ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր
Том 115 2015 № 3
Volume

МЕХАНИКА

УДК 539.3

Академик С. А. Амбарцумян, М. В. Белубекян

Напряженно-деформированное состояние разномодульной пластинки под действием поперечной нагрузки

(Представлено 15/V 2015)

Ключевые слова: *упругая пластинка, разномодульность, гипотеза Кирхгофа, двумерная задача.*

Обычно в классической теории пластин в законе деформации–напряжения Гука пренебрегается напряжением σ_z, а потом определяются связи напряжения (σ_x, σ_y)–деформации $(\varepsilon_x, \varepsilon_y)$. Этот подход, по-видимому, для разномодульной теории не подходит, так как знаки напряжений должны быть известны заранее. В классической теории имеется альтернативный подход, который используется редко. В этом случае закон Гука берется в виде связей напряжения–деформации. Затем в выражении связи для σ_z с деформациями принимается $\sigma_z = 0$, отсюда через $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ определяется ε_z и подставляется в выражения для σ_x, σ_y. В классической теории пластин оба эти подхода дают идентичный результат. Для разномодульной теории пластин второй подход представляется более естественным.

1. Рассматривается тонкая пластинка постоянной толщины h, на которую действует поперечная нагрузка $q(x, y)$.

Предполагается, что слой пластинки $0 < z \le h_2$ растягивается, так как нагрузка приложена на плоскости $z = h_2$, а слой $-h_1 \le z < 0$ сжимается (см. [1], с.70). При условии $h = h_1 + h_2$ толщины h_1, h_2 будут искомыми величинами. Очевидно, что для сжимаемого слоя с индексом „2” имеют место условия

$$\sigma_x^{(2)} < 0,\ \sigma_y^{(2)} < 0,\ \sigma_z^{(2)} < 0. \tag{1.1}$$

Тогда закон Гука в этой области по разномодульной теории упругости должен иметь вид [2]

$$\sigma_x^{(2)}=\frac{(1-\nu^-)E^-}{\left(1+\nu^-\right)\left(1-2\nu^-\right)}\left[\varepsilon_x+\frac{\nu^-}{1-\nu^-}\left(\varepsilon_y+\varepsilon_z\right)\right],$$

$$\sigma_y^{(2)}=\frac{(1-\nu^-)E^-}{\left(1+\nu^-\right)\left(1-2\nu^-\right)}\left[\varepsilon_y+\frac{\nu^-}{1-\nu^-}\left(\varepsilon_x+\varepsilon_z\right)\right],\qquad (1.2)$$

$$\sigma_z^{(2)}=\frac{(1-\nu^-)E^-}{\left(1+\nu^-\right)\left(1-2\nu^-\right)}\left[\varepsilon_z+\frac{\nu^-}{1-\nu^-}\left(\varepsilon_x+\varepsilon_y\right)\right].$$

В растянутой области имеем $\left(-h_1\le z<0\right)$

$$\sigma_x^{(1)}>0,\ \sigma_y^{(1)},\sigma_z^{(1)}<0.\qquad (1.3)$$

Следовательно, согласно разномодульной теории упругости

$$\sigma_x^{(1)}=\frac{(1-\nu^+)E^+}{\left(1+\nu^+\right)\left(1-2\nu^+\right)}\left[\varepsilon_x+\frac{\nu^+}{1-\nu^+}\left(\varepsilon_y+\varepsilon_z\right)\right],$$

$$\sigma_y^{1}=\frac{(1-\nu^+)E^+}{\left(1+\nu^+\right)\left(1-2\nu^+\right)}\left[\varepsilon_y+\frac{\nu^+}{1-\nu^+}\left(\varepsilon_x+\varepsilon_z\right)\right],\qquad (1.4)$$

$$\sigma_z^{(1)}=\frac{(1-\nu^-)E^-}{\left(1+\nu^-\right)\left(1-2\nu^-\right)}\left[\varepsilon_z+\frac{\nu^-}{1-\nu^-}\left(\varepsilon_x+\varepsilon_y\right)\right].$$

Согласно допущению гипотезы Кирхгофа в третьем равенстве (1.2) принимается $\sigma_z^{(2)}=0$ и для ε_z имеем

$$\varepsilon_z=-\frac{\nu^-}{1-\nu^-}\left(\varepsilon_x+\varepsilon_y\right).\qquad (1.5)$$

Подстановка (1.5) в первые два равенства из (1.2) приводит к выражениям для основных напряжений теории пластин

$$\sigma_x^{(2)}=E_2\left(\varepsilon_x+\nu_2\varepsilon_y\right),\ \sigma_y^{(2)}=E_2\left(\varepsilon_y+\nu_2\varepsilon_x\right)$$
$$\sigma_{xy}^{(2)}=G_2\varepsilon_{xy}.\qquad (1.6)$$

В (1.6) приняты обозначения

$$E_2=\frac{E^-}{\left[1-\left(\nu^-\right)^2\right]},\ \ \nu_2=\nu^-.\qquad (1.7)$$

Для модуля сдвига G_2 естественно принять

$$G_2=\frac{E^-}{2\left(1+\nu^-\right)}.\qquad (1.7)$$

В случае растянутого слоя $\left(-h_1\le z<0\right)$, полагая $\sigma_z^{(1)}=0$ в (1.4), получим ε_z в виде (1.5). Подстановка (1.5) в первые два выражения (1.4) дает

$$\sigma_x^{(1)}=E_1\left(\varepsilon_x+\nu_1\varepsilon_y\right),\ \sigma_y^{(1)}=E_1\left(\varepsilon_y+\nu_1\varepsilon_x\right),$$
$$\sigma_{xy}^{(1)}=G_1\varepsilon_{xy},\qquad (1.8)$$

где

$$E_1 = \frac{(1-\nu^- - \nu^+)E^+}{\left(1+\nu^+\right)\left(1-\nu^-\right)\left(1-2\nu^+\right)}, \; \nu_1 = \frac{\nu^+\left(1-2\nu^-\right)}{1-\nu^- - \nu^+}, \tag{1.9}$$

G_1 – модуль сдвига, который будет определен в дальнейшем.

Нетрудно заметить, что в случае равномодельной теории упругости выражения (1.9) совпадают с допущением гипотезы Кирхгофа для основных напряжений.

2. Как и в классической теории пластин, принимается второе допущение гипотезы Кирхгофа [2, 3]. При этом учитывается, что в плоскости $z = 0$ продольные перемещения равны нулю $\left(\sigma_x = 0, \sigma_y = 0\right)$

$$-z\frac{\partial w}{\partial x}, \; u_y = -z\frac{\partial w}{\partial y}, \; u_z = w, \tag{2.1}$$

где w является функцией координат x, y.

Используя связи деформации–перемещения, с учетом (2.1) получаются выражения для основных напряжений теории пластин через перемещения

$$\begin{gathered} \sigma_x^{(i)} = -zE_i\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_i\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \; \tau_{xy}^{(i)} = -2zG_i\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\ \sigma_y^{(i)} = -zE_i\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_i\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \; i = 1, 2. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Третье допущение гипотезы Кирхгофа – это осереднение уравнений равновесия.

Осередненные уравнения равновесия получаются обычной процедурой для каждого слоя в отдельности

$$\begin{aligned} &\frac{\partial T_1^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial S^{(i)}}{\partial y} \pm \tau_{zx}^{(i)} = 0, \\ &\frac{\partial S^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial T_2^{(i)}}{\partial y} \pm \tau_{zy}^{(i)} = 0, \\ &\frac{\partial N_1^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial N_2^{(2)}}{\partial y} - \sigma_z^{(2)}(0) = -q(x, y), \\ &\frac{\partial N_1^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial N_2^{(i)}}{\partial y} + \sigma_z^{(1)}(0) = 0, \\ &\frac{\partial M_1^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial H^{(i)}}{\partial y} - N_1^{(\mathrm{i})} = 0, \\ &\frac{\partial H^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial M_2^{(i)}}{\partial y} - N_2^{(\mathrm{i})} = 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь знак „+” относится к растянутому слою $(i = 1)$, знак „–” к сжимаемому слою $(i = 2)$. Величины $\varepsilon_{zx}^{(i)}(0), \tau_{zy}^{(i)}(0), \sigma_z^{(i)}(0)$ являются искомыми и должны удовлетворять условиям непрерывности при $z = 0$,

$$T_1^{(2)} = \int_0^{h_2} \sigma_x^{(2)} dz,\ T_2^{(2)} = \int_0^{h_2} \sigma_y^{(2)} dz,\ S^{(2)} = \int_0^{h_2} \tau_{xy}^{(2)} dy,$$

$$T_1^{(1)} = \int_{-h_1}^{0} \sigma_x^{(1)} dz,\ T_2^{(1)} = \int_{-h_1}^{0} \sigma_y^{(1)} dz,\ S^{(1)} = \int_{-h_1}^{0} \tau_{xy}^{(1)} dy, \qquad (2.4)$$

С учетом (2.2) и (2.4) из первого уравнения системы (2.3) следует

$$\tau_{zx}^{(2)}(0) = \frac{E_2 h_2^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (\nu_2 + 2\gamma_2)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]$$

$$\tau_{zx}^{(1)}(0) = \frac{E_1 h_1^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (\nu_1 + 2\gamma_1)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right],\ \gamma_i = \frac{G_i}{E_i}. \qquad (2.5)$$

Для выполнения условия непрерывности касательных напряжений

$$\varepsilon_{zx}^{(i)}(0) = \varepsilon_{zx}^{(2)} = 0 \qquad (2.6)$$

достаточно, чтобы имели место равенства

$$E_1 h_1^2 = E_2 h_2^2,\ \nu_2 + 2\gamma_2 = \nu_1 + 2\gamma_1. \qquad (2.7)$$

Первое равенство из (2.7) приводится в [2] в задаче чистого изгиба разномодульной балки и вместе с условием $h = h_1 + h_2$ определяет положение нейтральной плоскости пластинки. Из второго равенства (2.7) получается выражение для модуля сдвига G_1

$$G_1 = \frac{E^+}{2\left(1+\nu^+\right)}. \qquad (2.8)$$

Аналогично, рассматривая второе уравнение из системы (2.3) при $i = 1, 2$ и требуя выполнения условия непрерывности ε_{zy} при $z = 0$, получаем то же условие (2.7).

Согласно (2.2) для моментов, входящих в систему (2.3),

$$M_1^{(2)} = \int_0^{h_2} z\sigma_x^{(2)} dz = -\frac{E_2 h_2^3}{3}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),$$

$$M_2^{(2)} = \int_0^{h_1} z\sigma_y^{(2)} dz = -\frac{E_2 h_2^3}{3}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),$$

$$H^{(2)} = \int_0^{h_2} z\varepsilon_{xy}^{(2)} dz = -\frac{2G_2 h_2^3}{3}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

$$M_1^{(1)} = \int_{h_1}^{0} z\sigma_x^{(1)} dz = -\frac{E_1 h_1^3}{3}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_1\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),$$

$$M_2^{(1)} = \int_{-h_1}^{0} z\sigma_y^{(1)} dz = -\frac{E_1 h_1^3}{3}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),$$

$$H^{(1)} = \int_{-h}^{0} z\varepsilon_{xy} dz = -\frac{2G_1 h_1^3}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \tag{2.9}$$

С учетом (2.3), из последних уравнений системы (2.3) определяются части перерезывающих сил $(v_i + 2\gamma_i) = 1$

$$N_1^{(i)} = -\frac{E_i h_i^3}{3} \frac{\partial}{\partial x} \Delta w, \; N_2^{(i)} = -\frac{E_i h_i^3}{3} \frac{\partial}{\partial y} \Delta w. \tag{2.10}$$

Подстановка (2.10) в третье и четвертое уравнения системы (2.3) и использование условия непрерывности нормального напряжения

$$\sigma_z^{(1)}(0) = \sigma_z^{(2)}(0) \tag{2.11}$$

приводят к уравнению для искомой функции прогиба

$$D\Delta^2 w = q(x, y). \tag{2.12}$$

В этом случае жесткость пластинки определяется формулами

$$D = \frac{1}{3}\left(E_1 h_1^3 + E_2 h_2^3\right) = \frac{1}{3} E_1 h_1^2 h = \frac{1}{3} E_2 h_2^2 h. \tag{2.13}$$

В частном случае классической теории (2.13) совпадает с жесткостью изгиба классической теории пластин.

3. Нетрудно заметить, что граничные условия закрепленного края и свободного опертого края при $x = \text{const}$ будут

$$w = 0, \; \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \tag{3.1}$$

и

$$w = 0, \; \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \tag{3.2}$$

т.е. такими же, что и в классической теории пластин.

Граничные условия свободного края будут сложными

$$M_1^{(1)} + M_1^{(2)} = 0, \; \tilde{N}_1^{(1)} + \tilde{N}_1^{(2)} = 0, \tag{3.3}$$

где $\tilde{N}_1^{(1)}, \tilde{N}_1^{(2)}$ – обобщение перерезываюго усилия.

Институт механики НАН РА

Академик С. А. Амбарцумян, М. В. Белубекян

Напряженно-деформированное состояние разномодульной пластинки под действием поперечной нагрузки

Предлагается новый подход к сведению пространственной задачи теории разномодульной упругости к двумерной. Полученные уравнения являются более простыми по сравнению с ранее исследованными моделями. Установлена связь с моделью Тимошенко для разномодульной балки.

Ակադեմիկոս Ս. Ա. Համբարձումյան, Մ. Վ. Բելուբեկյան

Ուղղահայաց բեռի ազդեցության տակ գտնվող տարամոդուլ սալի լարվածա-դեֆորմացվող վիճակը

Առաջարկված է նոր մոտեցում, որի միջոցով տարամոդուլ առաձգական տեսության տարածական խնդիրը բերված է երկչափի: Ստացված հավասարումները ավելի պարզ են համեմատած նախկինում հետազոտված մոդելների: Հաստատված է կապ Տիմոշենկոյի կողմից առաջարկված տարամոդուլ հեծանի մոդելի հետ:

Academician S. A. Ambartsumian, M.V. Belubekyan

The Stress-Strain State of the Different Modules Plate under the Normal Load Action

A new approach for the reduction of the three-dimensional problem of the theory of different modules elasticity to the two-dimensional one is suppoused. The received equations are simpler than the earlier investigated models. The connection with the model of Timoshenko for the different modules beam is established.

Литература

1. *Амбарцумян С.А.* Разномодульная теория упругости. М. Наука. 1982. 320 с.
2. *Амбарцумян С.*А. Сопротивление материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию. Ереван. Изд. РАУ. 2004. 188 с.
3. *Хачатрян А.А.* - Изв. АН АрмССР. Механика. 1972. Т. 25. №1. С. 15-27.
4. *Тимошенко С.*.П. Курс сопротивления материалов. М.–Л. Гостехиздат. 1931. 587 с.