ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 115 2015 № 4

МАТЕМАТИКА

УДК 519.6

Ф. А. Талалян

Об условно сходящихся рядах в гильбертовом пространстве

(Представлено академиком А. А. Таляляном 21/IX 2015)

Ключевые слова: *гильбертовы пространства, условная сходимость.*

Начнем с напоминания о том, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ в некотором топологическом векторном пространстве называется условно сходящимся, если он сходится, но некоторая его перестановка расходится.

Известно, что для того, чтобы действительный числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ представлял собой перестановку условно сходящегося ряда, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\lim_{k\to\infty} x_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} x_k^+ = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^- = \infty, \tag{1}$$

где использованы следующие общепринятые обозначения:

$$a^+ = \begin{cases} a \text{ если } a > 0 \\ 0 \text{ если } a \le 0, \end{cases} \qquad a^- = \begin{cases} -a \text{ если } a < 0 \\ 0 \text{ если } a \ge 0. \end{cases}$$

В настоящей заметке рассматривается вопрос – какое утверждение, аналогичное приведенному, имеет место для рядов в действительном гильбертовом пространстве.

Обозначим через (x, y) скалярное произведение векторов x и y в H. Справедлива следующая

Теорема. *Пусть H – действительное гильбертово пространство, $x_k \in H$, $k = 1, 2, \ldots$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ является перестановкой условно сходящегося ряда в H. Тогда существует вектор $h \in H$ с $\|h\| = 1$ такой, что проекции x_k на h образуют перестановку условно сходящегося числового ряда, т.е. выполняются равенства*

$$\lim_{k\to\infty}(x_k,h)=0,\ \ \sum_{k=1}^{\infty}(x_k,h)^{+}=\sum_{k=1}^{\infty}(x_k,h)^{-}=\infty. \qquad (2)$$

Доказательству теоремы предпошлем две леммы.

Лемма1. *Пусть H – действительное гильбертово пространство y_k, $k=1,2,\ldots$. Последовательность векторов H такая, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|y_k\|^2=\infty .$$

Тогда для любого $M>0$ найдется конечная система векторов $\{y_{k_1},\ldots,y_{k_s}\}$ такая, что

$$\left\|\sum_{i=1}^{s}y_{k_i}\right\|>M.$$

Доказательство. Возьмем натуральное число N настолько большим, чтобы

$$\sum_{k=1}^{N}\|y_k\|^2>4M^2. \qquad (3)$$

Далее построим последовательность чисел ε_k, $k=1,2\ldots,N$ следующим образом. Положим $\varepsilon_1=1$ и для каждого $1<k\le N$

$$\varepsilon_k=\begin{cases}1 \ \ \textit{если} \ \ \sum\limits_{i=1}^{k-1}(\varepsilon_i y_i,y_k)\ge 0\\ -1 \ \ \textit{если} \ \ \sum\limits_{i=1}^{k-1}(\varepsilon_i y_i,y_k)<0.\end{cases}$$

Тогда будем иметь

$$\sum_{i=1}^{k-1}(\varepsilon_i y_i,\varepsilon_k y_k)\ge 0 \quad k=2,\ldots,N. \qquad (4)$$

Далее из (3), (4) и очевидного тождества

$$\left\|\sum_{k=1}^{N}\varepsilon_k y_k\right\|^2=\sum_{k=1}^{N}\|y_k\|^2+2\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{k-1}(\varepsilon_i y_i,\varepsilon_k y_k)$$

легко следует неравенство

$$\left\|\sum_{k=1}^{N}\varepsilon_k y_k\right\|>2M. \qquad (5)$$

Неравенство (5) можно переписать в виде

$$\left\|\sum{}^{/}y_k-\sum{}^{//}y_k\right\|>2M, \qquad (6)$$

где под знаком суммы $\sum{}^{/}$ стоят слагаемые $\varepsilon_k y_k$ с $\varepsilon_k=1$, а под знаком $\sum{}^{//}$ – слагаемые с $\varepsilon_k=-1$. Очевидно, одна из этих сумм будет искомой.

Следствие. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}y_k$ векторов гильбертова пространства H расходится, то для любого $M>0$ найдется такая конечная система $\{y_{k_1},\ldots,y_{k_s}\}$ членов ряда, что

$$\left\| \sum_{i=1}^{s} y_{s_i} \right\| > M.$$

Лемма 2. *Пусть в гильбертовом пространстве* H *задан условно сходящийся ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k. \tag{7}$$

Тогда существует возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$, удовлетворяющая условиям:

а) существует число $L > 0$ такое, что

$$\left\| \sum_{k=1}^{n_i} x_k \right\| \le L, \quad i = 1, 2, ...; \tag{8}$$

б) для каждого i сумму $\sum\limits_{k=n_i+1}^{n_i+1} x_k$ можно разбить на две части без общих слагаемых

$$\sum_{k=n_i+1}^{n_i+1} x_k = \sum\nolimits_i^{/} x_k + \sum\nolimits_i^{//} x_k \tag{9}$$

так, что

$$\left\| \sum\nolimits_i^{/} x_k \right\|, \left\| \sum\nolimits_i^{//} x_k \right\| \to \infty \quad \text{при} \quad i \to \infty. \tag{10}$$

Доказательство. По условию ряд (7) сходится.

Поэтому последовательность его частных сумм ограничена. Пусть

$$L = \sup_{N} \sum_{k=1}^{N} x_k. \tag{11}$$

Пусть σ – такая перестановка натуральных чисел, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_{\sigma(k)} \tag{12}$$

расходится.

Далее с помощью индукции будут построены три последовательности натуральных чисел $\{p_i\}, \{q_i\}, \{n_i\}$ и последовательность конечных систем натуральных чисел $M_i = \left\{ k_j^i : \ p_i \le j \le q_i \right\}$ таких, что выполняются условия (13)–(16):

$$p_i < q_i < p_{i+1}, \ i = 1, 2, ..., \tag{13}$$

$$n_i = \max\left\{ \sigma\left(k_j^i\right) : p_i \le j \le q_i \right\}, \tag{14}$$

$$\min\left\{ \sigma\left(k_j^{i+1}\right) : p_{i+1} \le j \le q_{i+1} \right\} > n_i, \tag{15}$$

$$\left\| \sum_{j=p_i}^{q_i} x_{\sigma\left(k_j^i\right)} \right\| > 2(i+1)L. \tag{16}$$

Опишем процесс построения указнных последовательностей.

Так как ряд (12) расходится, то согласно следствию из леммы 1 существуют натуральные числа $p_1, q_1 > p_1$ и система векторов $\left\{x_{\sigma\left(k_j^1\right)} : p_1 \le j \le q_1\right\}$ такие, что

$$\left\| \sum_{j=p_i}^{q_1} x_{\sigma\left(k_j^1\right)} \right\| > 2L; \tag{17}$$

после чего положим

$$n_1 = \max\left\{\sigma\left(k_j^1\right) : p_1 \le j \le q_1\right\}. \tag{18}$$

Далее приведем следующий шаг построения.

Согласно тому же следствию из леммы 1 возьмем числа $p_2 > q_1$, $q_2 > p_2$ и систему векторов $\left\{x_{\sigma\left(k_j^2\right)} : p_2 \le j \le q_2\right\}$ такие, что выполняются условия

$$\min\left\{\sigma\left(k_j^2\right) : p_2 \le j \le q_2\right\} > n_1 \tag{19}$$

и

$$\left\| \sum_{j=p_2}^{q_2} x_{\sigma\left(k_j^2\right)} \right\| > 4L; \tag{20}$$

после чего положим

$$n_2 = \max\left\{\sigma\left(k_j^2\right) : p_2 \le j \le q_2\right\}. \tag{21}$$

И так далее. В результате неограниченного продолжения описанного процесса мы получим требуемые последовательности

$$\{p_i\}_{i=1}^{\infty}, \{q_i\}_{i=1}^{\infty}, \{n_i\}_{i=1}^{\infty} \text{ и } \{M_i\}_{i=1}^{\infty}.$$

Теперь докажем, что последовательность $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию б) леммы 2.

Введем обозначения

$$U_i = \sum_{k=1}^{n_{i-1}} x_k, \quad \mathrm{V}_i = \sum_{j=p_i}^{q_i} x_{\sigma\left(k_j^i\right)}, \quad W_i = \sum_{\substack{n_{i-1} < k \le n_i \\ k \ne \sigma\left(k_j^i\right)}} x_k. \tag{22}$$

Тогда $\sum_{k=1}^{n_i} x_k = U_i + \mathrm{V}_i + W_i$ и выполняются неравенства

$$\left\|U_i + \mathrm{V}_i + W_i\right\| < L, \quad \left\|U_i\right\| < L, \quad \left\|\mathrm{V}_i\right\| > 2(i+1)L. \tag{23}$$

Из (11), (16) и (23) получаем

$$\left\|U_i + \mathrm{V}_i\right\| \ge \left\|\mathrm{V}_i\right\| - \left\|U_i\right\| \ge 2(i+1)L - L = (2i+1)L, \tag{24}$$

$$\begin{aligned} \left\|W_i\right\| &= \left\|U_i + \mathrm{V}_i - \left(U_i + \mathrm{V}_i + W_i\right)\right\| \ge \\ &\ge \left\|U_i + \mathrm{V}_i\right\| - \left\|\left(U_i + \mathrm{V}_i + W_i\right)\right\| \ge 2(i+1)L - L = (2i+1)L. \end{aligned} \tag{25}$$

Остается положить

$$\sum\nolimits_i^{/} x_k = U_i + \mathrm{V}_i, \quad \sum\nolimits_i^{//} x_k = W_i \tag{26}$$

и применить (24) и (25). Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы. По теореме Алаоглу о слабой компактности единичного шара в сопряженном пространстве из последовательности $\frac{W_i}{\|W_i\|}$ можно выделить подпоследовательность $\frac{W_{ik}}{\|W_{ik}\|}$, которая слабо сходится к некоторому вектору h с $\|h\|=1$.

Таким образом, для каждого $x\in H$

$$\left(\frac{W_{ik}}{\|W_{ik}\|},x\right)\to(h,x) \quad \text{при} \quad k\to\infty. \tag{27}$$

Полагая $x=h$, из (27) получим

$$\left(\frac{W_{ik}}{\|W_{ik}\|},h\right)\to\|h\|^2=1. \tag{28}$$

Из (28) следует, что для достаточно больших k имеет место неравенство

$$\left(\frac{W_{ik}}{\|W_{ik}\|},h\right)>\frac{1}{2},$$

откуда в силу (25) получим

$$(W_{ik},h)\geq\frac{1}{2}\|W_{ik}\|\geq i_kL. \tag{29}$$

Далее из (23) в силу неравенства Шварца получаем

$$(U_i+\mathrm{V}_i+W_i,h)=(U_i+\mathrm{V}_i,h)+(W_i,h)<L, \tag{30}$$

откуда в силу (29)

$$\left(U_{i_k}+\mathrm{V}_{i_k},h\right)=L-\left(W_{i_k},h\right)<L-i_kL=-(i_k-1)L. \tag{31}$$

Теперь из (26), (29) и (31) имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}(x_k,h)^-\leq\sum_{i=1}^{\infty}\sum\nolimits_i^{/}(x_k,h)^-=-\infty,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(x_k,h)^+\geq\sum_{i=1}^{\infty}\sum\nolimits_i^{//}(x_k,h)^-=+\infty,$$

что и требовалось. Теорема доказана.

В заключение приведем один пример, относящийся к рассмотренной выше теме.

Возьмем два числовых ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k$ таких, что каждый из них имеет сходящуюся перестановку, но нет одной общей перестановки, при которой они оба переходят в сходящиеся ряды. Можно взять, например,

$$a_k=\frac{(-1)^{k+1}}{k},\quad b_k=\frac{3(-1)^{k+1}+1}{2k}.$$

Построим в l^2 ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k$ следующим образом. Положим

$$x_k=\left(a_k,b_k,\frac{a_k}{2},\frac{b_k}{2},\frac{a_k}{3},\frac{b_k}{3},\ldots\right)\quad k=1,2,\ldots$$

Пусть $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ – стандартный ортонормальный базис в l^2. Очевидно, что при каждом $i = 1, 2, ...$ справедливы равенства

$$\lim_{k\to\infty}(x_k, e_i) = 0, \ \sum_{k=1}^{\infty}(x_k, e_i)^+ = \sum_{k=1}^{\infty}(x_k, e_i)^- = \infty ,$$

откуда следует, что проекции ряда $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ на любую координатную ось в l^2 либо сходятся, либо являются перестановками сходящегося ряда, но сам ряд в любом порядке членов расходится в l^2.

Институт математики НАН РА

Ф. А. Талалян

Об условно сходящихся рядах в гильбертовом пространстве

Рассматриваются ряды в действительном гильбертовом пространстве, являющиеся перестановками условно сходящихся рядов, а также проекции таких рядов на некоторые одномерные подпространства.

Ֆ.Ա. Թալալյան

Հիլբերտյան տարածությունում պայմանական զուգամետ շարքերի մասին

Ուսումնասիրվում են իրական հիլբերտյան տարածությունում պայմանական զուգամետ շարքեր և նրանց պրոյեկցիաները որոշ միաչափ ենթատարածությունների վրա:

F. A. Talalyan

On Conditionally Convergent Series in Hilbert Space

Conditionally convergent series in real Hilbert space and their projections on some one-dimensional subspaces are considered.

Литература

1. *Рудин У.* Основы математического анализа. Мир. М. 1976. 320 с.
2. *Diestel J.* Sequences and Series in Banach Spaces. Spinger–Verlag. 1984.