ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 116 2016 № 1

МАТЕМАТИКА

УДК 514.752.44

А. Р. Назарян

Нормально плоские риччи-полусимметрические подмногообразия коразмерности два с единичными индексами регулярности и сингулярности

(Представлено академиком В. С. Захаряном 23/II 2016)

Ключевые слова: *риччи-полусимметрические подмногообразия, конусы над римановыми многообразиями, прямые произведения.*

1. **Введение.** Пусть M – риманово многообразие с тензором Риччи R_1 и операторами кривизны $R(X,Y)$, где X,Y – произвольные векторные поля на M. Если $R(X,Y)R_1=0$ для любых X,Y, то тензор R_1 называется полупараллельным, а само многообразие M называется риччи-полупараллельным или риччи-полусимметрическим. Риччи-полусимметрические многообразия являются естественными обобщениями симметрических, эйнштейновых, полусимметрических многообразий и римановых многообразий с параллельным тензором Риччи (см. [1-3] и цитированную в них литературу). Общая классификация римановых риччи-полусимметрических многообразий была получена в [2]. В теории риччи-полусимметрических многообразий и их изометрических погружений одной из актуальных задач является задача их геометрического описания. Различные классы риччи-полусимметрических подмногообразий были исследованы в [3-11].

Настоящая работа посвящена исследованию и геометрическому описанию нормально плоских риччи-полусимметрических подмногообразий коразмерности два с единичными индексами регулярности и сингулярности в евклидовых пространствах.

Выражаю искреннюю благодарность профессору В. А. Мирзояну за большую помощь, оказанную мне на протяжении всей работы над результатами статьи и в её оформлении.

2. **Риччи-полусимметрические подмногообразия, удовлетворяющие условию $i_R=1$, $\mu=\nu+1$.** Пусть в евклидовом пространстве E_n тензор Риччи m-мерного нормально плоского риччи-полусимметрического подмногообразия M коразмерности два имеет только одно ненулевое собст-

венное значение. Тогда M допускает или только одну группу главных векторов кривизны (г.в.к.) $W^{(1)}$, или только две группы г.в.к. $W^{(0)}$ и $W^{(1)}$, которые соответствуют нулевому и ненулевому собственным значениям тензора Риччи. (Определение групп $W^{(t)}$ приведено, например, в [7-9]). В первом случае подмногообразие M является эйнштейновым (но не риччи-плоским), а во втором случае – полуэйнштейновым и имеет более сложную структуру. Поскольку $n-m=2$, то неравенства (2.7) и (4.7) в [8] принимают следующий вид:

$$0 \le \mu - \nu + k \le 2, \qquad 0 \le \mu - \nu + i_R \le 2,$$

где i_R обозначает индекс регулярности, $\mu - \nu = i_S$ – индекс сингулярности, а k – число подпространств пространства кодефектности $T_x^{(1)}$ подмногообразия, инвариантных относительно операторов кривизны $R(X,Y)$. Из второго неравенства следует, что необходимо рассмотреть всего три случая:

(a) $i_R = 1$, $\mu = \nu$, (b) $i_R = 1$, $\mu = \nu + 1$, (c) $i_R = 2$, $\mu = \nu$.

Очевидно, что в случаях (a) и (c) $k = 1$ или $k = 2$, а в случае (b) $k = 1$.

В случае (b) условие $i_R = 1$ означает, что размерность линейной оболочки векторов группы $W^{(1)}$ равна 1, т. е. в $W^{(1)}$ все векторы коллинеарны и, как мы знаем, отвечают единственному ненулевому собственному значению тензора Риччи. Условие $\mu = \nu + 1$ означает, что группа $W^{(0)}$ содержит только один ненулевой сингулярный г.в.к. и, возможно, нулевой г.в.к. Поскольку тензор Риччи имеет ненулевое собственное значение, то этому собственному значению соответствует некоторый регулярный г.в.к. Следовательно, все остальные регулярные г.в.к. коллинеарны этому вектору и принадлежат группе $W^{(1)}$. Тогда группа $W^{(1)}$ состоит или из одного регулярного г.в.к., имеющего кратность, или из двух коллинеарных регулярных г.в.к. Следовательно, группа $W^{(0)}$ не может содержать регулярные г.в.к. Поскольку гиперповерхности, не являющиеся локально евклидовыми, удовлетворяют условию $\mu = \nu$ [8], то в рассматриваемом случае подмногообразие M не является гиперповерхностью. Здесь необходимо рассмотреть два случая: (b_1) группа $W^{(1)}$ состоит из одного регулярного г.в.к. n_1, имеющего кратность ≥ 2, (b_2) группа $W^{(1)}$ состоит из двух коллинеарных регулярных г.в.к. n_1, n_2.

В настоящей работе мы рассмотрим только случай (b_2). Исследования будем проводить с использованием формализма расслоения адаптированных реперов, с которым можно познакомиться в работах [1-9].

Пусть m-мерное нормально плоское подмногообразие M евклидова пространства E_{m+2} допускает только одну группу $W^{(1)}$ регулярных г.в.к., состоящую из двух неравных коллинеарных г.в.к. n_1, n_2, кратностей p_1 и p_2 соответственно. Поскольку в случае (b) выполняется также условие $\mu = \nu + 1$, то M допускает только один ненулевой сингулярный г.в.к. n_3.

Кратность вектора n_3 равна единице, и он, как мы знаем, ортогонален векторам n_1, n_2 [8, 9]. Поскольку $n_2 = \lambda n_1$, ($\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$), а вектор средней кривизны H определяется формулой $H = p_1 n_1 + p_2 n_2 + n_3$, то из условия $|n_1|^2 - \langle n_1, H \rangle = |n_2|^2 - \langle n_2, H \rangle$, которое равносильно полусимметричности подмногообразия M, легко получить, что $(p_2 - 1)\lambda^2 + (p_1 - p_2)\lambda + 1 - p_1 = 0$. Из этого уравнения следует, что условие $p_1 = 1$ равносильно условию $p_2 = 1$. В случае $p_1 = p_2 = 1$ подмногообразие M имеет кодефектность два. Как известно [2], подмногообразия кодефектности два автоматически являются Ric-полусимметрическими и даже полуэйнштейновыми. Покажем, что подмногообразия кодефектности два с двумя неравными однократными коллинеарными регулярными г.в.к. и одним ненулевым сингулярным г.в.к. в E_{m+2} существуют. Действительно, таковым является, например, прямое произведение $M_2 \times L^{m-2}$, где M_2 – двумерная поверхность с ненулевой гауссовой кривизной в E_3, отличная от сферы, а L^{m-2} – гиперповерхность ранга один в некотором E_{m-1}.

Рассмотрим случай $p_1 \geq 2$, $p_2 \geq 2$. В этом случае, решая относительно λ приведённое выше уравнение, получим $\lambda = \dfrac{1 - p_1}{p_2 - 1}$. Следовательно, $\lambda < 0$ (т. е. векторы n_1, n_2 противоположно направлены) и $H = \dfrac{p_2 - p_1}{p_2 - 1} n_1 + n_3$. Пусть $T_x^{(n_1)}$, $T_x^{(n_2)}$, $T_x^{(n_3)}$ обозначают собственные подпространства в $T_x(M)$, соответствующие векторам n_1, n_2, n_3 соответственно. Тогда $T_x^{(1)} = T_x^{(n_1)} + T_x^{(n_2)}$, $T_x^{(0)} = T_x^{(n_3)} + T_x'$, где T_x' – пространство относительной дефектности. Оно соответствует нулевому г.в.к. Как мы знаем, $\dim T_x^{(n_1)} = p_1$, $\dim T_x^{(n_2)} = p_2$, $\dim T_x^{(n_3)} = 1$, $\dim T_x' = m - p_1 - p_2 - 1$. В целях упрощения вычислений и геометрического описания подмногообразия M ортонормрепер $\{x, e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, e_{m+2}\}$, $x \in M$, адаптируем следующим образом:

$$e_1, \cdots, e_{p_1} \in T_x^{(n_1)}, e_{p_1+1}, \cdots, e_{p_1+p_2} \in T_x^{(n_2)}, e_{p_1+p_2+1} \in T_x^{(n_3)},$$
$$e_{p_1+p_2+2}, \ldots e_m \in T_x',\ e_{m+1}, e_{m+2} \in T_x^{\perp}(M).$$

В дальнейшем индексы будут пробегать следующие значения:

$$a, b, c \in 1, \ldots, p_1,\ \ r, s, t = p_1 + 1, \ldots, p_1 + p_2,$$
$$u, v, w = p, \ldots, m,\ \ \alpha, \beta = m+1, m+2,\ \ i, j, k = 1, \ldots, m, \quad p = p_1 + p_2 + 1.$$

Поскольку нормальная связность плоская, то в некотором ортономрепере все матрицы $\|h_{ij}^{\alpha}\|$ второй фундаментальной формы α_2 могут быть одновременно приведены к диагональному виду $\|\lambda_i^{\alpha} \delta_{ij}\|$. Тогда $n_1 = \lambda_a^{\alpha} e_{\alpha}$, $n_2 = \lambda_r^{\alpha} e_{\alpha}$, $n_3 = \lambda_{p_1+p_2+1}^{\alpha} e_{\alpha}$, причем $\lambda_a^{\alpha} = \lambda_b^{\alpha}, a \neq b$, $\lambda_r^{\alpha} = \lambda_s^{\alpha}, r \neq s$, в силу кратностей векторов n_1 и n_2. Поскольку вектор n_3 ортогонален векторам n_1 и n_2, а n_1 и n_2 коллинеарны, то единичные векторы e_{m+1} и e_{m+2} можем выбирать так, чтобы e_{m+1} был коллинеарен n_1 и n_2, а e_{m+2} – вектору n_3, т. е. $n_1 = \lambda_a^{m+1} e_\alpha$, $n_2 = \lambda_r^{m+1} e_{m+1}$, $n_3 = \lambda_p^{m+2} e_{m+2}$. Тогда матрицы $\left\| h_{ij}^{m+1} \right\|$, $\left\| h_{ij}^{m+2} \right\|$ будут иметь, соответственно, следующий вид:

$$
\begin{Vmatrix}
\lambda_a^{m+1} & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & \\
 & & \lambda_a^{m+1} & & & & & & \\
 & & & \lambda_r^{m+1} & & & & & \\
 & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & \lambda_r^{m+1} & & & \\
 & & & & & & 0 & & \\
 & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & 0
\end{Vmatrix},
\quad
\begin{Vmatrix}
0 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 0 & & & & \\
 & & & \lambda_p^{m+2} & & & \\
 & & & & 0 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 0
\end{Vmatrix}
$$

где $\lambda_a^{m+1} \neq 0$, $\lambda_r^{m+1} \neq 0$, $\lambda_p^{m+2} \neq 0$, $\lambda_a^{m+1} \neq \lambda_r^{m+1}$.

Легко видеть, что такой вид матриц второй фундаментальной формы α_2 подмногообразия M в E_n в некотором ортонормрепере с такими же условиями на диагональные элементы является достаточным, чтобы M было нормально плоским с двумя коллинеарными ненулевыми регулярными г.в.к. кратностей $p_1, p_2 \geq 2$ и одним ненулевым сингулярным г.в.к.

Пусть $\left\{ \omega^1, \cdots, \omega^{m+2} \right\}$ – корепер, двойственный к выбранному выше реперу $\left\{ x, e_1, \cdots, e_m, e_{m+1}, e_{m+2} \right\}$. Тогда на подмногообразии M выполняются следующие соотношения:

$$\omega^\alpha = 0,\ \omega_i^\alpha = \lambda_i^\alpha \delta_{ij} \omega^j \tag{1}$$

$$d\lambda_i^\alpha \delta_{ij} + \lambda_i^\beta \delta_{ij} \omega_\beta^\alpha + \left(\lambda_j^\alpha - \lambda_i^\alpha \right) \omega_j^i = h_{ijk}^\alpha \omega^k . \tag{2}$$

Если в (2) $i = a, j = b, a \neq b$, то имеем $h_{abk}^\alpha = 0$. При $i = r,\ j = s,\ r \neq s$ получим $h_{rsk}^\alpha = 0$. Полагая в (2) $i = j = a$, а затем $i = j = b, b \neq a$, будем иметь $d\lambda_a^\alpha + \lambda_a^\beta \omega_\beta^\alpha = h_{aak}^\alpha \omega^k$, $d\lambda_b^\alpha + \lambda_b^\beta \omega_\beta^\alpha = h_{bbk}^\alpha \omega^k$. Поскольку левые части этих соотношений равны, то

$$\begin{gathered} h_{aaa}^\alpha = 0,\ h_{aar}^\alpha = h_{bbr}^\alpha,\ h_{aau}^\alpha = h_{bbu}^\alpha,\ a \neq b, \\ d\lambda_a^{m+1} = h_{aar}^{m+1} \omega^r + h_{aau}^{m+1} \omega^u, \quad \lambda_a^{m+1} \omega_{m+1}^{m+2} = h_{aar}^{m+2} \omega^r + h_{aau}^{m+2} \omega^u . \end{gathered} \tag{3}$$

Таким же образом можем получить следующие соотношения:

$$\begin{gathered} h_{rrr}^\alpha = 0,\ h_{rra}^\alpha = h_{ssa}^\alpha,\ h_{rru}^\alpha = h_{ssu}^\alpha,\ r \neq s, \\ d\lambda_r^{m+1} = h_{rra}^{m+1} \omega^\alpha + h_{rru}^{m+1} \omega^u, \quad \lambda_r^{m+1} \omega_{m+1}^{m+2} = h_{rra}^{m+2} \omega^\alpha + h_{rru}^{m+2} \omega^u . \end{gathered} \tag{4}$$

Из вторых уравнений систем (3) и (4) следует, что

$$h_{aar}^{m+2} = h_{rra}^{m+2} = 0, \quad \lambda_a^{m+1} \omega_{m+1}^{m+2} = h_{aau}^{m+2} \omega^u, \quad \lambda_r^{m+1} \omega_{m+1}^{m+2} = h_{rru}^{m+2} \omega^u . \tag{5}$$

Так как $\lambda_r^{m+1} = \dfrac{1-p_1}{p_2-1}\lambda_a^{m+1}$, то, сравнивая первые уравнения систем (3) и (4), будем иметь

$$h_{rra}^{m+1} = h_{aar}^{m+1} = 0,\ h_{rru}^{m+1} = \frac{1-p_1}{p_2-1}h_{aau}^{m+1}.$$

Тогда системы (3)-(5) сводятся к следующим двум равенствам:

$$d\lambda_a^{m+1} = h_{aau}^{m+1}\omega^u, \quad \lambda_a^{m+1}\omega_{m+1}^{m+2} = h_{aau}^{m+2}\omega^u. \tag{6}$$

.

Поскольку $h_{rru}^{m+2} = \dfrac{1-p_1}{p_2-1}h_{aau}^{m+2}$, то окончательно получаем следующие соотношения:

$$h_{aar}^{\alpha} = h_{rra}^{\alpha} = 0,\ h_{rru}^{\alpha} = \frac{1-p_1}{p_2-1}h_{aau}^{\alpha}.$$

Если в (2) положить $j=a, i=u$, то получим $\left(\lambda_a^{\alpha} - \lambda_u^{\alpha}\right)\omega_a^u = h_{aua}^{\alpha}\omega^a + h_{aur}^{\alpha}\omega^r + {}$ $+h_{auv}^{\alpha}\omega^v$. Согласно результату Чженя – Кюйпера (см.[12]) формы ω_a^u должны выражаться только через ω^a и ω^r. Поэтому из этого равенства следует, что $h_{auv}^{\alpha} = 0$ и, следовательно, $\left(\lambda_a^{\alpha} - \lambda_u^{\alpha}\right)\omega_a^u = h_{aua}^{\alpha}\omega^a + h_{aur}^{\alpha}\omega^r$. Отсюда при $\alpha = m+1$ и $\alpha = m+2$ имеем

$$\lambda_a^{m+1}\omega_a^u = h_{aau}^{m+1}\omega^a + h_{aur}^{m+1}\omega^r,\ \ \lambda_u^{m+2}\omega_a^u = -h_{aau}^{m+2}\omega^a - h_{aur}^{m+2}\omega^r \tag{7}$$

Если в (7) положить $u = p$, а затем $u > p$, то будем иметь

$$h_{aau}^{m+2} = h_{aur}^{m+2} = 0,\ u > p,\ \ \lambda_p^{m+2}\omega_a^p = -h_{aap}^{m+2}\omega^a - h_{apr}^{m+2}\omega^r. \tag{8}$$

Точно так же, если в (2) положить $j = r, i = u$, то получим

$$\lambda_r^{m+1}\omega_r^u = h_{rru}^{m+1}\omega^r + h_{aur}^{m+1}\omega^a,\ \lambda_u^{m+2}\omega_r^u = -h_{rua}^{m+2}\omega^a - h_{rru}^{m+2}\omega^r. \tag{9}$$

Из последнего равенства при $u = p$, а затем при $u > p$ будем иметь

$$h_{rru}^{m+2} = 0,\ u > p,\ \ \lambda_p^{m+2}\omega_r^p = -h_{rpa}^{m+2}\omega^a - h_{rrp}^{m+2}\omega^r. \tag{10}$$

Пусть в (2) $i = u, j = v, u, v > p$. Поскольку $\lambda_u^{\alpha} = \lambda_v^{\alpha} = 0$, то $h_{uvk}^{\alpha} = 0$ при указанных значениях индексов u, v. Если в (2) положить $i = j = p$, то будем иметь $d\lambda_p^{\alpha} + \lambda_p^{\beta}\omega_{\beta}^{\alpha} = h_{ppa}^{\alpha}\omega^a + h_{ppr}^{\alpha}\omega^r + h_{ppv}^{\alpha}\omega^v$. Так как $h_{app}^{\alpha} = h_{rpp}^{\alpha} = 0$ согласно результату Чженя – Кюйпера, то $d\lambda_p^{\alpha} + \lambda_p^{\beta}\omega_{\beta}^{\alpha} = h_{ppv}^{\alpha}\omega^v$. Отсюда при $\alpha = m+1$ и $\alpha = m+2$ имеем

$$\lambda_p^{m+2}\omega_{m+2}^{m+1} = h_{ppv}^{m+1}\omega^v, \quad d\lambda_p^{m+2} = h_{ppv}^{m+2}\omega^v. \tag{11}$$

Если в (2) положить $i = u, j = p, u > p$, то получим $\lambda_p^{\alpha}\omega_p^u = h_{upk}^{\alpha}\omega^k$. Поскольку $h_{auv}^{\alpha} = h_{ruv}^{\alpha} = 0$ при любых значениях индексов u, v, то из последнего равенства имеем $\lambda_p^{\alpha}\omega_p^u = h_{upp}^{\alpha}\omega^p + h_{upw}^{\alpha}\omega^w$, где $w > p$. Так как $h_{uvk}^{\alpha} = 0$ при $u, v > p$, то $\lambda_p^{\alpha}\omega_p^u = h_{upp}^{\alpha}\omega^p$ при $u > p$. Отсюда при $\alpha = m+1$ и $\alpha = m+2$, соответственно, имеем

$$h_{upp}^{m+1} = 0,\ \lambda_p^{m+2}\omega_p^u = h_{upp}^{m+2}\omega^p,\ u > p. \tag{12}$$

Если в (2) положить $j=a, i=r$, то получим

$$\left(\lambda_a^\alpha-\lambda_r^\alpha\right)\omega_a^r=h_{ara}^\alpha\omega^a+h_{arr}^\alpha\omega^r+h_{aru}^\alpha\omega^u .$$

Отсюда в силу $h_{aar}^\alpha=h_{arr}^\alpha=0$ имеем $\left(\lambda_a^\alpha-\lambda_r^\alpha\right)\omega_a^r=h_{aru}^\alpha\omega^u$. Полагая здесь $\alpha=m+1$, а затем $\alpha=m+2$, будем иметь, соответственно, $\left(\lambda_a^{m+1}-\lambda_r^{m+1}\right)\omega_a^r=$ $=h_{aru}^{m+1}\omega^u$, $h_{aru}^{m+2}=0$. Учитывая, что $\lambda_r^{m+1}=\dfrac{1-p_1}{p_2-1}\lambda_a^{m+1}$, из предпоследнего равенства получим

$$\lambda_a^{m+1}\frac{p_1+p_2-2}{p_2-1}\omega_a^r=h_{aru}^{m+1}\omega^u . \tag{13}$$

В итоге для компонент тензора h_{ijk}^α получаем следующие соотношения:

$$h_{abk}^\alpha=0, a\neq b,\ h_{rsk}^\alpha=0, r\neq s,\ h_{uvk}^\alpha=0, u>p, v>p ,$$
$$h_{aaa}^\alpha=h_{rrr}^\alpha=h_{aar}^\alpha=h_{arr}^\alpha=h_{auv}^\alpha=h_{ruv}^\alpha=h_{aru}^{m+2}=0 ,$$
$$h_{aau}^\alpha=h_{bbu}^\alpha, a\neq b, h_{rru}^\alpha=h_{ssu}^\alpha, s\neq r, h_{rru}^\alpha=\frac{1-p_1}{p_2-1}h_{aau}^\alpha ,$$
$$h_{aau}^{m+2}=h_{rru}^{m+2}=h_{upp}^{m+1}=0,\ u>p .$$

С учетом этих соотношений систему уравнений (6)-(13) можем преобразовать к следующему виду:

$$\begin{gathered}
d\lambda_a^{m+1}=h_{aau}^{m+1}\omega^u ,\quad \lambda_a^{m+1}\omega_{m+1}^{m+2}=h_{aap}^{m+2}\omega^p ,\quad \lambda_a^{m+1}\omega_a^u=h_{aau}^{m+1}\omega^a+h_{aur}^{m+1}\omega^r ,\\
\lambda_p^{m+2}\omega_a^p=-h_{aap}^{m+2}\omega^a ,\quad \lambda_r^{m+1}\omega_r^u=h_{rru}^{m+1}\omega^r+h_{aur}^{m+1}\omega^a ,\quad \lambda_p^{m+2}\omega_r^p=-h_{rrp}^{m+2}\omega^r\\
\lambda_p^{m+2}\omega_{m+1}^{m+2}=-h_{ppp}^{m+1}\omega^p ,\quad d\lambda_p^{m+2}=h_{ppv}^{m+2}\omega^v ,\quad \lambda_p^{m+2}\omega_p^u=h_{upp}^{m+2}\omega^p ,\ u>p ,\\
\frac{p_1+p_2-2}{p_2-1}\lambda_a^{m+1}\omega_a^r=h_{aru}^{m+1}\omega^u .
\end{gathered} \tag{14}$$

Из третьего уравнения этой системы при $u=p$ и четвертого уравнения, а затем из пятого уравнения при $u=p$ и шестого уравнения получаем следующие равенства:

$$\frac{h_{aap}^{m+1}}{\lambda_a^{m+1}}=-\frac{h_{aap}^{m+2}}{\lambda_p^{m+2}} ,\qquad \frac{h_{rrp}^{m+1}}{\lambda_r^{m+1}}=-\frac{h_{rrp}^{m+2}}{\lambda_p^{m+2}} ,\qquad h_{arp}^{m+1}=0 .$$

Поскольку $\lambda_r^{m+1}=\dfrac{1-p_1}{p_2-1}\lambda_a^{m+1}$, $h_{rrp}^{m+1}=\dfrac{1-p_1}{p_2-1}h_{aap}^{m+1}$, то левые части приведенных выше отношений совпадают и, следовательно, $h_{aap}^{m+2}=h_{rrp}^{m+2}$. В силу $h_{rrp}^{m+2}=\dfrac{1-p_1}{p_2-l}h_{aap}^{m+2}$ имеем $h_{aap}^{m+2}=h_{rrp}^{m+2}=0$. Следовательно, $h_{aap}^{m+1}=h_{rrp}^{m+1}=h_{ppp}^{m+1}=0$, $\omega_{m+1}^{m+2}=0$. Последнее условие геометрически означает, что нормальные к подмногообразию M векторные поля e_{m+1}, e_{m+2} параллельны в нормальном расслоении.

Учитывая эти результаты, систему (14) можем преобразовать к следующему виду:

$$d\ln\left|\lambda_a^{m+1}\right|=A_u\omega^u ,\ u>p ,\qquad \omega_a^u=A_u\omega^a+B_{aur}\omega^r ,\ u>p ,$$

$$\omega_r^u = A_u\omega^r + \frac{p_2-1}{1-p_1}B_{aur}\omega^a,\ u>p,\quad d\ln\left|\lambda_p^{m+2}\right| = D_v\omega^v, \tag{15}$$

$$\omega_p^u = D_u\omega^p,\ u>p,\quad \frac{p_1+p_2-2}{p_2-1}\omega_r^a = B_{aru}\omega^u,\ u>p,\quad \omega_a^p = \omega_r^p = \omega_{m+1}^{m+2} = 0,$$

где функции A_u, B_{aur} и D_v определяются по формулам $A_u = \dfrac{h_{aau}^{m+1}}{\lambda_a^{m+1}}$, $B_{aur} = \dfrac{h_{aur}^{m+1}}{\lambda_a^{m+1}}$, $D_v = \dfrac{h_{ppv}^{m+2}}{\lambda_p^{m+2}}$. Поскольку $h_{aap}^{m+1} = h_{arp}^{m+1} = 0$, то $A_p = B_{arp} = 0$, что и предполагается в дальнейшем.

Распределение $T^{(n_1)}$ задается следующей дифференциальной системой:

$$\omega^\alpha = 0, \omega^r = 0, \omega^u = 0. \tag{16}$$

Если учесть уравнения системы (15) и формулы

$$\omega_a^{m+1} = \lambda_a^{m+1}\omega^a,\ \omega_r^{m+1} = \lambda_r^{m+1}\omega^r,\ \omega_u^{m+1} = \omega_a^{m+2} = \omega_r^{m+2} = 0,$$

$$\omega_u^{m+2} = 0,\ u>p,\ \omega_p^{m+2} = \lambda_p^{m+2}\omega^p,$$

то легко показать, что внешние дифференциалы левых частей уравнений системы (16) также равны нулю. Это значит, что система (16) вполне интегрируема. Поскольку при выполнении условий (16) имеем

$$\omega_a^{m+1} = \lambda_a^{m+1}\omega^a, \lambda_a^{m+1} = \lambda_b^{m+1}, a\neq b, \omega_a^u = A_u\omega^a,\ u>p,\ \omega_a^{m+2} = \omega_a^r = \omega_a^p = 0,$$

то интегральное многообразие распределения $T^{(n_1)}$ представляет собой сферу размерности p_1, которую будем обозначать через S^{p_1}.

Точно так же можно доказать, что дифференциальная система $\omega^\alpha = 0$, $\omega^r = 0, \omega^u = 0$, задающая распределение $T^{(n_2)}$, также является вполне интегрируемой. Его интегральное многообразие является p_2-мерной сферой, которую будем обозначать через S^{p_2}.

Аналогично доказывается, что дифференциальные системы

$$\omega^\alpha = 0, \omega^a = 0, \omega^r = 0, \omega^u = 0,\ u>p,$$

$$\omega^\alpha = 0, \omega^a = 0, \omega^r = 0, \omega^p = 0,$$

задающие, соответственно, распределения $T^{(n_3)}$ и T', вполне интегрируемы. Интегральное многообразие распределения $T^{(n_3)}$ представляет собой кривую с касательным вектором e_p. Поскольку

$$de_p = \left(\lambda_p^{m+2}e_{m+2} + \sum_{\substack{u\\(u\neq p)}} D_u e_u\right)\omega^p,$$

то вектор e_p не является постоянным, а кривая, следовательно, не является прямой. Легко видеть, что интегральное многообразие распределения T' представляет собой $(m-p)$-мерную плоскость, которую будем обозначать через E_{m-p}.

Рассмотрим теперь дифференциальную систему $\omega^{\alpha}=0, \omega^{a}=0, \omega^{r}=0$, которая задает распределение $T^{(0)}=T^{(n_3)}+T'$. Легко проверить, что $d\omega^{\alpha}=0$, $d\omega^{a}=0$, $d\omega^{r}=0$ и, следовательно, распределение $T^{(0)}$ интегрируемо. Поскольку интегральное многообразие распределения $T^{(n_3)}$ является кривой, а интегральное многообразие распределения T' есть $(m-p)$-мерная плоскость, то интегральное многообразие распределения $T^{(0)}$ представляет собой огибающую однопараметрического семейства $(m-p)$-мерных плоскостей и, следовательно, является локально евклидовым.

Рассмотрим дифференциальную систему $\omega^{\alpha}=0,\ \omega^{u}=0$, задающую распределение $T^{(n_1)}+T^{(n_2)}=T^{(1)}$. Поскольку

$$d\omega^{\alpha}=0,\quad d\omega^{p}=0,\quad d\omega^{u}=\frac{p_1+p_2-2}{p_1-1}B_{uar}\omega^{a}\wedge\omega^{r},\ u>p,$$

то распределение $T^{(1)}$ будет вполне интегрируемым тогда и только тогда, когда $B_{uar}=0,\ u>p$, т. е. $h_{aur}^{m+1}=0$ при $u>p$.

Рассмотрим три случая.

1. Пусть индекс относительной дефектности подмногообразия M равен нулю, т. е. T'– нулевое подпространство. Тогда множество значений индекса u $(u>p)$ пусто и $B_{uar}=0$. В этом случае распределение $T^{(1)}=T^{(n_1)}+T^{(n_2)}$, определяемое системой $\omega^{\alpha}=0, \omega^{p}=0$, является интегрируемым. Система (15) в этом случае принимает следующий вид:

$$\lambda_a^{m+1}=const(\neq 0),\ d\ln\left|\lambda_p^{m+2}\right|=D_p\omega^p,\quad \omega_{m+1}^{m+2}=0,\ \omega_a^p=\omega_r^p=\omega_a^r=0.$$

Из последнего условия следует, что распределения $T^{(n_1)}$, $T^{(n_2)}$, $T^{(n_3)}$ параллельны в римановой связности на подмногообразии M. Поскольку эти распределения сопряжены относительно второй фундаментальной формы, то M является прямым произведением их интегральных многообразий, т. е. $M=S^{p_1}\times S^{p_2}\times C$, где C– интегральная кривая распределения $T^{(n_3)}$, которая не является прямой. Такое произведение имеет коразмерность три и более, что противоречит нашему предположению о коразмерности.

2. Пусть подмногообразие M имеет ненулевой индекс относительной дефектности, т. е. $\dim T'\geq 1$, и пусть $B_{aru}=0$. Тогда распределение $T^{(1)}=$ $=T^{(n_1)}+T^{(n_2)}$, определяемое системой $\omega^{\alpha}=0,\ \omega^{u}=0$, является интегрируемым. В этом случае система (15) сводится к следующей:

$$\lambda_a^{m+1}=const(\neq 0),\quad \lambda_p^{m+2}=const(\neq 0),\ \omega_a^u=A_u\omega^a,$$

$$\omega_r^u=A_u\omega^r,\ u>p,\quad \omega_a^p=\omega_r^p=0,\quad \omega_{m+1}^{m+2}=\omega_p^u=\omega_a^r=0. \qquad (17)$$

Условие $\omega_a^r=0$ означает, что распределения $T^{(n_1)}$ и $T^{(n_2)}$ параллельны на интегральном многообразии $M^{(1)}$ распределения $T^{(1)}$. Легко видеть, что эти распределения сопряжены относительно второй фундаментальной формы подмногообразия $M^{(1)}$ (это следует из (17) и предыдущих формул). Следовательно, $M^{(1)}$ является прямым произведением их интегральных многообразий, т. е. $M^{(1)} = S^{p_1} \times S^{p_2}$. Из выражений для $\omega_a^u, \omega_r^u, \omega_a^p, \omega_r^p$ (см. (17)) следует, что $M^{(1)}$ является вполне омбилическим подмногообразием в M. Поскольку подмногообразие M является полуэйнштейновым, то $M^{(1)}$ будет эйнштейновым (см. [4]). Этот факт можем доказать также путем прямого вычисления. Действительно, поскольку все матрицы второй фундаментальной формы подмногообразия $M^{(1)}$ имеют диагональный вид, то его тензор Риччи также имеет диагональный вид, а нормальная связность является плоской. Если через $\tilde{n}_a, \tilde{n}_r$ обозначим главные векторы кривизны подмногообразия $M^{(1)}$, то получим следующие формулы:

$$\tilde{n}_a = \lambda_a^{m+1} e_{m+1} + \sum_u f_u e_u, \quad \tilde{n}_r = \lambda_r^{m+1} e_{m+1} + \sum_u f_u e_u, \quad \tilde{H} = p_1 \tilde{n}_a + p_2 \tilde{n}_r.$$

Вычисляя по общей формуле (см. [8]) диагональные элементы $\tilde{\rho}_a, \tilde{\rho}_r$ тензора Риччи подмногообразия $M^{(1)}$, получим

$$\tilde{\rho}_a = \tilde{\rho}_r = \left(\lambda_b^{m+1}\right)^2 \frac{p_1 - 1}{p_2 - 1} + \sum_u f_u^2 .$$

Отсюда и следует эйнштейновость подмногообразия $M^{(1)}$. Отметим, что поскольку на $M^{(1)}$ выполняется равенство $\omega_u^\alpha = 0$, то $T^\perp(M)$ и $T^{(0)}$, как подрасслоения нормального расслоения для $M^{(1)}$, являются параллельными в нормальном расслоении. Так как $M^{(1)}$ является нормально плоским, то в $T^\perp(M)$ и $T^{(0)}$ индуцируются плоские нормальные связности. Это значит, что при $\omega^\alpha = 0, \omega^u = 0$ векторные поля e_u в $T^{(0)}$ можно выбрать так, чтобы они были параллельны. Последнее равносильно тому, что $\omega_u^v = \Gamma_{uw}^v \omega^w$. В дальнейшем мы будем считать, что e_u так и выбраны.

Продолжим изучение подмногообразия M. Поскольку в рассматриваемом случае $B_{aru} = 0$, то система (15) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & d \ln\left|\lambda_a^{m+1}\right| = A_u \omega^u, \\ & \omega_a^u = A_u \omega^a,\ \omega_r^u = A_u \omega^r,\ \omega_a^p = \omega_r^p = 0, \\ & \omega_p^u = D_u \omega^p,\ u > p,\ \omega_a^r = \omega_{m+1}^{m+2} = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Поскольку $A_p = 0$, то можем считать, что в первой, третьей и четвертой формулах системы (18) индекс u принимает все свои значения. Дифференцируя внешним образом первое и третье (или четвертое) уравнения этой системы и применяя лемму Картана, получим

$$dA_u - A_u \omega_u^v = E_{uv} \omega^v,\ E_{uv} = E_{vu}, \qquad dA_u - A_v \omega_u^v = A_u A_v \omega^v. \tag{19}$$

Следовательно $E_{uv} = A_u A_v$. Дифференцируя внешним образом уравнение $\omega_a^p = 0$ (или $\omega_r^p = 0$), будем иметь

$$\sum_u A_u D_u = 0. \tag{20}$$

Легко проверить, что $d\omega_{m+1}^{m+2} = 0$. Дифференцируя внешним образом уравнение $\omega_a^r = 0$, получим

$$\lambda_a^{m+1}\lambda_r^{m+1} + \sum_u A_u^2 = 0 .$$

Наконец, дифференцируя внешним образом остальные два уравнения системы (18), приходим к следующим соотношениям:

$$dD_v - D_u\omega_v^u = E_{vu}\omega^u,\ E_{vu} = E_{uv}, \tag{21}$$

$$dD_u - D_v\omega_v^u - D_uD_v\omega^v = G_u\omega^p, u,v > p . \tag{22}$$

Рассмотрим следующие векторные поля:

$$\xi = \sum_u A_u e_u ,\qquad \eta = D_p e_p ,\qquad \zeta = \sum_{\substack{u\\(u>p)}} D_u e_u .$$

Поскольку $A_p = 0$, то ξ ортогонально η, а из (20) следует, что ξ ортогонально также ζ. Очевидно, что η и ζ также ортогональны. Рассмотрим эти векторные поля на подмногообразии $M^{(1)}$. Так как на $M^{(1)}$ выполняются условия $\omega^\alpha = 0, \omega^u = 0$, то из (19), (21), (22) следует, что векторные поля ξ, $\eta+\zeta$, ζ параллельны в нормальном расслоении подмногообразия $M^{(1)}$. Из (21) при $v = p$ следует, что на $M^{(1)}$ функция D_p является постоянной. Поскольку на $M^{(1)}$ выполняются также условия $\omega_p^u = \omega_u^\alpha = 0$, то векторное поле e_p, а следовательно и η, параллельны в нормальном расслоении на $M^{(1)}$. Теперь мы можем специализировать репер следующим образом. Выберем вектор e_{p+1} коллинеарно ξ, а e_{p+2} коллинеарно ζ. Тогда

$$\xi = A_{p+1}e_{p+1},\quad A_v = 0,\ v \ne p+1,\quad \zeta = D_{p+2}e_{p+2},\quad D_v = 0,\ v \ne p+2, v > p .$$

Поскольку на $M^{(1)}$ функция A_{p+1} постоянна и $\omega_u^v = 0$, то для точки $x \in M^{(1)}$ имеем

$$d\left(x + A_{p+1}^{-1}e_{p+1}\right) = \omega^a e_a + \omega^r e_r + A_{p+1}^{-1}\left(\omega_{p+1}^a e_a + \omega_{p+1}^r e_r\right)$$

$$= \omega^a e_a + \omega^r e_r + A_{p+1}^{-1}\left(-A_{p+1}\omega^a e_a - A_{p+1}\omega^r e_r\right) = 0 .$$

Следовательно $x + A_{p+1}^{-1}e_{p+1} = const$ и $M^{(1)}$ принадлежит некоторой гиперсфере пространства E_n, для которой вектор e_{p+1} является нормальным.

Поскольку $A_v = 0$ при $v \ne p+1$, то из (19) при $u \ne p+1$ получаем $A_{p+1}\cdot$ $\cdot\omega_u^{p+1} = 0$. Если $A_{p+1} = 0$, то получим, что $\omega_a^u = \omega_r^u = \omega_a^r = 0$. В силу этого, как легко показать, подмногообразие M является прямым произведением двух сфер и локально евклидова подмногообразия, отличного от плоскости. Тогда M имеет коразмерность три или более, что противоречит предположению о коразмерности. Следовательно $A_{p+1} \ne 0$, и тогда $\omega_u^{p+1} = 0$. Поскольку $\omega_a^u = \omega_r^u = 0$ при $u \ne p+1$, то отсюда следует, что распределения $T^{(n_1)} + T^{(n_2)} + L,\ L'$, где L_x порождается вектором e_{p+1}, а L'_x является линейной оболочкой векторов $e_p, e_{p+2}, \ldots, e_m$, параллельны на подмногообразии M. Поскольку они сопряжены относительно второй фундаментальной формы, то M является их прямым произведением. Следовательно, M

есть прямое произведение риччи-полусимметрической гиперповерхности, описаной в пункте (e) теоремы 1 в [3], и локально евклидовой гиперповерхности, которая является гиперповерхностью ранга один (см. [8]).

3. Рассмотрим общий случай, когда в системе (15) среди коэффициентов B_{aur} имеются отличные от нуля и, кроме того, подмногообразие M имеет ненулевой индекс относительной дефектности, т.е. $\dim T' \geq 1$. Дифференцируя внешним образом первое уравнение системы (15), получим

$$\left(dA_u - A_v\omega_u^v\right)\wedge\omega^u + \frac{p_1+p_2-2}{p_1-1}A_u B_{ar}^u\omega^a\wedge\omega^r = 0 .$$

Отсюда легко получаются следующие соотношения:

$$dA_u - A_v\omega_u^v = L_{uv}\omega^v,\ L_{uv} = L_{vu},\quad \sum_u A_u B_{aru} = 0 . \tag{23}$$

В плоскости $T_x^{(0)}$ рассмотрим векторы

$$F = \sum_u A_u e_u,\ \ F_{ar} = \sum_u B_{aru} e_u .$$

Второе из равенств (23) является условием ортогональности инвариантного вектора F к системе векторов (F_{ar}). Поскольку $A_p = B_{arp} = 0$, то векторы F и F_{ar} ортогональны вектору e_p. Следовательно, они принадлежат пространству относительной дефектности T_x'. Очевидно, что $0 \leq rang\left(F_{ar}\right) \leq\ \ \leq \dim T_x'$. Рассмотрим все возможные случаи. Если $rang\left(F_{ar}\right) = 0$, то $B_{aru} = 0$ и мы получаем случай, рассмотренный в п. 2. Если $rang\left(F_{ar}\right) = \dim T_x'$, то на основании второго из равенств (23) заключаем, что $A_u = 0$ для любого u. Тогда $\omega_a^u = B_{aru}\omega^r$, и, дифференцируя это уравнение внешним образом, получим

$$\left(dB_{aru} - B_{bru}\omega_a^b - B_{asu}\omega_r^s - B_{arv}\omega_u^v\right)\wedge\omega^r$$
$$+\frac{p_2-1}{p_1+p_2-2}\,\frac{p_2-1}{p_1-1}\sum_r\left(B_{arv}B_{bru} + B_{aru}B_{brv}\right)\omega^v\wedge\omega^b = 0 .$$

Отсюда следует, что

$$dB_{aru} - B_{bru}\omega_a^b - B_{asu}\omega_s^r - B_{arv}\omega_u^v = h_{arus}\omega^s,\qquad \sum_r\left(B_{arv}B_{bru} + B_{aru}B_{brv}\right) = 0 .$$

Поскольку последнее равенство имеет место для всех значений индексов, то, полагая в нем $b = a,\ v = u$, будем иметь

$$\sum_r B_{aru}B_{aru} = 0 .$$

Следовательно, $B_{aru} = 0$, что противоречит предположению, что не все коэффициенты B_{aru} равны нулю. Пусть $0 < rang\left(F_{ar}\right) < \dim T_x'$. В этом случае в плоскости T_x' можем провести дополнительную адаптацию векторов $e_v, v \neq p$. Именно, вектор e_m можем выбрать так, чтобы он был коллинеарен инвариантному вектору F. Тогда $F = A_m e_m$ и, следовательно, $A_u = 0$

при $u \neq m$. Будем считать, что $A_m \neq 0$ (иначе получим предыдуший случай).

Теперь второе из равенств (23) принимает следующий вид: $A_m B_{arm} = 0$. Тогда $B_{arm} = 0$ и из второго уравнения системы (15) следует, что $\omega_a^m = = A_m \omega^a$. Из (22) при $u = m$ и $u \neq m$, соответственно, получаем

$$dA_m = L_{mv}\omega^v, \quad \omega_u^m = -\frac{L_{uv}}{A_m}\omega^v, \tag{24}$$

где $u = p, p+1, \cdots, m-1$. Далее, поскольку плоскость T_x' является евклидовым пространством, то, не умаляя общности, можем считать, что в T_x' в качестве локальных координат выбраны прямоугольные декартовы координаты. Тогда ω_u^v $(u \neq p, v \neq p)$ должны обращаться в нулевые формы при $\omega^\alpha = 0, \omega^a = 0, \omega^r = 0, \omega^p = 0$ (эта система задает распределение T'). Отсюда следует, что они должны выражаться только через $\omega^a, \omega^r, \omega^p$. Тогда из второго равенства в (24) следует, что

$$\omega_u^m = G_u^m \omega^p, \quad G_u^m = -\frac{L_{up}}{A_m}, u \neq m, \quad L_{uv} = 0, u \neq m, v \neq p.$$

Полагая в последнем равенстве $u = m$, получим $L_{um} = 0$ при $u \neq m$. Тогда первое из равенств (24) сводится к следующему равенству: $dA_m = L_{mm}\omega^m$.

Учитывая все полученные выше соотношения, а также уравнения системы (15) и дифференцируя внешним образом уравнение $\omega_a^m = A_m \omega^a$, получим

$$\left(L_{mm} - A_m^2\right)\omega^m \wedge \omega^a + A_m B_{arv}\omega^r \wedge \omega^v - \sum_v B_{arv} G_v^m \omega^r \wedge \omega^p = 0.$$

Поскольку $B_{arp} = 0$, а 2-формы $\omega^m \wedge \omega^a$, $\omega^r \wedge \omega^v, v \neq p$, $\omega^r \wedge \omega^p$ независимы, то все коэффициенты равны нулю. Следовательно, $A_m B_{arv} = 0$, т. е. $B_{arv} = 0$, и мы приходим к уже рассмотренному случаю.

Проведённые исследования позволяют сформулировать следующий результат.

Теорема. *Пусть в евклидовом пространстве E_n m мерное нормально плоское риччи-полусимметрическое подмногообразие M коразмерности два допускает*

а) только одну группу $W^{(1)}$ регулярных главных векторов кривизны, состоящую из двух неравных коллинеарных векторов,

б) только один ненулевой сингулярный главный вектор кривизны.

Тогда M локально является или подмногообразием кодефектности два, или представляет собой прямое произведение $K^m \times V$, где $K^m -$ полуэйнштейнова гиперповерхность в некотором евклидовом пространстве $E_{m+1}, m \geq 5$, которая является конусом над прямым произведением двух сфер, а $V -$ гиперповерхность ранга 1.

Армянский национальный политехнический университет

А. Р. Назарян

Нормально плоские риччи-полусимметрические подмногообразия коразмерности два с единичными индексами регулярности и сингулярности

Даётся геометрическое описание нормально плоских риччи-полусимметрических подмногообразий коразмерности два с двумя неравными коллинеарными регулярными и одним ненулевым сингулярным главными векторами кривизны в евклидовых пространствах.

Ա. Ռ. Նազարյան

Նորմալ հարթ երկու կոաչափի ռիչչի-կիսասիմետրիկ ենթաբազմություններ ռեգուլյարության և սինգուլյարության միավոր ինդեքսով

Էվկլիդեսյան տարածություններում տրվում է երկու կոչափի նորմալ հարթ երկու ոչ հավասար համագիծ ռեգուլյար և մեկ ոչ զրոյական սինգուլյար կորության գլխավոր վեկտորներով ռիչչի-կիսասիմետրիկ ենթաբազմաձևությունների երկրաչափական նկարագրությունը:

A. R. Nazaryan

Normally Flat Ricci-Semisymmetric Submanifolds of Codimention Two with Unity Indexes of Regularity and Singularity

A geometric description of normally flat Ricci-semisymmetric submanifolds of codimension two with two unequal collinear regular and one non-zero singular principal curvature vectors in Euclidean spaces is presented.

Литература

1. *Lumiste Ü.* Semiparallel submanifolds in space forms. New York: Springer. 2009. 306 p.
2. *Мирзоян В. А.* - Изв. вузов. Математика. 1992. № 6. С. 80-89.
3. *Мирзоян В. А.* - Матем. сб. – 2000. Т. 191**.** № 9. С. 65-80.
4. *Мирзоян В. А.* - Изв. РАН. Сер. матем. 2003. Т. 67. № 5. С. 107-124.
5. *Мирзоян В. А.* - Матем. сб. 2006. Т. 197. № 7. С. 47-76.
6. *Мирзоян В. А.* - Матем. сб. 2008. Т. 199. № 3. С. 69-94.
7. *Мирзоян В. А., Мачкалян Г. С.* - ДНАН Армении. 2009. Т. 109. № 2. С. 119-125.
8. *Мирзоян В. А.* - Изв. РАН. Сер. матем. 2011. 75. № 6. С. 47-78.
9. *Мирзоян В. А., Мачкалян Г. С.* - Изв. вузов. Математика. 2012. № 9. С.19-31.
10. *Mirzoyan V. A.* - Reports of NAS RA. 2012. V. 112. № 1. P. 19-29.
11. *Szabo Z. I.* - J. Differential Geom. 1982. V. 17**.** № 4. P. 531-582.
12. *Chern S. S., Kuiper N.* - Ann. of. Math. 1952. V. 56. № 3. P. 422-430.