

лочки, Z_i – нормально приложенная внешняя нагрузка, Δ – двумерный оператор Лапласа. В случае рассматриваемой задачи для Z_i имеем [6-8, 13]:

$$Z_i = \begin{cases} (-1)^i \left[Z_0^{(i)} + \frac{\rho_0 g (b - \alpha)}{R_i} \frac{\partial^2 w_i}{\partial \theta^2} \right] & \text{при } 0 < \alpha < b, \\ 0 & \text{при } b < \alpha < l. \end{cases} \quad (1.2)$$

Здесь Z_0 – возмущённое давление жидкости, g – ускорение силы тяжести, ρ_0 – плотность жидкости.

Из интеграла Коши – Лагранжа имеем следующие формулы определения возмущенного движения жидкости на стенках оболочек:

$$Z_0^{(i)} = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{r=R_i}, \quad (1.3)$$

где φ – потенциальная функция возмущённого движения жидкости, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = 0 \quad (1.4)$$

в области, занятой жидкостью, следующим краевым условиям на границе этой области:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial w_i}{\partial t} \quad \text{при } r = R_i \quad (i=1,2), \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0 \quad \text{при } \alpha = 0, \quad (1.6)$$

и согласно последнему предположению следующему условию на свободной поверхности жидкости [5-8, 13]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad \text{при } \alpha = b. \quad (1.7)$$

Таким образом, задача колебания рассматриваемой гидроупругой системы сводится к совместному решению двумерных дифференциальных уравнений (1.1) в области ($0 < \alpha < l$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$) с трехмерным уравнением (1.4) в области ($0 < \alpha < b$, $R_1 < r < R_2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$) при граничных условиях (1.5)-(1.7). Граничными условиями задачи, кроме (1.5)-(1.7), будут также обычные условия закрепления краев оболочки $\alpha = 0$ и $\alpha = l$.

2. Сведение к задаче колебания, описываемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Для определения функции φ , как это следует из (1.6), необходимо определить радиальные скорости точек поверхностей оболочек. Поэтому прежде всего обсудим вопрос о формах колебания оболочек.

Предположим, что оболочки шарнирно опёрты по торцам. Тогда решение системы (1.1), удовлетворяющее известным условиям шарнирного опирания, запишем в форме

$$\begin{aligned}
w_i &= \left(\sum_{s=0}^N W_s^{(i)}(t) \sin \lambda_s \alpha \right) \cos n\theta, \\
\Phi_i &= \left(\sum_{s=0}^N \Phi_s^{(i)}(t) \sin \lambda_s \alpha \right) \cos n\theta,
\end{aligned} \tag{2.1}$$

где $\lambda_s = (m+s)\pi/l$, m – число полуволн изогнутой поверхности вдоль образующей, n – число волн в окружном направлении, $W_s^{(i)}(t)$ и $\Phi_s^{(i)}(t)$ – искомые функции.

Исходя из (2.1) гармоническую функцию φ представим в виде

$$\begin{aligned}
\varphi &= \left\{ \sum_{s=0}^N [A_s(t)I_n(\lambda_s r) + B_s(t)K_n(\lambda_s r)] \sin \lambda_s \alpha + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^{\infty} [C_j(t)sh\alpha_{nj} + D_j(t)ch\alpha_{nj}] \Psi_n(\alpha_{nj} r) \right\} \cos n\theta,
\end{aligned} \tag{2.2}$$

где I_n , K_n – функции Бесселя чисто мнимого аргумента первого и второго рода,

$$\Psi_n(\alpha_{nj} r) = \frac{J_n(\alpha_{nj} r)}{J_n'(\alpha_{nj} R_1)} - \frac{Y_n(\alpha_{nj} r)}{Y_n'(\alpha_{nj} R_1)}, \tag{2.3}$$

J_n , Y_n – функции Бесселя действительного аргумента первого и второго рода порядка n ; A_s , B_s , C_j , D_j – некоторые величины, которые определяются из поверхностных условий (1.5)-(1.7); α_{nj} – корни следующего трансцендентного уравнения:

$$J_n'(\alpha_{nj} R_2) Y_n'(\alpha_{nj} R_1) - J_n'(\alpha_{nj} R_1) Y_n'(\alpha_{nj} R_2) = 0. \tag{2.4}$$

В (2.3) и (2.4) и в дальнейшем

$$f'(\beta R) = \left. \frac{df(z)}{dz} \right|_{z=\beta R}.$$

Подставляя (2.1) и (2.2) в граничные условия (1.5)-(1.7) и учитывая (2.4), путем ортогонализации получим следующие выражения для неизвестных A_s , B_s , C_j , D_j :

$$\begin{aligned}
A_s(t) &= \frac{K_n'(\lambda_s R_2) \frac{dW_s^{(1)}}{dt} - K_n'(\lambda_s R_1) \frac{dW_s^{(2)}}{dt}}{\lambda_s [I_n'(\lambda_s R_1) K_n'(\lambda_s R_2) - I_n'(\lambda_s R_2) K_n'(\lambda_s R_1)]}, \\
B_s(t) &= \frac{I_n'(\lambda_s R_1) \frac{dW_s^{(2)}}{dt} - I_n'(\lambda_s R_2) \frac{dW_s^{(1)}}{dt}}{\lambda_s [I_n'(\lambda_s R_1) K_n'(\lambda_s R_2) - I_n'(\lambda_s R_2) K_n'(\lambda_s R_1)]}, \\
\frac{dC_j(t)}{dt} &= - \sum_{s=0}^N \frac{\lambda_s}{\Delta(s, j)} \left[R_2 \Psi_n(\alpha_{nj} R_2) \frac{d^2 W_s^{(2)}}{dt^2} - R_1 \Psi_n(\alpha_{nj} R_1) \frac{d^2 W_s^{(1)}}{dt^2} \right],
\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\frac{dD_j(t)}{dt} = \sum_{s=0}^N \frac{\lambda_s sh\alpha_{nj}b - \alpha_{nj} \sin \lambda_s b}{\Delta(s, j)ch\alpha_{nj}b} \left[R_2 \Psi_n(\alpha_{nj}R_2) \frac{d^2 W_s^{(2)}}{dt^2} - R_1 \Psi_n(\alpha_{nj}R_1) \frac{d^2 W_s^{(1)}}{dt^2} \right],$$

где

$$\Delta(s, j) = \alpha_{nj}(\alpha_{nj}^2 + \lambda_s^2) \left[\frac{R_2^2}{2} \left(1 - \frac{n^2}{\alpha_{nj}^2 R_2^2} \right) \Psi_n^2(\alpha_{nj}R_2) - \frac{R_1^2}{2} \left(1 - \frac{n^2}{\alpha_{nj}^2 R_1^2} \right) \Psi_n^2(\alpha_{nj}R_1) \right].$$

В силу (2.5) и представления (2.2) из (1.3) находим следующие выражения для возмущённого давления жидкости на стенках оболочек:

$$Z_0^{(i)} = -\rho_0 \cos n\theta \begin{cases} \sum_{s=0}^N \left[L_1^{(i)}(\alpha, s) \frac{d^2 W_s^{(1)}}{dt^2} + L_2^{(i)}(\alpha, s) \frac{d^2 W_s^{(2)}}{dt^2} \right], & \text{при } 0 < \alpha < b, \\ 0, & \text{при } b < \alpha < l. \end{cases} \quad (2.6)$$

Здесь

$$L_p^{(i)}(\alpha, s) = A_p^{(i)}(s) \sin \lambda_s \alpha + \sum_{j=1}^{\infty} \left[B_p^{(i)}(s, j) sh\alpha_{nj} \alpha + C_p^{(i)}(s, j) ch\alpha_{nj} \alpha \right],$$

$$A_p^{(i)}(s) = (-1)^{p+1} \frac{K'_n(\lambda_s R_{r(p)}) I_n(\lambda_s R_i) - I'_n(\lambda_s R_{r(p)}) K_n(\lambda_s R_i)}{\lambda_s [I'_n(\lambda_s R_1) K'_n(\lambda_s R_2) - I'_n(\lambda_s R_2) K'_n(\lambda_s R_1)]},$$

$$B_p^{(i)}(s) = (-1)^{p+1} \frac{\lambda_s R_p \Psi_n(\alpha_{nj} R_p) \Psi_n(\alpha_{nj} R_i)}{\Delta(s, j)},$$

$$C_p^{(i)}(s) = (-1)^p \frac{(\lambda_s sh\alpha_{nj}b - \alpha_{nj} \sin \lambda_s b) R_p \Psi_n(\alpha_{nj} R_p) \Psi_n(\alpha_{nj} R_i)}{\Delta(s, j) ch\alpha_{nj}b}$$

($p = 1, 2$; $r^p = 1 + \delta_{1p}$, δ_{ij} – символ Кронекера).

Подставляя (2.1) во второе уравнение (1.1), для искомых функций $\Phi_s^{(i)}(t)$ будем иметь

$$\Phi_s^{(i)}(t) = \frac{E_i h_i}{R_i} \frac{\lambda_s^2}{(\lambda_s^2 + n^2/R_i^2)^2} W_s^{(i)}(t). \quad (2.7)$$

Таким образом, все искомые величины выражаются через функции $W_s^{(i)}(t)$ и $\Phi_s^{(i)}(t)$.

На основе вариационного метода Бубнова – Галеркина, с учетом (1.2), (2.1), (2.6) и (2.7), из первого уравнения (1.1), для определения $W_s^{(i)}(t)$ и $\Phi_s^{(i)}(t)$ получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 W_k^{(1)}}{dt^2} + \varepsilon_1 \frac{dW_k^{(1)}}{dt} + \Omega_1^2(k, n) W_k^{(1)} + \\ & + \sum_{s=0}^N \left\{ b_{ks}^{(1)} W_s^{(1)} + \frac{d^2}{dt^2} \left[m_1^{(1)}(k, s) W_s^{(1)} + m_2^{(1)}(k, s) W_s^{(2)} \right] \right\} = 0, \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 W_k^{(2)}}{dt^2} + \varepsilon_2 \frac{dW_k^{(2)}}{dt} + \Omega_2^2(k, n) W_k^{(2)} + \sum_{s=0}^N \left\{ b_{ks}^{(2)} W_s^{(2)} + \frac{d^2}{dt^2} \left[m_1^{(2)}(k, s) W_s^{(1)} + m_2^{(2)}(k, s) W_s^{(2)} \right] \right\} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (2.8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Omega^2(k, n) &= \frac{D_i}{h_i \rho_i} \left[\left(\lambda_k^2 + n^2 / R_i^2 \right)^2 + \frac{12(1 - \nu_i^2)}{R_i^2 h_i^2} \frac{\lambda_k^4}{\left(\lambda_k^2 + n^2 / R_i^2 \right)^2} \right], \\ m_p^{(i)}(k, s) &= (-1)^i \frac{2\rho_0}{lh_i \rho_i} \left\{ A_p^{(i)}(s) \left(\frac{\sin(\lambda_s - \lambda_k) b}{2(\lambda_s - \lambda_k)} - \frac{\sin(\lambda_s + \lambda_k) b}{2(\lambda_s + \lambda_k)} \right) + \right. \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\infty} \left[B_p^{(i)}(s, j) \frac{\alpha_{nj} ch \alpha_{nj} b \sin \lambda_k b - \lambda_k sh \alpha_{nj} b \cos \lambda_k b}{\alpha_{nj}^2 + \lambda_k^2} + \right. \\ &\quad \left. \left. + C_p^{(i)}(s, j) \frac{\lambda_k + \alpha_{nj} sh \alpha_{nj} b \sin \lambda_k b - \lambda_k ch \alpha_{nj} b \cos \lambda_k b}{\alpha_{nj}^2 + \lambda_k^2} \right] \right\}, \\ b_{ks}^{(i)} &= (-1)^i \frac{n^2 \rho_0 g}{\rho_i h_i R_i l} \frac{1}{R_i l} \left[\frac{1 - \cos(\lambda_s - \lambda_k) b}{(\lambda_s - \lambda_k)^2} - \frac{1 - \cos(\lambda_s + \lambda_k) b}{(\lambda_s + \lambda_k)^2} \right], \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $\Omega_1(k, n)$ и $\Omega_2(k, n)$ – частоты собственных поперечных колебаний внутренней и внешней оболочек соответственно, $b_{ks}^{(i)}$ – коэффициенты гидростатического давления жидкости, $m_p^{(i)}(k, s)$ – коэффициенты присоединённых масс.

3. Определение частот свободных колебаний гидроупругой системы. В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая одночленной аппроксимации ($s=0$), когда внутренняя оболочка является абсолютно жесткой. Заметим, что λ_s при $s=0$ зависит от m и равняется $\pi m / l$. Поэтому основные неизвестные $W_s^{(i)}$, а также величины $b_{ks}^{(i)}$, $m_p^{(i)}(k, s)$ и $\Omega_i(k, n)$ при $s=0$ будут зависеть от m и n . Тогда из уравнений (2.8) имеем

$$[1 + M(m, n)] \frac{d^2 W_{mn}}{dt^2} + \varepsilon_2 \frac{dW_{mn}}{dt} + [\Omega^2(m, n) + B_{mn}(m, n)] W_{mn} = 0, \quad (3.1)$$

где введены следующие обозначения:

$$B_{mn} = b_{00}^{(2)}(m, n) = \frac{n^2 g \rho_0 b^2}{2h_2 \rho_2 l R_2} \left[1 - \left(\frac{\sin \mu_m b}{\mu_m b} \right)^2 \right], \quad (3.2)$$

$$\Omega^2(m, n) = \frac{c_{i2}^2}{R_2^2} \left\{ \frac{1}{6(1 - \nu_2)} \left[\left(\mu_m^2 R_2^2 + n^2 \right) \frac{h_2}{R_2} \right]^2 + 2(1 + \nu_2) \left(\frac{\mu_m^2 R_2^2}{\mu_m^2 R_2^2 + n^2} \right)^2 \right\}, \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned}
M(m, n) &= m_2^{(2)}(0, 0) = \\
&= -\frac{\rho_0 b}{h_2 \rho_2 l \mu_m} \left(1 - \frac{\sin(2\mu_m b)}{2\mu_m b} \right) \frac{K'_n(\mu_m R_1) I_n(\mu_m R_2) - I'_n(\mu_m R_1) K_n(\mu_m R_2)}{I'_n(\mu_m R_1) K'_n(\mu_m R_2) - I'_n(\mu_m R_2) K'_n(\mu_m R_1)} - \\
&= \frac{4\rho_0 b}{h_2 \rho_2 l} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu_m \alpha_{nj} \left[2(ch\alpha_{nj} b)^{-1} - \cos \mu_m b \right] \sin \mu_m b + (\alpha_{nj}^2 - \mu_m^2 \sin^2 \mu_m b) th \alpha_{nj} b}{\alpha_{nj} R_2 (\alpha_{nj}^2 + \mu_m^2)^2 \left\{ \left(1 - \frac{n^2}{\alpha_{nj}^2 R_2^2} \right) - \left(1 - \frac{n^2}{\alpha_{nj}^2 R_2^2} \right) \left[\frac{J'_n(\alpha_{nj} R_2)}{J'_n(\alpha_{nj} R_1)} \right]^2 \right\}},
\end{aligned} \quad (3.4)$$

$$W_{mn} = W_0^{(2)}(m, n), \quad \mu_m = \lambda_0 = \frac{\pi m}{l}, \quad c_{i2}^2 = \frac{E_2}{2\rho_2(1+\nu_2)}. \quad (3.5)$$

Формула (3.4) получена с использованием формулы вида

$$J_n(x)Y'_n(x) - J'_n(x)Y_n(x) = \frac{2}{\pi x}.$$

Когда затухание достаточно мало $\varepsilon_2 \ll \Omega_{mn}$, из уравнения (3.1) для частот колебаний гидроупругой системы получим

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\Omega^2(m, n) + B_{mn}}{1 + M(m, n)}. \quad (3.5)$$

На основе этой формулы с учетом (3.2)-(3.5) произведено вычисление значений частот колебаний гидроупругой системы в случае “дюралюминиевая оболочка – вода”.

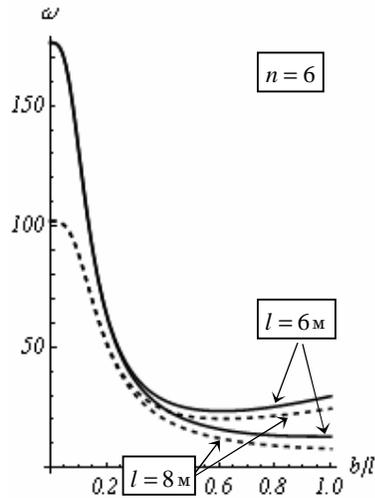


Рис. 1.

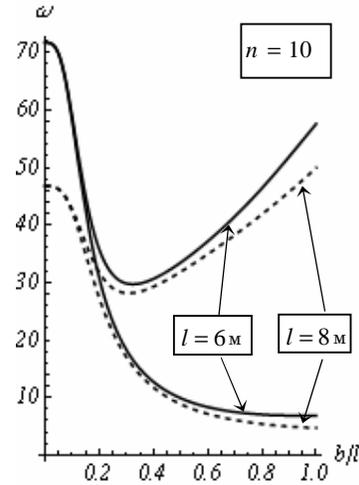


Рис. 2.

Тогда $c_t = 5100$ м/с, $\rho/\rho_0 = 2.7$, $\nu = 0.3$. Для выявления гидростатического давления жидкости (влияния члена B_{mn} в (3.5)) на частоту колебаний приведены численные расчеты при $m=1$, $R_1=2$ м, $R_2=3$ м, $h_2=10^{-3}$ м и различных n и l . Результаты расчета представлены на рис. 1 и 2. Нижние кривые (при каждом l) построены при $B_{mn}=0$ в (3.5). Приведенные рисунки показывают, что при $n > 5$ и l/R_2 заметно больше единицы учет гидростатического давления приводит как к количественному (частота колебаний существенно увеличивается), так и качественному изменению (существует точка минимума) частот гидроупругих колебаний. Если же нарушаются указанные условия, то влияние гидростатического давления не является существенным. В зависимости от m на графике функции $\omega(b/l)$ могут появляться осцилляции с мелкими амплитудами, что показано на рис. 3, который построен при $n=1$, $l=6$ м, $R_2=3$ м, $R_1=2$ м, $h_2=10^{-2}$ м и различных m .

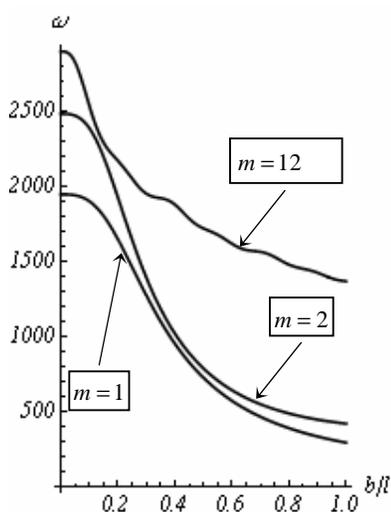


Рис. 3.

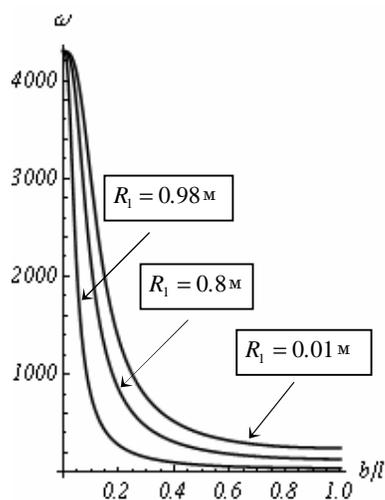


Рис. 4.

Для исследования влияния толщины жидкого слоя на частоты колебания приведены численные расчеты при $n=1$, $m=1$, $l=3$ м, $h_2=10^{-3}$ м, $R_2=1$ м и различных R_1 . Результаты расчета представлены на рис. 4, который показывает, что зависимость ω от толщины жидкого слоя является монотонно возрастающей функцией.

На рис. 5 приведена зависимость ω от n при $m=1$, $l=4$ м, $R_1=1$ м, $R_2=2$ м, $h_2=10^{-3}$ м и различных b/l . Рисунок показывает, что частота колебаний имеет минимум от n , аналогично случаю отсутствия жидкости. С увеличением b/l как число волн по окружности, при котором ω имеет

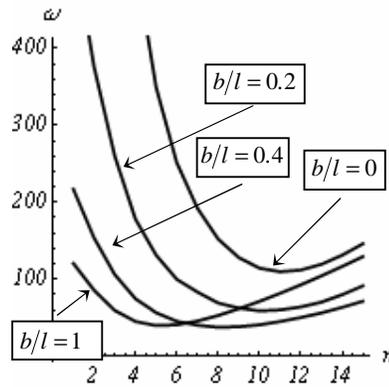


Рис. 5.

минимальное значение, так и минимальные значения ω уменьшаются.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 13-2C243.

Ереванский государственный университет

Академик Г. Е. Багдасарян, С. Л. Саакян

**Вопросы колебания коаксиальных цилиндрических оболочек,
частично заполненных жидкостью**

В линейной постановке рассмотрены вопросы колебаний изотропной коаксиальной круговой цилиндрической оболочки конечной длины при абсолютно жестком включении, когда область между оболочкой и включением (зазор) частично заполнена несжимаемой жидкостью. Исследовано влияние глубины заполнения и толщины зазора на частоты колебаний рассматриваемой гидроупругой системы, исследовано также влияние гидростатического давления и формы колебания оболочки на процесс колебаний.

Ակադեմիկոս Գ. Ե. Բաղդասարյան, Ս. Լ. Սահակյան

**Համառոտանցք գլանային թաղանթների տատանման հարցեր, երբ նրանցով
սահմանափակված տիրույթը մասնակիորեն լցված է հեղուկով**

Գծային դրվածքով դիտարկված են վերջավոր երկարությամբ իզոտրոպ գլանային թաղանթի տատանման հարցերը բացարձակ կոշտ համառոտանցք ներդրակի դեպքում, երբ նրանցով սահմանափակված տիրույթը մասնակիորեն լցված է անսեղմելի իդեալական հեղուկով: Ուսումնասիրված են լցված հեղուկի շերտի խորության և լայնության

ազդեցությունները դիտարկվող հիդրոառաձգական համակարգի տատանումների հաճախականությունների վրա: Ուսումնասիրված են լցված հեղուկի շերտի խորության և լայնության ազդեցությունները դիտարկվող հիդրոառաձգական համակարգի տատանումների հաճախականությունների վրա: Հետազոտված են նաև հիդրոստատիկ ճնշման և թաղանթի տատանումների ձևի ազդեցությունները տատանողական պրոցեսում:

Academician G. Ye. Baghdasaryan, S. L. Sahakyan

**Problems of Vibration of Coaxial Cylindrical Shells with a Gap
Partially Filled with Fluid**

The problem of vibrations of isotropic coaxial circular cylindrical shells of finite length with an absolutely rigid inclusion in linear statement, when the region between the shells (the gap) is partially filled with an incompressible fluid, is considered. The dependence of the vibration frequency on the depth of the filling and the thickness of the gap of the considered hydro-elastic system is investigated. The effects of hydrostatic pressure and the form of vibration of shell on the process of vibration are also studied.

Литература

1. *Буйвол В. Н.* Колебания и устойчивость деформируемых систем в жидкости. Киев. Наукова думка, 1975. 192 с.
2. *Мнев Е. Н., Перцев А. К.* Гидроупругость оболочек. Л. Судостроение. 1970. 356 с.
3. *Гузь А. Н., Кубенко Б. Д.* Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек: Методы расчета оболочек. Т. 5. Киев. Наукова думка. 1982. 400 с.
4. *Вольмир А. С.* Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости. М. Наука. 1979. 320 с.
5. *Кубенко В. Д., Ковальчук П. С.* - Прикладная механика. 2000. Т. 36. № 4.
6. *Багдасарян Г. Е., Гнуни В. Ц.*- ДАН АрмССР. 1965. Т. 41. № 4. С. 199-203.
7. *Багдасарян Г. Е., Гнуни В. Ц.* - Изв. НАН Армении. Механика. 2007. Т. 60. № 1. С. 25–32.
8. *Багдасарян Г. Е.* - Изв. АН АрмССР. Механика. 1968. Т. 21. № 4. С. 40–47.
9. *Краснопольская Т. С., Подчасов Н. П.*- Прикладная механика. 1992. Т. 28. № 4. С. 42-48.
10. *Muung Jo Jhung, Yong Beum Kim, Kyeong Hoon Jeong, Suh Choi* - J. of the Korean Nuclear Society. 2000.V. 32. N 4. P.328-341.
11. *Багдасарян Г. Е., Марухян С. А.* - Изв. АН АрмССР. Механика. 2011. Т. 64. № 3. С. 10–21.
12. *Власов В. З.* Общая теория оболочек и её приложение в технике. М. Гостехиздат. 1949.
13. *Mixon John S., Herr Robert W.* An investigation of the vibration characteristics of pressurized thin-walled circular cylinders partly filled with liquid. Techn. Rept. NASA. Nr. R – 145. 1962.