ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 115 2015 № 4

МАТЕМАТИКА

УДК 517

И. В. Оганисян

О наилучшей оценке тейлоровских коэффициентов функций класса $A_\alpha\left(-1<\alpha<+\infty\right)$

(Представлено академиком В. С. Захаряном 20/XI 2015)

Ключевые слова: *класс Островского, классы Джрбашяна, произведение Бляшке, произведение Джрбашяна, коэффициенты Тейлора, интегральное представление.*

Классам аналитических в единичном круге функций посвящены многочисленные исследования. Среди них важное место занимают введенные М. М. Джрбашяном общеизвестные классы $A_\alpha\left(-1<\alpha<+\infty\right)$, обладающие свойством

$$A_\alpha\subset A_0\ \left(-1<\alpha<0\right),$$
$$A_0\subset A_\alpha\ \left(0<\alpha<+\infty\right),$$

где $A_0\equiv A$ – известный класс Островского.

Согласно хорошо известной теореме Р. Неванлинны ([2, 3]) класс A аналитических в круге $|z|<1$ функций, для которых

$$\sup_{0<r<1}\left\{\int_0^{2\pi}\log^+\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|d\varphi\right\}<+\infty,$$

совпадает с множеством функций $f(z)$, допускающих факторизационное представление вида

$$f(z)=e^{i\alpha}z^\lambda B(z)\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}d\psi(\theta)\right\},\ |z|<1,$$

где $\alpha\left(\operatorname{Im}\alpha=0\right)$ – постоянная, $\lambda>0$ – целое число, $B(z)$ – функция Бляшке

$$B\left(z;z_k\right)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{z_k-z}{1-\overline{z}_kz}\frac{|z_k|}{z_k}$$

и $\psi(\theta)$ – вещественная функция с конечным полным изменением на $\left[0,2\pi\right]$.

Для функции класса A С. Н. Мергеляном получена оценка тейлоровских коэффициентов ([3], с.151)

$$|a_n| \le \exp\left\{2\sqrt{cn}\left(1+o(1)\right)\right\}, n \to \infty . \tag{1}$$

Обозначим через $A_\alpha\left(-1<\alpha<+\infty\right)$ класс аналитических в круге $|z|<1$ функций $f(z)$, удовлетворяющих условию ([1], с. 655)

$$\underset{0<r<1}{Sup}\left\{\int_0^{2\pi} D_{(+)}^{-\alpha} \log\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi\right\} < +\infty ,$$

где

$$D_{(+)}^{-\alpha} \log\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right| = \begin{cases} D^{-\alpha} \log\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|, \ D^{-\alpha} \log\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right| \ge 0, \\ 0, D^{-\alpha} \log\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right| \le 0, \end{cases}$$

$D^{-\alpha}$ – интегродифференциальный оператор произвольного порядка в смысле Римана – Лиувилля с началом в нулевой точке, который определяется следующим образом:

$$D^{-\alpha} f(r) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^r (r-t)^{\alpha-1} \varphi(t)\, dt, \left(0<\alpha<+\infty\right),$$

$$D^{-\alpha} f(r) \equiv \frac{d}{dr} D^{-(1+\alpha)} f(r), \left(-1<\alpha<0\right).$$

Для специального случая $\alpha=0$ оператор D^0 определяется как тождественный оператор, т.е.

$$D^0 f(r) \equiv f(r).$$

Напомним основную теорему М. М. Джрбашяна о факторизации классов A_α :

Класс $A_\alpha\left(-1<\alpha<+\infty\right)$ совпадает с множеством функций $f(z)$, допускающих представление вида

$$f(z) = c\, z^\lambda B_\alpha\left(z; z_k\right) \exp\left\{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_\alpha\left(e^{-i\theta} z\right) d\psi(\theta)\right\}, \tag{2}$$

где c – постоянная, λ – целое число, $\psi(\theta)$ – вещественная функция с конечным полным изменением на $[0, 2\pi]$

$$S_\alpha(z) = \Gamma(1+\alpha)\left\{\frac{2}{(1-z)^{1+\alpha}} - 1\right\}, \tag{3}$$

$B_\alpha\left(z; z_k\right)$ – сходящиеся в круге $|z|<1$ произведения Джрбашяна

$$B_\alpha\left(z; z_k\right) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{-W_\alpha\left(z; z_k\right)}, \tag{4}$$

где

$$W_\alpha(z;\xi) = \int_{|\xi|}^{1} \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)} \cdot$$

$$\cdot\left\{\zeta^{-k}\int\limits_0^{|\xi|}(1-x)^{\alpha}x^{k-1}dx-\bar{\zeta}^{k}\int\limits_{|\xi|}^{1}(1-x)^{\alpha}x^{-k-1}dx\right\}z^k \tag{5}$$

при условии

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-|z_k|\right)^{1+\alpha}<+\infty\,. \tag{6}$$

С. С. Степаняном [4] получена неулучшаемая оценка тейлоровских коэффициентов для функций классов $A_\alpha\left(-1<\alpha\le 0\right)$

$$|a_n|\le \exp\left\{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}\sqrt[\alpha+2]{c_\alpha\left(1+\alpha\right)n^{1+\alpha}}\left(1+o(1)\right)\right\},\ \ n\to\infty\,,$$

которая при значении параметра $\alpha=0$ совпадает с оценкой (1).

Обозначим через $A_\alpha^*\left(-1<\alpha<+\infty\right)$ множество тех функций из A_α, в представлении (2) которых функция $\psi(\theta)$ невозрастающая.

Классы $A_\alpha^*\left(-1<\alpha<0\right)$ являются некоторыми подклассами ограниченных аналитических функций класса A_α. Для тейлоровских коэффициентов этих функций (в том числе и для произведений B_α) известна [7] более точная оценка:

если функция

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n,\ \ |z|<1$$

принадлежит классу $A_\alpha^*\left(-1<\alpha\le 0\right)$, то имеет место оценка

$$|a_n|=O\left(n^{\alpha}\right),\ n\to\infty\,.$$

В работе [6] для одного фактора произведений B_α

$$b_\alpha\left(z;\zeta\right)=\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)\exp\left\{-W_\alpha\left(z;\zeta\right)\right\}$$

получена оценка

$$\left|b_\alpha\left(z;\zeta\right)\right|\le \exp\left\{const\left|\frac{1-|\zeta|^2}{1-\dfrac{\bar{\zeta}z}{|\zeta|}}\right|^{1+\alpha}\right\},\ \ -1<\alpha<+\infty\,. \tag{7}$$

При $\alpha\in\left(-1;0\right]$, так как $\left|b_\alpha\left(z;\zeta\right)\right|\le 1,$ оценка (7) является слишком грубой.

Основные результаты. Следующая теорема распространяет указанную оценку Степаняна на все значения параметра $\alpha\in\left(-1;+\infty\right)$.

Теорема 1. *Если функция*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n,\ |z|<1 \tag{8}$$

принадлежит классу $A_\alpha\left(-1<\alpha<+\infty\right)$, *то имеет место следующая оценка:*

$$|a_n| \le \exp\left\{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}\sqrt[\alpha+2]{c_\alpha(1+\alpha)n^{1+\alpha}}\left(1+o(1)\right)\right\}, \ n\to\infty, \tag{9}$$

где c_α *– некоторая положительная константа.*

Пример функции $F_\alpha(z)=\exp\left\{\dfrac{c}{(1-z)^{1+\alpha}}\right\}, c>0$, рассмотренный в [4], показывает, что оценка (9) точна, т. е. справедлива следующая

Теорема 2. *Оценка (9) неулучшаема, если* $\alpha\in(-1;+\infty)$.

Исходя из теорем 1 и 2 можно получить интегральное представление для функций классов $A_\alpha(-1<\alpha<+\infty)$.

Теорема 3. *Если* $f(z)\in A_\alpha(-1<\alpha<+\infty)$, *то существует функция* $\varphi_\alpha(t)\in L_2$ *такая, что имеет место следующее интегральное представление:*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\varphi_\alpha(t)\exp\left\{cS_\alpha\left(\bar{t}z\right)\right\}\frac{dt}{t}, \ |z|<1,$$

где функция $S_\alpha(z)$ *определяется по формуле (3).*

Отметим, что доказанное представление для значений параметра $\alpha\in(-1;0]$ получено С.С. Степаняном [5].

Армянский национальный политехнический университет
e-mail: ishkhanh@gmail.com

И. В. Оганисян

О наилучшей оценке тейлоровских коэффициентов функций класса $A_\alpha(-1<\alpha<+\infty)$

Известные оценки для тейлоровских коэффициентов функций класса A_α $(-1<\alpha\le 0)$ распространены на все значения $\alpha\in(-1;+\infty)$. Установлена их неулучшаемость и получено интегральное представление для этих функций.

Ի. Վ. Հովհաննիսյան

$A_\alpha(-1<\alpha<+\infty)$ դասի ֆունկցիաների Թեյլորի գործակիցների լավագույն գնահատականի մասին

$A_\alpha(-1<\alpha\le 0)$ դասերի ֆունկցիաների թեյլորյան գործակիցների համար հայտնի լավագույն գնահատականները տարածվում են պարամետրերի բոլոր արժեքների վրա՝ $\alpha\in(-1;+\infty)$, որը ևս լավագույն է: Ստացվում է նաև ինտեգրալ ներկայացում ընդհանուր դեպքում:

I. V. Hovhannisyan

On the Best Estimation for Taylor Coefficents of Functions of Classes $A_\alpha(-1<\alpha<+\infty)$

We prove the best estimations for Taylor coefficients of functions of classes $A_\alpha(-1<\alpha<+\infty)$ introduced by M. M. Djrbashyan. Also an integral representation is found for these functions.

Литература

1. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления в комплексной области. М. Наука. 1966. 672 с. (гл. IX).
2. *Неванлинна Р.* Однозначные аналитические функции. М. Гостиздат. 1941.
3. *Привалов И. И.* Граничные свойства аналитических функций, 2-е изд. М.-Л., 1950. 336 с.
4. *Степанян С. С.* – ДАН АрмССР. 1982. Т. 75. N 3. С. 107-113.
5. *Степанян С. С.* Канд. дис. Ереван. 1984.
6. *Багдасарян Д. Т.* – Изв. АН АрмССР. Математика. 1990. Т. 25. N 4. С. 401-408.
7. *Оганисян И. В.* – ДАН АрмССР. 1989. Т. 88. N 2. С. 55-60.