ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 115 2015 № 3

МЕХАНИКА

УДК 539.3

Г. С. Айрапетян,
член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян

Изгиб микрополярных круглых пластин с независимыми полями перемещений и вращений

(Представлено 8/V 2015)

Ключевые слова: *микрополярная, ортотропная, упругая, круглая пластинка, изгибная деформация.*

Введение. В работе [1] на основе метода гипотез, имеющих асимптотическое обоснование построена общая теория изгибной деформации микрополярных упругих изотропных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений с полным учетом поперечных сдвигов. В работе [2] этот подход развит и построена математическая модель изгибной деформации микрополярных упругих ортотропных пластин с независимыми полями перемещений и вращений с полным учетом деформации поперечных сдвигов. В работе [3] на основе построенных моделей [1, 2] микрополярных изотропных и ортотропных пластин изучается задача изгиба микрополярных шарнирно-опертых прямоугольных пластин.

В данной работе на основе общей математической модели для изгибной деформации микрополярных ортотропных и изотропных пластин с независимыми полями перемещений и вращений [1, 2] изучается задача изгиба круглых пластин. Построено точное решение рассматриваемой задачи, которое доведено до окончательных численных результатов, при помощи анализа которых устанавливаются эффективные свойства микрополярных материалов с точки зрения прочности и жесткости пластинки по сравнению с классическими материалами.

1. Постановка задачи. Основные уравнения прикладной теории изгиба микрополярных упругих ортотропных и изотропных пластин в криволинейной ортогональной системе координат в срединной плоскости пластинки имеют вид [2, 4]:

Уравнения равновесия:

$$\frac{1}{H_1}\frac{\partial N_{13}}{\partial \alpha_1}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1}N_{13}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial N_{23}}{\partial \alpha_2}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2}N_{23}=-q_3,$$

$$\frac{1}{H_1}\frac{\partial L_{11}}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\left(L_{11}-L_{22}\right)+\frac{1}{H_2}\frac{\partial L_{21}}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\cdot$$
$$\cdot\left(L_{21}+L_{12}\right)+(N_{23}-N_{32})=-m_1,$$
$$\frac{1}{H_2}\frac{\partial L_{22}}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\left(L_{22}-L_{11}\right)+\frac{1}{H_1}\frac{\partial L_{12}}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\cdot$$
$$\cdot\left(L_{21}+L_{12}\right)+(N_{31}-N_{13})=-m_2,$$
$$N_{31}-\frac{1}{H_1}\frac{\partial M_{11}}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\left(M_{22}-M_{11}\right)-$$
$$-\frac{1}{H_2}\frac{\partial M_{21}}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\left(M_{21}+M_{12}\right)=hq_1, \tag{1.1}$$
$$N_{32}-\frac{1}{H_2}\frac{\partial M_{22}}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\left(M_{11}-M_{22}\right)-\frac{1}{H_1}\frac{\partial M_{12}}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\left(M_{12}+M_{21}\right)=hq_2,$$
$$L_{33}-\frac{1}{H_1}\frac{\partial\Lambda_{13}}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\Lambda_{13}-\frac{1}{H_2}\frac{\partial\Lambda_{23}}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\Lambda_{23}+M_{12}-M_{21}=hm_3\,.$$

Геометрические соотношения:

$$K_{11}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\psi_2,\quad K_{22}=\frac{1}{H_2}\frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\psi_1\ ,$$
$$K_{12}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\psi_1-\iota\,,\ K_{21}=\frac{1}{H_2}\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\psi_2+\iota\,,$$
$$\Gamma_{13}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1}+\Omega_2\,,\Gamma_{23}=\frac{1}{H_2}\frac{\partial w}{\partial\alpha_2}-\Omega_1\,,\Gamma_{31}=\psi_1-\Omega_2\,,\Gamma_{32}=\psi_2+\Omega_1\,, \tag{1.2}$$
$$k_{11}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial\Omega_1}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\Omega_2,\ k_{22}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial\Omega_2}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\Omega_1\ ,\ k_{33}=\iota\,,$$
$$k_{12}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial\Omega_2}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\Omega_1\ ,\ k_{21}=\frac{1}{H_2}\frac{\partial\Omega_1}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\Omega_2\ ,$$
$$l_{13}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial\iota}{\partial\alpha_1}\ ,\ l_{23}=\frac{1}{H_2}\frac{\partial\iota}{\partial\alpha_2}\,.$$

Физические соотношения упругости:

для микрополярного ортотропного материала

$$\begin{aligned}
&N_{13}=\tilde{C}_{55}\Gamma_{13}+C_{56}\Gamma_{31}\ , && N_{31}=C_{66}\Gamma_{31}+C_{56}\Gamma_{13}\,,\\
&N_{23}=C_{55}\Gamma_{23}+C_{45}\Gamma_{32}\,, && N_{32}=C_{44}\Gamma_{32}+C_{45}\Gamma_{23}\,,\\
&M_{11}=D_{11}K_{11}+D_{12}K_{22}\,, && M_{22}=D_{22}K_{22}+D_{12}K_{11}\,,\\
&M_{12}=D_{88}K_{12}+D_{78}K_{21}\,, && M_{21}=D_{77}K_{21}+D_{78}K_{12}\,,\\
&L_{11}=d_{11}k_{11}+d_{12}k_{22}+d_{13}k_{33}\,, && L_{12}=d_{88}k_{12}+d_{78}k_{21}\,,\\
&L_{22}=d_{22}k_{22}+d_{21}k_{11}+d_{23}k_{33}\,, && L_{21}=d_{77}k_{21}+d_{78}k_{12}\,,\\
&L_{33}=d_{33}k_{33}+d_{31}k_{11}+d_{32}k_{22}\,, && \Lambda_{13}=\lambda_{66}l_{13}\,,\quad \Lambda_{23}=\lambda_{44}l_{23}\,,
\end{aligned} \tag{1.3}$$

где $\tilde{C}_{55}=2h\dfrac{\tilde{a}_{55}}{\tilde{a}_{55}a_{66}-a_{56}^2}$, $C_{66}=2h\dfrac{a_{66}}{\tilde{a}_{55}a_{66}-a_{56}^2}$, $C_{56}=-2h\dfrac{a_{56}}{\tilde{a}_{55}a_{66}-a_{56}^2}$,

$$C_{55}=2h\frac{a_{55}}{a_{44}a_{55}-a_{45}^2},\ C_{44}=2h\frac{a_{44}}{a_{44}a_{55}-a_{45}^2},\ C_{45}=-2h\frac{a_{45}}{a_{44}a_{55}-a_{45}^2},$$

$$D_{11}=\frac{2h^3}{3}\frac{a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2},\ D_{22}=\frac{2h^3}{3}\frac{a_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2},\ D_{12}=-\frac{2h^3}{3}\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2},$$

$$D_{88}=\frac{2h^3}{3}\frac{a_{88}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2},\ D_{77}=\frac{2h^3}{3}\frac{a_{77}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2},\ D_{78}=-\frac{2h^3}{3}\frac{a_{78}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2},$$

$$d_{11}=2h\frac{\begin{vmatrix}b_{22}&b_{23}\\b_{23}&b_{33}\end{vmatrix}}{\Delta_b},\ d_{12}=-2h\frac{\begin{vmatrix}b_{12}&b_{13}\\b_{23}&b_{33}\end{vmatrix}}{\Delta_b},\ d_{13}=2h\frac{\begin{vmatrix}b_{12}&b_{13}\\b_{22}&b_{23}\end{vmatrix}}{\Delta_b},\tag{1.4}$$

$$d_{22}=2h\frac{\begin{vmatrix}b_{11}&b_{13}\\b_{13}&b_{33}\end{vmatrix}}{\Delta},\ d_{21}=-2h\frac{\begin{vmatrix}b_{12}&b_{23}\\b_{13}&b_{33}\end{vmatrix}}{\Delta_b},\ d_{23}=-2h\frac{\begin{vmatrix}b_{11}&b_{13}\\b_{12}&b_{23}\end{vmatrix}}{\Delta_b},$$

$$d_{33}=2h\frac{\begin{vmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{12}&b_{22}\end{vmatrix}}{\Delta_b},\ d_{31}=2h\frac{\begin{vmatrix}b_{12}&b_{22}\\b_{13}&b_{23}\end{vmatrix}}{\Delta},\ d_{32}=-2h\frac{\begin{vmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{13}&b_{23}\end{vmatrix}}{\Delta_b},$$

$$d_{88}=2h\frac{b_{88}}{b_{77}b_{88}-b_{78}^2},\ d_{77}=2h\frac{b_{77}}{b_{77}b_{88}-b_{78}^2},\ d_{78}=-2h\frac{b_{78}}{b_{77}b_{88}-b_{78}^2},$$

$$\lambda_{66}=\frac{2h^3}{3}\frac{1}{b_{66}},\quad \lambda_{44}=\frac{2h^3}{3}\frac{1}{b_{44}},$$

для микрополярного изотропного материала

$$N_{13}=2h\left[(\mu+\alpha)\Gamma_{13}+(\mu-\alpha)\Gamma_{31}\right],\qquad N_{31}=2h\left[(\mu+\alpha)\Gamma_{31}+(\mu-\alpha)\Gamma\right]_{13},$$
$$N_{23}=2h\left[(\mu+\alpha)\Gamma_{23}+(\mu-\alpha)\Gamma_{32}\right],\qquad N_{32}=2h\left[(\mu+\alpha)\Gamma_{32}+(\mu-\alpha)\Gamma_{23}\right],$$
$$M_{11}=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(K_{11}+\nu K_{22}),\qquad M_{22}=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(K_{22}+\nu K_{11}),$$
$$M_{12}=\frac{2h^3}{3}\left[(\mu+\alpha)K_{12}+(\mu-\alpha)K_{21}\right],\qquad M_{21}=\frac{2h^3}{3}\left[(\mu+\alpha)K_{21}+(\mu-\alpha)K_{12}\right],$$
$$L_{11}=2h(\beta+2\gamma)k_{11}+2h\beta(k_{22}+\iota),\qquad L_{12}=2h\left[(\gamma+\varepsilon)k_{12}+(\gamma-\varepsilon)k_{21}\right],\tag{1.5}$$
$$L_{22}=2h(\beta+2\gamma)k_{22}+2h\beta(k_{11}+\iota),\qquad L_{21}=2h\left[(\gamma+\varepsilon)k_{21}+(\gamma-\varepsilon)k_{12}\right],$$
$$L_{33}=2h(\beta+2\gamma)\iota+2h\beta(k_{11}+k_{22}),$$
$$\Lambda_{13}=\frac{2h^3}{3}\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{13},\qquad \Lambda_{23}=\frac{2h^3}{3}\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{23}.$$

Здесь α_1,α_2 – криволинейные ортогональные координаты в срединной плоскости пластинки; $H_1 = H_1(\alpha_1,\alpha_2)$, $H_2 = H_2(\alpha_1,\alpha_2)$ – коэффициенты Ламе этой криволинейной системы координат; w – перемещение точек срединной плоскости пластинки (прогиб пластинки); ψ_1,ψ_2 – полные углы поворота нормального к срединной плоскости пластинки элемента вокруг осей α_1 и α_2; Ω_1,Ω_2 –аналогичные свободные повороты; K_{11},K_{22}, K_{12}, K_{21} – изгиб-кручения от силовых напряжений; $k_{11},k_{22},k_{33}=\iota,k_{12},k_{21}$ – изгиб-кручения от моментных напряжений; $\Gamma_{13},\Gamma_{23},\Gamma_{31},\Gamma_{32}$ – усредненные сдвиговые деформации в соответствующих плоскостях; l_{13},l_{23} – изгиб-кручения от моментов моментных напряжений; $M_{11},M_{22},M_{12},M_{21}$ – изгибающие и крутящие моменты от силовых напряжений; L_{11},L_{22}, L_{12},L_{21},L_{33} – изгибающие и крутящие моменты от моментных напряжений; $N_{13},N_{23},N_{31},N_{32}$ – поперечные и родственные им усилия; $\Lambda_{13,}\Lambda_{23}$ – гипермоменты от моментных напряжений.

К системе уравнений прикладной теории изгибной деформации микрополярных упругих ортотропных (изотропных) тонких пластин (1.1)-(1.5) следует присоединить граничные условия, которые выражаются так (например, для края $\alpha_1 = \text{const}$) [2, 4]:

$$M_{11} = M_{11}^* \text{ или } K_{11} = K_{11}^*; \quad M_{12} = M_{12}^* \text{ или } K_{12} = K_{12}^*,$$

$$N_{13} = N_{13}^* \text{ или } w = w^*; \tag{1.6}$$

$$L_{11} = L_{11}^* \text{ или } k_{11} = k_{11}^*; \; L_{12} = L_{12}^* \text{ или } k_{12} = k_{12}^*; \; \Lambda_{13} = \Lambda_{13}^* \text{ или } l_{13} = l_{13}^*.$$

Если пластинка круглая, тогда необходимо использовать полярную систему координат в срединной плоскости (r,θ). В этом случае имеем: $\alpha_1 = r$, $\alpha_2 = \theta$, $H_1 = 1$, $H_2 = r$. В полярной системе координат уравнения равновесия (1.1) и геометрические соотношения (1.2) примут следующий вид.

Уравнения равновесия:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial N_{13}}{\partial r} + \frac{1}{r}N_{13} + \frac{1}{r}\frac{\partial N_{23}}{\partial \theta} = -(p_3^+ + p_3^-), \\
N_{31} - \frac{\partial M_{11}}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(M_{22} - M_{11}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial M_{21}}{\partial \theta} = h(p_1^+ - p_1^-), \\
N_{32} - \frac{\partial M_{12}}{\partial r} - \frac{1}{r}\left(M_{12} + M_{21}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial M_{22}}{\partial \theta} = h(p_2^+ - p_2^-), \\
\frac{\partial L_{11}}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(L_{11} - L_{22}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial L_{21}}{\partial \theta} + (N_{23} - N_{32}) = -(m_1^+ + m_1^-), \\
\frac{\partial L_{12}}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(L_{12} + L_{21}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial L_{22}}{\partial \theta} + (N_{31} - N_{13}) = -(m_2^+ + m_2^-), \\
L_{33} - \frac{\partial \Lambda_{13}}{\partial r} - \frac{1}{r}\Lambda_{13} - \frac{1}{r}\frac{\partial \Lambda_{23}}{\partial \theta} + (M_{12} - M_{21}) = h(m_3^+ - m_3^-),
\end{gathered} \tag{1.7}$$

Геометрические соотношения:

$$K_{11}=\frac{\partial\psi_1}{\partial r},\quad K_{22}=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_2}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\psi_1,$$

$$K_{12}=\frac{\partial\psi_2}{\partial r}-\iota,\ K_{21}=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_1}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\psi_2+\iota,$$

$$\Gamma_{13}=\frac{\partial w}{\partial r}+\Omega_2,\Gamma_{23}=\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}-\Omega_1,\Gamma_{31}=\psi_1-\Omega_2,\Gamma_{32}=\psi_2+\Omega_1, \tag{1.8}$$

$$k_{11}=\frac{\partial\Omega_1}{\partial r},\ k_{22}=\frac{1}{r}\frac{\partial\Omega_2}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\Omega_1,\ k_{33}=\iota,$$

$$k_{12}=\frac{\partial\Omega_2}{\partial r},\ k_{21}=\frac{1}{r}\frac{\partial\Omega_1}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\Omega_2,$$

$$l_{13}=\frac{\partial\iota}{\partial r},\quad l_{23}=\frac{1}{r}\frac{\partial\iota}{\partial\theta}.$$

Физические соотношения упругости остаются прежные– (1.3),(1.5).

2. **Осесимметричная задача изгиба для микрополярных ортотропных и изотропных круглых пластин.** Если нагрузка, действующая на круглую пластинку, распределена симметрично относительно оси, перпендикулярной к пластинке и проходящей через ее центр, и граничные условия являются симметричными относительно указанной оси, изогнутая поверхность срединной плоскости также будет осесимметричной. Рассмотрим микрополярный ортотропный материал. В этих условиях все величины, участвующие в задаче изгиба, не будут зависеть от центрального угла θ, а будут функцией только r. Тогда уравнения изгиба (отметим, что в осесимметричном случае задачи изгиба и кручения пластинки разделяются друг от друга) будут выражаться следующим образом.

Уравнения равновесия:

$$\frac{dN_{13}}{dr}+\frac{1}{r}N_{13}=-q_3,\quad N_{31}-\frac{dM_{11}}{dr}-\frac{1}{r}\left(M_{11}-M_{22}\right)=0,$$

$$\frac{dL_{12}}{dr}+\frac{1}{r}\left(L_{12}+L_{21}\right)+N_{31}-N_{13}=0. \tag{2.1}$$

Физико-геометрические соотношения:

$$N_{13}=\tilde{C}_{55}\frac{dw}{dr}+C_{56}\psi_1+\left(\tilde{C}_{55}-C_{56}\right)\Omega_2,\quad N_{31}=C_{56}\frac{dw}{dr}+C_{66}\psi_1+\left(C_{56}-C_{66}\right)\Omega_2,$$

$$M_{11}=D_{11}\frac{d\psi_1}{dr}+D_{12}\frac{1}{r}\psi_1,\quad M_{22}=D_{12}\frac{d\psi_1}{dr}+D_{22}\frac{1}{r}\psi_1, \tag{2.2}$$

$$L_{12}=d_{88}\frac{d\Omega_2}{dr}-d_{78}\frac{1}{r}\Omega_2, L_{21}=d_{78}\frac{d\Omega_2}{dr}-d_{77}\frac{1}{r}\Omega_2 /$$

Граничные условия:

а) жесткого защемления: $w=0,\ \psi_1=0,\ \Omega_2=0,$ при $r=a$; (2.3)

б) шарнирного опирания: $w=0,\quad M_{11}=0,\quad L_{12}=0$ при $r=a$. (2.4)

Будем считать, что нагрузка на пластинку распределена равномерно: $q_3 = q = \text{const}$.

Подставив формулы (2.2) в уравнения (2.1), получим систему уравнений изгиба микрополярных круглых пластин относительно величин w, ψ_1, Ω_2:

$$\begin{cases} \tilde{C}_{55}\left(\dfrac{d^2w}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{dw}{dr}\right)+C_{56}\left(\dfrac{d\psi_1}{dr}+\dfrac{1}{r}\psi_1\right)+\left(\tilde{C}_{55}-C_{56}\right)\left(\dfrac{d\Omega_2}{dr}+\dfrac{1}{r}\Omega_2\right)=-q. \\ C_{56}\dfrac{dw}{dr}-D_{11}\dfrac{d^2\psi_1}{dr^2}-D_{11}\dfrac{1}{r}\dfrac{d\psi_1}{dr}+\left(C_{66}+\dfrac{D_{22}}{r^2}\right)\psi_1+\left(C_{56}-C_{66}\right)\Omega_2=0, \\ \left(C_{56}-\tilde{C}_{55}\right)\dfrac{dw}{dr}+d_{88}\dfrac{d^2\Omega_2}{dr^2}+d_{88}\dfrac{1}{r}\dfrac{d\Omega_2}{dr}-\left(\dfrac{d_{77}}{r^2}+C_{66}+\tilde{C}_{55}-2C_{56}\right)\Omega_2+\left(C_{66}-C_{56}\right)\psi_1=0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Примем следующую подстановку :

$$\chi=\tilde{C}_{55}\frac{\partial w}{\partial r}+C_{56}\psi_1+\left(\tilde{C}_{55}-C_{56}\right)\Omega_2, \tag{2.6}$$

тогда из первого уравнения (2.5) получим следующее уравнение для определения функции χ:

$$\frac{\partial\chi}{\partial r}+\frac{1}{r}\chi=-q\,. \tag{2.7}$$

Решение этого дифференциального уравнения первого порядка относительно функции χ будет (ниже рассмотрим случай, когда пластинка сплошная, не имеет отверстия):

$$\chi=-\frac{qr}{2}\,. \tag{2.8}$$

Возвращаясь к подстановке (2.6), получим

$$\tilde{C}_{55}\frac{\partial w}{\partial r}+C_{56}\psi_1+\left(\tilde{C}_{55}-C_{56}\right)\Omega_2=-\frac{qr}{2}. \tag{2.9}$$

На основе (2.5) и (2.9) приходим к решению следующего дифференциального уравнения для функции $\psi_1(r)$:

$$\frac{d_{88}\tilde{C}_{55}}{D_{11}\left(\tilde{C}_{55}C_{66}-C_{56}^2\right)}\tilde{\nabla}^2\tilde{\nabla}^2\psi_1-\left(1+\frac{d_{88}}{D_{11}}+\frac{d_{77}\tilde{C}_{55}}{\tilde{C}_{55}C_{66}-C_{56}^2}\right)\tilde{\nabla}^2\psi_1+\frac{d_{88}D_{22}\tilde{C}_{55}}{D_{11}\left(\tilde{C}_{55}C_{66}-C_{56}^2\right)}\frac{1}{r^2}\tilde{\nabla}^2\psi_1-$$
$$-\left(\frac{D_{22}d_{88}}{D_{11}}-d_{77}\right)\frac{1}{r^2}\psi_1=\left[1-\frac{C_{56}\left(C_{66}-C_{56}\right)}{\tilde{C}_{55}C_{66}-C_{56}^2}+\frac{C_{66}-C_{56}+d_{77}-d_{88}}{\tilde{C}_{55}-C_{56}}\right]\frac{qr}{2}, \tag{2.10}$$

где $\tilde{\nabla}^2(\cdot)=\dfrac{d^2(\cdot)}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{d(\cdot)}{dr}-\dfrac{1}{r^2}(\cdot)$.

В случае изотропного материала уравнение (2.10) примет вид

$$\tilde{\nabla}^2\tilde{\nabla}^2\psi_1-k^2\tilde{\nabla}^2\psi_1=\frac{qr}{2}\frac{\alpha}{(\mu+\alpha)(\gamma+\varepsilon)}\frac{3(1-\nu)}{h^2}, \tag{2.11}$$

где $k^2 = \dfrac{\gamma+\varepsilon+\dfrac{2h^2\mu}{3(1-\nu)}}{\dfrac{(\mu+\alpha)(\gamma+\varepsilon)}{2\alpha}\dfrac{h^2}{3(1-\nu)}}$.

Частное решение неоднородного уравнения (2.11) имеет вид

$$\psi_1 = Cr^3, \tag{2.12}$$

где $C = -\dfrac{q}{16k^2}\dfrac{\alpha}{(\mu+\alpha)(\gamma+\varepsilon)}\dfrac{3(1-\nu)}{h^3}$.

Уравнению (2.11) соответствует однородное уравнение

$$\tilde{\nabla}^2\tilde{\nabla}^2\psi_1 - k^2\tilde{\nabla}^2\psi_1 = 0$$

или

$$\tilde{\nabla}^2\left(\tilde{\nabla}^2\psi_1 - k^2\psi_1\right) = 0. \tag{2.13}$$

Общее решение этого уравнения

$$\psi_1 = C_1 r + C_2 I_1(kr), \tag{2.14}$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования; $I_1(x)$ – функция Бесселя чисто мнимого аргумента первого порядка.

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения (2.11)

$$\psi_1 = C_1 r + C_2 I_1(kr) - \frac{q}{16k^2}\frac{\alpha}{(\mu+\alpha)(\gamma+\varepsilon)}\frac{3(1-\nu)}{h^3}r^3. \tag{2.15}$$

Для перемещения $w(r)$ и свободного поворота $\Omega_2(r)$ получим

$$\Omega_2 = C_1 r + C_2 I_1(kr) - \frac{qr^3}{16k^2}\frac{\alpha}{(\mu+\alpha)(\gamma+\varepsilon)}\frac{3(1-\nu)}{h^3} + \frac{qr}{4k^2h}\frac{1}{\gamma+\varepsilon} -$$

$$-\frac{\mu+\alpha}{2\alpha}\frac{h^2}{3(1-\nu)}C_2k^2I_1(kr) - \frac{(\mu-\alpha)qr}{16\mu h\alpha}, \tag{2.16}$$

$$w = -\frac{C_1r^2}{2} - \frac{C_2}{k}I_0(kr) + \frac{\alpha q}{(\mu+\alpha)(\gamma+\varepsilon)k^2h}\left(\frac{r^4}{64}\frac{3(1-\nu)}{h^2} - \frac{r^2}{4}\right) +$$

$$+\frac{h^2}{3(1-\nu)}C_2kI_0(kr) - \frac{qr^2}{16\mu h} + C^*, \tag{2.17}$$

где C^* – новая постоянная интегриривания.

При конкретном счете будем рассматривать условия жесткого защемления (2.3).

На основе выражений (2.15)-(2.17), удовлетворяя граничным условиям жесткого защемления (2.3), определим постоянные интегрирования C^*, C_1, C_2. После этого выражения (2.15)- (2.17) можем использовать для конкретного численного определения любого из этих основных функций, а также, используя соответствующие формулы, можем вычислить значения силовых и моментных напряжений.

Приведем результат численного счета для максимального прогиба пластинки (т.е. $w(r)$ при $r=0$). Материалом пластинки выбран полиуретан [6], для которого упругие константы имеют следующие значения:

$$\lambda=\frac{\mathrm{E}\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}=4370\,\frac{\text{кгс}}{\text{см}^2},\ \mu=\frac{\mathrm{E}}{2(1+\nu)}=1093\,\frac{\text{кгс}}{\text{см}^2},\ \alpha=46\,\frac{\text{кгс}}{\text{см}^2},$$

$$\gamma=2.4\textit{кгс},\varepsilon=2.4\ \text{кгс}\ ,\ \beta=120\,\text{кгс}.$$

Имеем

при $\quad q=0.5\cdot10^{-3}\,\dfrac{\text{кгс}}{\text{см}^2},a=b=10\textit{см},h=0.1\text{см}\quad(\delta=\dfrac{1}{100})$.

$$w_{\max}^{\textit{мик}}=0.006\textit{см}\ ,\ w_{\max}^{\textit{кл}}=0.008\textit{см}\ ,\ \frac{w_{\max}^{\textit{мик}}}{w_{\max}^{\textit{кл}}}=0.75\ .$$

Разность составляет 25%. Приведенный результат показывает эффективные свойства микрополярного материала с точки зрения жесткости пластинки. Отметим, что аналогичный результат получается и для напряжений, т. е. и с точки зрения прочности пластинки при остальных равных условиях микрополярный материал эффективнее классического.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН ПА в рамках научного проекта №SCS 13-2C 154.

Гюмрийский государственный педагогический
институт им. М. Налбандяна

Г. С. Айрапетян,
член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян

Изгиб микрополярных круглых пластин с независимыми полями перемещений и вращений

На основе построенной ранее математической модели микрополярных упругих ортотропных и изотропных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений изучается задача изгиба круглой сплошной пластинки, когда она нагружена равномерно распределенной нормальной к срединной плоскости пластинки нагрузкой, а контур пластинки жестко защемлен. Построено точное решение этой граничной задачи. Выполнен численный анализ, на основе которого устанавливаются эффективные свойства микрополярного материала с точки зрения прочности и жесткости пластинки по сравнению с классическими материалами.

Գ. Ս. Հայրապետյան,
ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ս. Հ. Սարգսյան

Պտույտների և տեղափոխությունների անկախ դաշտերով միկրոպոլյար կլոր սալերի ծռումը

Նախկինում կառուցված պտույտների և տեղափոխությունների անկախ դաշտերով միկրոպոլյար օրթոտրոպ և իզոտրոպ բարակ սալերի մաթեմատիկական մոդելի

հիման վրա ուսումնասիրվում է հոծ կլոր սալի ծռման խնդիրը, երբ սալը բեռնավորված է սալի միջին հարթությանն ուղղահայաց հավասարաչափ բաշխված բեռով, իսկ սալի եզրագիծը կոշտ ամրակցված է: Կառուցված է այս եզրային խնդրի ճշգրիտ լուծումը: Կատարված է թվային անալիզ, որի հիման վրա հաստատվում են միկրոպոլյար նյութի էֆեկտիվ հատկությունները սալի ամրության և կոշտության իմաստով՝ համեմատած դասական նյութի հետ:

G. S. Hayrapetyan,
Corresponding member of NAS RA S. H. Sargsyan

Bending of Micropolar Circular Plates with Free Firlds of Displacements and Rotations

The problem of bending of circular plate, when it is under the evently distributed load, which is perpendicular to the plate middle plane is studied on the basis of previously constructed mathematical models of micropolar orthotropic and isoteropic plates with free fields of displacements and rotations. The layer of the plate is rigidly fixed. The exact solution of the stated problem is constructed. Numerical analysis is done, on the basis of which the effective properties of micropolar material are revealed from the point of view of stiffness and rigidity compared with classical material.

Литература

1. *Саркисян С. О* - Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т. 53. Вып. 2. С. 148-156.
2. *Айрапетян Г. С., Саркисян С. О.* – Изв. НАН Армении. Механика. Т. 65. № 3. 2012. С.22-33.
3. *Айрапетян Г. С., Асланян Г. С., Саркисян С. О.* - ДНАН Армении. 2014. Т. 114. № 4. С.333-342.
4. *Саркисян С. О.* - Физическая мезомеханика. 2011. Т. 14. № 1. С. 55-66.
5. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М. Наука. 1972. 734 с.
6. *Lakes R. S.* In: Continuum Models for Materials with Micro-Structure (Edited by H. Muhlaus, J. Wiley). New-York, 1995. P. 1-22.