}\frac{dw}{d\varphi} - \frac{1}{r_0}u + \psi, \quad \mathrm{K}_{11} = \frac{1}{r_0}\frac{d\psi}{d\varphi}, \tag{2.4}$$

тогда для деформаций получим

$$\gamma_{11} = \Gamma_{11} + z\mathrm{K}_{11}, \quad \gamma_{12} = \Gamma_{12}, \quad \gamma_{22} = 0. \tag{2.5}$$

Физический смысл $\Gamma_{11}, \mathrm{K}_{11}, \Gamma_{12}$ заключаются в следующем: Γ_{11} – продольная относительная деформация средней линии; K_{11} – изменение кривизны средней линий; Γ_{12} – сдвиговая деформация в точках средней линии.

Используя гипотезу Б) и формулу $(2.5)_1$, из формулы $(1.2)_1$ для напряжения σ_{11} имеем

$$\sigma_{11}=\overset{0}{\sigma}_{11}(\varphi)+z\overset{1}{\sigma}_{11}(\varphi),\qquad(2.6)$$

где

$$\overset{0}{\sigma}_{11}(\varphi)=\mathrm{E}\Gamma_{11},\quad \overset{1}{\sigma}_{11}(\varphi)=\mathrm{EK}_{11}.\qquad(2.7)$$

При определении выражения σ_{12} используем гипотезы Г) и В). Для определенния поправки к формуле (2.2) уравнение равновесия $(1.1)_2$ представим так:

$$\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial z}+\frac{2}{r_0}\sigma_{12}=-\frac{1}{r_0}\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varphi},\qquad(2.8)$$

где в правой части необходимо учесть выражение (2.6). Получается неоднородное линейное дифференциальное уравнение для функции σ_{12}.

Соответствующее однородное уравнение имеет следующее общее решение:

$$\bar{\sigma}_{12}=Ce^{-\frac{2}{r_0}z}\approx C\left(1-\frac{2}{r_0}z\right),\qquad \text{где}\quad C=C(\varphi).\qquad(2.9)$$

Частное решение уравнения (2.8) имеет вид

$$\sigma_{12}^{*}=-z\frac{1}{r_0}\frac{d\overset{0}{\sigma}_{11}}{d\varphi}-\frac{z^2}{2}\frac{1}{r_0}\frac{d\overset{1}{\sigma}_{11}}{d\varphi}.\qquad(2.10)$$

Общее решение уравнения (2.8) будет

$$\bar{\sigma}_{12}=C(\varphi)-\frac{2}{r_0}zC(\varphi)-z\frac{1}{r_0}\frac{d\overset{0}{\sigma}_{11}}{d\varphi}-\frac{z^2}{2}\frac{1}{r_0}\frac{d\overset{1}{\sigma}_{11}}{d\varphi}\qquad(2.11)$$

Согласно гипотезе В) требуем выполнение условия $\int_{-h}^{h}\bar{\sigma}_{12}dz=0$. В результате для $C(\varphi)$ получим

$$C(\varphi)=\frac{h^2}{6}\frac{1}{r_0}\frac{d\overset{1}{\sigma}_{11}}{d\varphi}.\qquad(2.12)$$

Подставив (2.12) в (2.11), для $\bar{\sigma}_{12}$ получим

$$\bar{\sigma}_{12}=\frac{h^2}{6}\frac{1}{r_0}\frac{d\overset{1}{\sigma}_{11}}{d\varphi}-\frac{1}{r_0^2}z\frac{h^2}{3}\frac{d\overset{1}{\sigma}_{11}}{d\varphi}-z\frac{1}{r_0}\frac{d\overset{0}{\sigma}_{11}}{d\varphi}-\frac{z^2}{2}\frac{1}{r_0}\frac{d\overset{1}{\sigma}_{11}}{d\varphi}.\qquad(2.13)$$

Окончательно по гипотезе В) для σ_{12} получим (это сумма (2.2) и (2.13)):

$$\sigma_{12}=\overset{0}{\sigma}_{12}(\varphi)+\frac{h^2}{6}\frac{1}{r_0}\frac{d\overset{1}{\sigma}_{11}}{d\varphi}-\frac{1}{r_0^2}z\frac{h^2}{3}\frac{d\overset{1}{\sigma}_{11}}{d\varphi}-z\frac{1}{r_0}\frac{d\overset{0}{\sigma}_{11}}{d\varphi}-\frac{z^2}{2}\frac{1}{r_0}\frac{d\overset{1}{\sigma}_{11}}{d\varphi}.\qquad(2.14)$$

Для определения напряжения σ_{22} используем уравнение равновесия $(1.1)_1$:

$$\sigma_{22}=\tilde{C}(\varphi)+\left(\frac{1}{r_0}\overset{0}{\sigma}_{11}-\frac{1}{r_0}\frac{d\overset{0}{\sigma}_{12}}{d\varphi}\right)z+\frac{1}{r_0}\overset{1}{\sigma}_{11}\frac{z^2}{2}.\qquad(2.15)$$

С целью приведения двумерной задачи теории упругости к одномерной, что уже выполнено для перемещений, деформаций и напряжений, введем статически эквивалентные к напряжениям усилия и моменты:

$$N = \int_{-h}^{h} \sigma_{11} dz \ , \quad Q = \int_{-h}^{h} \sigma_{12} dz \, , \quad \mathrm{M}_{из} = \int_{-h}^{h} \sigma_{11} z dz \ . \qquad (2.16)$$

На основе формул (2.14) удовлетворим граничным условиям (1.4), в результате чего, во первых, придем к следующим уравнениям равновесия:

$$\frac{1}{r_0}\mathrm{N} - \frac{1}{r_0}\frac{dQ}{d\varphi} = q_2^+ - q_2^- \, , \ \frac{1}{r_0}Q + \frac{1}{r_0}\frac{d\mathrm{N}}{d\varphi} = -\left(q_1^+ - q_1^-\right) , \ Q - \frac{1}{r_0}\frac{d\mathrm{M}_{из}}{d\varphi} = h\left(q_1^+ + q_1^-\right) . \ (2.17)$$

Кроме этого имеем также

$$\mathrm{N} = 2h\overset{0}{\sigma}_{11} \, , \quad Q = 2h\overset{0}{\sigma}_{12} \, , \ \mathrm{M}_{из} = \frac{2h^3}{3}\overset{1}{\sigma}_{11} \, , \ \tilde{C}(\varphi) = -\frac{h^2}{2}\frac{1}{r_0}\overset{1}{\sigma}_{11} + \frac{1}{2}\left(q_2^+ + q_2^-\right) \qquad (2.18)$$

На основе формул для напряжений получим физические соотношения упругости для одномерной модели:

$$\mathrm{N} = 2\mathrm{E}h\Gamma_{11} \, , \ Q = 2\mu h\Gamma_{12} \, , \ \ \mathrm{M}_{из} = \frac{2\mathrm{E}h^3}{3}\mathrm{K}_{11} \, . \qquad (2.19)$$

Уравнения равновесия (2.17), физические соотношения упругости (2.19), геометрические соотношения (2.4) представляют собой основные уравнения прикладной теории кругового упругого стержня с учетом поперечных сдвигов (в классической постановке).

3. Уравнение баланса энергии и вариационный функционал кругового упругого стержня. С учетом допущений А) - Г) пункта 2, производя интегрирование по z в пределах от $-h$ до h, получим выражение для усредненного функционала

$$I_0 = \int_0^{\varphi_1}\left[W_0 - \left\{\left[\Gamma_{11} - \left(\frac{1}{r_0}\frac{du}{d\varphi} + \frac{1}{r_0}w\right)\right]N + \left(\mathrm{K}_{11} - \frac{1}{r_0}\frac{d\psi}{d\varphi}\right)\mathrm{M}_{из} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left[\Gamma_{12} - \left(\frac{1}{r_0}\frac{dw}{d\varphi} - \frac{1}{r_0}u + \psi\right)\right]Q\right\}\right] r_0 d\varphi - \int_0^{\varphi_1}\left[q_1^+\left(u + h\psi\right) + q_2^+ w\right] r_0 d\varphi$$

$$+ \int_0^{\varphi_1}\left[q_1^-\left(u - h\psi\right) + q_2^- w\right] r_0 d\varphi + \tilde{I}, \qquad (3.1)$$

а) $\tilde{I} = u\mathrm{N}'\big|_{\varphi=0} + \psi\mathrm{M}'\big|_{\varphi=0} + wQ'\big|_{\varphi=0} - u\mathrm{N}''\big|_{\varphi=\varphi_1} - \psi\mathrm{M}''\big|_{\varphi=\varphi_1} - wQ''\big|_{\varphi=\varphi_1}$,

б) $\tilde{I} = \mathrm{N}\left(u - u'\right)\big|_{\varphi=0} + \mathrm{M}_{из}\left(\psi - \psi'\right)\big|_{\varphi=0} + Q\left(w - w'\right)\big|_{\varphi=0} - \mathrm{N}\left(u - u''\right)\big|_{\varphi=\varphi_1} -$

$-\mathrm{M}_{из}\left(\psi - \psi''\right)\big|_{\varphi=\varphi_1} - Q\left(w - w''\right)\big|_{\varphi=\varphi_1}$

Здесь учтены формулы (2.1), (2.4), (2.16), а также формула для удельной энергии деформации

$$W_0 = \mathrm{E}h\Gamma_{11}^2 + \frac{\mathrm{E}h^3}{3}\mathrm{K}_{11}^2 + \mu h\Gamma_{12}^2 . \qquad (3.2)$$

Варьируя I_0 по всем независимым функциональным аргументам, получим из вариационного уравнения $\delta I_0 = 0$ следующие группы соотношений: уравнения равновесия (2.17), геометрические соотношения (2.4), физические соотношения упругости (2.19) и граничные условия при $\varphi = 0$ и $\varphi = \varphi_1$:

статические условия

$$M_{из}\Big|_{\varphi=0} = M' = \int_{-h}^{h} \sigma'_{11} z dz, \qquad Q\Big|_{\varphi=0} = Q' = \int_{-h}^{h} \sigma'_{12} dz, \qquad N\Big|_{\varphi=0} = N' = \int_{-h}^{h} \sigma'_{11} dz,$$
$$M_{из}\Big|_{\varphi=\varphi_1} = M'' = \int_{-h}^{h} \sigma''_{11} z dz, \qquad Q\Big|_{\varphi=\varphi_1} = Q'' = \int_{-h}^{h} \sigma''_{12} dz, \qquad N\Big|_{\varphi=\varphi_1} = N'' = \int_{-h}^{h} \sigma''_{11} dz; \tag{3.3}$$

геометрические условия

$$u\Big|_{\varphi=0} = u' = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} V_1' dz, \qquad \psi\Big|_{\varphi=0} = \psi' = \frac{3}{2h^3}\int_{-h}^{h} V_1' z dz, \qquad w\Big|_{\varphi=0} = w' = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} V_2' dz,$$
$$u\Big|_{\varphi=\varphi_1} = u'' = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} V_1'' dz, \qquad \psi\Big|_{\varphi=\varphi_1} = \psi'' = \frac{3}{2h^3}\int_{-h}^{h} V_1'' z dz, \qquad w\Big|_{\varphi=\varphi_1} = w'' = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} V_2'' dz. \tag{3.4}$$

Отметим, что аналогичным образом из уравнения баланса энергии (1.7) двумерной теории получим уравнение баланса энергии прикладной модели упругого кривого стержня

$$\int_0^a W_0 dx_1 = \frac{1}{2}\tilde{A}, \tag{3.5}$$

где $\tilde{A}$ – работа внешних приложенных усилий

$$\tilde{A} = \int_0^{\varphi_1} \Big[\left(q_1^+ - q_1^-\right)u + \left(q_1^+ + q_1^-\right)h\psi + \left(q_2^+ - q_2^-\right)w\Big] r_0 d\varphi - u\mathrm{N}'\Big|_{\varphi=0} - \psi\mathrm{M}'\Big|_{\phi=0} - wQ'\Big|_{\varphi=0} +$$
$$+ u\mathrm{N}''\Big|_{\varphi=\varphi_1} + \psi\mathrm{M}''\Big|_{\varphi=\varphi_1} + wQ''\Big|_{\varphi=\varphi_1}. \tag{3.6}$$

Заключение. На основе принятых достаточно общих гипотез построена прикладная модель упругого кругового стержня в классической постановке с учетом поперечных сдвиговых деформаций. Получено уравнение баланса энергии и построен вариационный функционал прикладной модели, на основе которых можем утверждать, что по этой модели имеют место все энергетические теоремы.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 15T-2C138.

Гюмрийский государственный педагогический
институт им. М. Налбандяна

Член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян, М.В. Хачатрян

Математическая модель плоского кривого (кругового) упругого стержня по классической теории упругости с учетом поперечных сдвиговых деформаций

В работе на основе довольно общих гипотез построена математическая модель деформирования упругого кругового стержня с учетом поперечных сдвигов по классической теории упругости. Изучена энергетика явлений и построена соответствующее общее вариационное уравнение.

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ս.Հ. Սարգսյան, Մ.Վ. Խաչատրյան

Դասական առաձգականության տեսությամբ ընդլայնական սահքային դեֆորմացիաների հաշվառմամբ առաձգական հարթ կոր ձողի (շրջանային) մաթեմատիկական մոդելը

Բավական ընդհանուր բնույթի վարկածների հիման վրա կառուցվել է առաձգական շրջանային ձողի դեֆորմացիայի ընդլայնական սահքերի հաշվառմամբ մաթեմատիկական մոդելը՝ ըստ առաձգականության դասական տեսության: Ուսումնասիրված է երևույթի էներգետիկան, և կառուցված է համապատասխան ընդհանուր վարիացիոն հավասարումը:

Corresponding member of NAS RA S. H. Sargsyan, M. V. Khachatryan

Mathematical Model of Elastic Plane Curve Beam (Circular) with Consideration of Shear Deformations on the Basis of the Classical Theory of Elasticity

Mathematical model of elastic circular beam is constructed with consideration of shear deformations on the basis of the classical theory of elasticity and hypotheses of general type. The energy process is studied and correspondent variation equation is constructed.

Литература

1. *Sargsyan S. H.* - Advances in Pure Mathematics. 2015. N5. P. 629-642.
2. *Sargsyan S. H.* - Journal of Materials Science and Engineering. 2012. V. 2. N 1. P. 98-108.
3. *Саркисян С. О.*- Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т. 53. Вып. 2. С. 148-155.
4. *Саркисян С. О.* - Физическая мезомеханика. 2011. Т. 14. N 1. С. 55-66.
5. *Саркисян С. О.* - Доклады Академии наук России. 2011. Т. 436. N 2. С. 195-198.
6. *Sargsyan S. H.* – Int. Journal of Mechanics. 2014. V. 8. P. 93-100.
7. *Timoshenko S.* - Phil. Mag. 1921. Ser. 6.41. N 245. P. 744-746.
8. *Тимошенко С. П.* – Колебания в инженрном деле. М. Наука. 1967. 444 с.
9. *Григолюк Э. И., Селезов И. Т.* – Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. Итоги науки и техники. Механика деформируемых тел. Т. 5. М. ВИНИТИ. 1973. 272 с.
10. *Уфлянд Я. С.* - Прикладная математика и механика. 1948. Т. 12. N 3. С. 287-300.
11. *Mindlin R. D.* - J. Appl. Mech. 1951. V. 18. N 1. P. 31-38.
12. *Пелех Б. Л.* – Концентрация напряжений около отверстий при изгибе трансверсально-изотропных пластин. Киев. Наукова думка. 1977. 184 с.

13. *Пелех Б. Л.* – Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев. Наукова думка. 1973. 246 с.
14. *Григоренко Я. М., Василенко А. Т.* – Теория оболочек переменной жесткости. Киев. Наукова думка. 1981.544с.
15. *Кузьмин М. А., Лебедев Д. Л., Попов Б. Г.* – Расчеты на прочность элементов многослойных композитных конструкций. М, Изд. МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2012. 341с.
16. *Папкович П. Ф.* - Теория упругости. Л.-М. Оборонгиз. 1939. 640 с.