ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 116 2016 № 1

МАТЕМАТИКА

УДК 517.52

Академик В. С. Захарян, Р. В. Даллакян, И. В. Оганисян

О граничных значениях произведения B_α

(Представлено 9/II 2016)

Ключевые слова: *оператор интегро-дифференцирования Римана – Лиувилля, произведение Бляшке, произведение Джрбашяна, ядра Джрбашяна, классы типа Дирихле.*

Введение. Пусть $\mathbb{D}=\{z;|z|<1\}$ – единичный круг комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $0<p<+\infty$. Класс H^p определяется как множество тех аналитических в единичном круге $\mathbb{D}$ функций f, для которых выполняется условие

$$\sup_{0\le r<1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|^p d\varphi\right\}<+\infty .$$

О классах H^p можно прочесть в [1, 2].

Пусть $0<p<+\infty, -1<\alpha<+\infty$. Класс A_α^p определяется как множество тех аналитических в $\mathbb{D}$ функций, для которых выполняется условие

$$\|f\|_{A_\alpha^p}^p=\int_0^r\int_0^{2\pi}(1-r)^\alpha\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^p rdrd\theta<+\infty .$$

Пусть $0<p<+\infty, -1<\alpha<+\infty$. Класс D_α^p определяется как множество тех аналитических в $\mathbb{D}$ функций, для которых выполняется условие

$$\|f\|_{D_\alpha^p}^p=\int_0^r\int_0^{2\pi}(1-r)^\alpha\left|f'\left(re^{i\theta}\right)\right|^p rdrd\theta<+\infty .$$

В случае, когда $\alpha+1<p$, классы D_α^p называются классами типа Дирихле. Класс D_0^2 называется классом аналитических в единичном круге функций с конечным интегралом Дирихле.

Пусть последовательность комплексных чисел $\{z_n\}\subset\mathbb{D}$ такая, что

$$\sum_{n=1}^\infty\left(1-|z_n|\right)<+\infty .$$

Произведением Бляшке называется следующая функция:

$$B\left(z;\{z_n\}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{z_n-z}{1-\bar{z}_n z}\cdot\frac{|z_n|}{z_n},\ z\in\mathbb{D}.$$

О свойствах произведения Бляшке можно прочесть, например, в [1, 2].

М. М. Джрбашяном ([3], глава IX) введены в рассмотрение классы $N_\alpha(-1<\alpha<+\infty)$ мероморфных в единичном круге функций и установлено их параметрическое представление.

Класс $N_\alpha(-1<\alpha<+\infty)$ определяется посредством α-характеристики

$$T_\alpha(r,F)=m_\alpha(r,F)+N_\alpha(r,F)$$

как множество тех мероморфных в круге $|z|<1$ функций $F(z)$, для которых

$$\sup_{0<r<1}\left\{T_\alpha(r,F)\right\}<+\infty .$$

При этом функции $m_\alpha(r,F)$, $N_\alpha(r,F)$ и $T_\alpha(r,F)$ представляют своеобразные аналоги известных неванлинновских функций $m(r,F)$, $N(r,F)$ и $T(r,F)$, совпадая с ними при значении параметра $\alpha=0$, так что класс N_0 совпадает с классом N Неванлинны.

Вместе с тем важной особенностью классов N_α является то обстоятельство, что для любых значений $-1<\alpha_1<\alpha_2<+\infty$ имеет место строгое включение $N_{\alpha_1}\subset N_{\alpha_2}$ и, в частности

$$N_\alpha\subset N_0=N,\ (-1<\alpha<0).$$

Оператор интегро-дифференцирования $D^{-\alpha}$ (при $-1<\alpha<+\infty$) в смысле Римана – Лиувилля с началом в нулевой точке определяется следующим образом:

$$D^{-\alpha}\{\varphi(r)\}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^r (r-t)^{\alpha-1}\varphi(t)\,dt,\ (0<\alpha<+\infty),$$

$$D^{0}\{\varphi(r)\}=\varphi(r),$$

$$D^{-\alpha}\{\varphi(r)\}=\frac{d}{dr}D^{-(1+\alpha)}\{\varphi(r)\},\quad (-1<\alpha<0).$$

Для аналитических функций, принадлежащих классу N_α, функция $T_\alpha(r,F)$ определяется следующим образом:

$$T_\alpha(r,f)=\int_{-\pi}^{\pi} D_{(+)}^{-\alpha}\log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta ,$$

где

$$D_{(+)}^{-\alpha}\{\varphi(r)\}=\max\left\{D^{-\alpha}\{\varphi(r)\};0\right\}.$$

Известно, что аналитическая функция класса N_α имеет вид

$$f(z)=e^{i\gamma+\lambda k_\alpha}z^\lambda B_\alpha\left(z;\{a_n\}\right)\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}s_\alpha\left(e^{-i\theta}z\right)d\psi(\theta)\right\},$$

где γ – произвольное вещественное число, λ – произвольное натуральное число, $K_\alpha=\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+\alpha)}$, $\psi(\theta)$ – вещественная функция с конечным полным изменением на $[-\pi;\pi]$,

$$B_\alpha\left(z;\{a_n\}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{-W_\alpha(z;a_n)},$$

$$W_\alpha(z,\xi)=\int_{|\xi|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}dx-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)}\left\{\xi^{-k}\int_0^{|\xi|}(1-x)^\alpha x^{k-1}dx-\bar{\xi}^k\int_{|\xi|}^{1}(1-x)^\alpha x^{k-1}dx\right\}z^k,\ |z|<1,\ |\xi|<1,$$

$$S_\alpha(z)=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\left[\frac{2}{(1-z)^{1+\alpha}}-1\right],\ |z|<1.$$

Функция $S_\alpha(z)$ называется ядром Джрбашяна типа Шварца. $\operatorname{Re}S_\alpha(z)$ называется ядром Джрбашяна типа Пуассона. При $\alpha=0$ эти ядра совпадают с ядрами Шварца и Пуассона соответственно.

$B_\alpha\left(z;\{a_n\}\right)$ называется произведением Джрбашяна. В специальном случае $\alpha=0$ произведение B_α совпадает с произведением Бляшке.

$$B_0\left(z;\{a_n\}\right)=B\left(z;\{a_n\}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-z}{1-\bar{a}_n z}\frac{|a_n|}{a_n}.$$

В работе [4] М. М. Джрбашяну и В. С. Захаряну удалось доказать следующее утверждение.

Теорема (*о взаимосвязи произведений* B_α *и* B). *При условии*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-|a_n|\right)^{1+\alpha}<+\infty,\ (-1<\alpha<0)$$

имеет место представление

$$B_\alpha\left(z;\{a_n\}\right)=B\left(z;\{a_n\}\right)\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}s_\alpha\left(e^{-i\theta}z\right)d\omega(\theta)\right\},$$

где $\omega(\theta)$ *– невозрастающая функция ограниченной вариации на* $[0,2\pi]$, *имеющая вид*

$$\omega(\theta)=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\theta}D^{-\alpha}\log\left|\frac{B_\alpha\left(r_n e^{i\theta};\{a_n\}\right)}{B\left(r_n e^{i\theta};\{a_n\}\right)}\right|d\theta,$$

$$\left(0<r_1<r_2<\ldots<r_n<\ldots,\ r_n\uparrow 1\right).$$

Основные результаты. Лемма 1. *Пусть* $-1<\alpha<0$ *и пусть последовательность* $\{z_n\}\subset\mathbb{D}$ *такая, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-|z_n|\right)^{1+\alpha}<+\infty .$$

Тогда если произведение $B_\alpha\left(z;\{z_n\}\right)$ *не принадлежит классу* D_β^2, $0<\beta+1<2$, *то этому классу не принадлежит также произведение* $B_\alpha^*=\tilde{B}_\alpha\cdot B_\alpha$, *где*

$$\tilde{B}_\alpha\left(z;\{z_k\}\right)=\prod_{k=1}^{N}b_\alpha\left(z;z'_k\right)$$

конечное произведение Джрбашяна $\left(\{z'_k\}_{k=1}^{N}\subset\mathbb{D}\right)$.

Теорема 1. *Пусть* $-1<\alpha\le 0$ *и пусть последовательность* $\{z_n\}\subset\mathbb{D}$ *такая, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-|z_n|\right)^{1+\alpha}<+\infty .$$

Тогда если произведение $B_\alpha\left(z;\{z_n\}\right)$ *имеет конечный интеграл Дирихле, то* B_α *является конечным произведением.*

Теорема 2. *Пусть* $-1<\alpha\le 0$ *и пусть последовательность* $\{z_n\}\subset\mathbb{D}$ *удовлетворяет условию Бляшке – Джрбашяна. Тогда коэффициенты Тейлора любого бесконечнего произведения* $B_\alpha\left(z;\{z_n\}\right)$ *удовлетворяют условию*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\hat{B}_\alpha(n)\right|^2 n=+\infty .$$

Теорема 3. *Пусть* $-1<\alpha\le 0$ *и пусть последовательность* $\{z_n\}\subset\mathbb{D}$ *удовлетворяет условию Бляшке – Джрбашяна. Тогда производное бесконечного произведения* $B_\alpha\left(z;\{z_n\}\right)$ *не принадлежит классу* H^1.

Утверждение теоремы следует из следующего факта:

$$H^1\subset A_0^2 .$$

Исследование выполнено при финансовой поддержке Государственного комитета по науке МОН РА в рамках научного проекта № 15T-1A083**.**

Армянский национальный политехнический университет
e-mail: mathdep@seua.am, dallakyan57@mail.ru, ishjhanh@gmail.com

Академик В. С. Захарян, Р. В. Даллакян, И. В. Оганисян

О граничных значениях произведения B_α

Пользуясь аппаратом интегро-дифференцирования Римана – Лиувилля, М. М. Джрбашян обобщил класс мероморфных в единичном круге функций Р.

Неванлинны, вводя также произведения $B_\alpha(-1<\alpha<+\infty)$, которые в специальном случае $\alpha=0$ совпадают с произведениями Бляшке. При $-1<\alpha<0$ М. М. Джрбашяну и В. С. Захаряну удалось установить взаимосвязь между произведениями B_α и B Бляшке. В настоящей работе, пользуясь теоремой о взаимосвязи произведений $B_\alpha(-1<\alpha<0)$ и $B=B_0$, доказывается, что бесконечные произведения B_α не могут принадлежать классу D_0^2-аналитических в единичном круге функций с конечным интегралом Дирихле. Это означает, что производная произведения B_α не может принадлежать также классу H^1.

Ակադեմիկոս Վ. Ս. Զաքարյան, Ռ.Վ. Դալլաքյան,
Ի. Վ. Հովհաննիսյան

B_α արտադրյալների եզրային արժեքների մասին

Կիրառելով Ռիման – Լիուվիլլի ինտեգրոդիֆերենցման օպերատորը՝ Մ. Մ. Ջըրբաշյանը ներմուծել է միավոր շրջանում մերոմորֆ ֆունկցիաների $N_\alpha(-1<\alpha<+\infty)$ դասերը և $B_\alpha(-1<\alpha<+\infty)$ արտադրյալները, որոնք $\alpha=0$ հատուկ դեպքում համընկնում են Բլյաշկեի B արտադրյալների հետ: Հետագայում Մ. Մ. Ջրբաշյանի և Վ. Ս. Զաքարյանի կողմից ստացվել է B_α և B արտադրյալները կապող բանաձև, երբ $-1<\alpha<0$: Այս աշխատանքում, օգտվելով նշված կապից, ապացուցվում է, որ անվերջ $B_\alpha(-1<\alpha<0)$ արտադրյալները չեն կարող պատկանել միավոր շրջանում անալիտիկ և վերջավոր Դիրիխլեյ

ի ինտեգրալ ունեցող ֆունկցիաների D_0^2 դասին: Ինչը նշանակում է, որ $B'_\alpha(-1<\alpha<0)$ չի կարող պատկանել H^1 դասին:

Academician V.S. Zakaryan, R.V. Dallakyan, I.V. Hovhannisyan

On the Boundary Values of the Product B_α

The class of R. Nevanlinna’s meromorphic functions is generalized by M. M. Djrbashyan using the Riemann – Liouville integration-differentiation operator in the unit circle including the product $B_\alpha(-1<\alpha<+\infty)$, which in the special case of $\alpha=0$ coincide with the Blaschke product. Furthermore, when $-1<\alpha<0$, a connection between the products B_α and B of Blaschke is shown by M. M. Djrbashyan and V. S. Zakaryan. In this work, using this connection theorem we prove that the infinite product $B_\alpha(-1<\alpha<0)$ doesn’t belong to D_0^2 - the class of analytic functions in the unit circle with finite Dirichlet integral. It means that the derivative of B_α doesn’t belong to the class H^1.

Литература

1. *Привалов И. И.*. Граничные свойства аналитических функций. М.–Л. Гос. изд. техн.-теоретич. лит. 1950.

2. *Duren P. L.* Theory of H^p Spaces. New York - London. Academic Press. 1970.
3. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М. Наука. 1966. 671 с.
4. *Джрбашян М. М., Захарян В. С.* - Мат. заметки. 1968. Т. 4. N 1. С. 3-10.
5. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М. Наука. 1981. 583 с.
6. *Kim H. O.* - Pacific journal of Math. 1984. V. 114. N 1.
7. *Захарян В. С.* - Изв. АН АрмССР. Математика. 1988. Т. 23. N 2. С. 189-192.
8. *Захарян В. С.* - Изв. АН АрмССР. Математика. 1968. Т. 3. N 4-5. С. 287-300.