

МАТЕМАТИКА

УДК 517.1

С. Л. Гогян

О демократических системах в $L_1(0,1)^d$

(Представлено академиком Г. Г. Геворкяном 23/III 2015)

Ключевые слова: *многомерная система Хаара, демократическая система.*

Пусть $\Psi = \{\psi_n\}$ – нормированная система в банаховом пространстве X . Для любого конечного множества натуральных чисел $A \subset \mathbb{N}$ определим следующую функцию:

$$f_A = \sum_{i \in A} \psi_i.$$

В общем случае норма функции f_A зависит не только от мощности множества A , но и от конкретных ее элементов. Однако легко заметить, что в случае, когда X является гильбертовым пространством, а Ψ – ортонормированной системой, мы имеем $\|f_A\| = \sqrt{\#A}$, т. е. норма $\|f_A\|$ не зависит от значений элементов множества A . В работе [1] введено понятие демократических систем, а именно

Определение 1. Система элементов $\Psi = \{\psi_n\}$ называется демократической системой в X , если существует число $C \geq 1$ такое, что соотношение

$$\|f_A\| \leq C \|f_B\| \quad (1)$$

выполняется для любых конечных множеств натуральных чисел A и B с $\#A = \#B$.

Итак, имеем, что всякая ортонормированная в гильбертовом пространстве система является также демократической системой. Отметим, что понятие демократических систем тесно связано с теорией нелинейных аппроксимаций, точнее с жадными алгоритмами. В работе [1] доказано, что жадный алгоритм по некоторому базису обеспечивает очень хорошую скорость сходимости тогда и только тогда, когда этот базис является безусловным базисом и демократической системой. Другие свойства для демократических систем получены в работе [2].

В работах [3] и [4] описаны все подсистемы системы Хаара, которые являются демократическими системами в $L_1(0,1)$. В данной работе мы

обобщаем этот результат на многомерный случай. Напомним определение многомерной системы Хаара.

Пусть D_n – множество всех двоичных интервалов длины 2^{-n} , а $D_n^d = D_n \times \dots \times D_n$ – множество всех двоичных кубов длины 2^{-n} . Положим также $D^d = \bigcup_n D_n^d$.

Пусть $j = \overline{\epsilon_1 \epsilon_2 \dots \epsilon_d}$ – двоичное разложение числа $1 \leq j \leq 2^d - 1$ и $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in [0, 1]^d$. Обозначим

$$h^{(j)}(x) = r_{\epsilon_1}(x_1) \cdot r_{\epsilon_2}(x_2) \cdot \dots \cdot r_{\epsilon_d}(x_d),$$

где

$$r_0(t) = 1 \text{ и } r_1(t) = \begin{cases} 1, & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ -1, & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right). \end{cases}$$

Каждому $j \in \overline{\epsilon_1 \epsilon_2 \dots \epsilon_d}$ соответствует следующая функция из системы Хаара:

$$h_j^{(j)}(x) = 2^{nd} h^{(j)}\left(\frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1}, \dots, \frac{x_d - a_d}{b_d - a_d}\right).$$

Многомерной системой Хаара называется множество функций $h_I^{(j)}$ совместно с функцией $h_{[0,1]^d}^{(0)} \equiv 1$. Значения функций в точках разрыва для нас не существенны, поэтому мы их не приводим.

В настоящей работе доказывается следующая теорема.

Теорема 1. Пусть имеется множество двоичных кубов $\{I_n\}$. Тогда

множество функций $\left\{ \left\{ h_{I_n}^{(j)} \right\}_{j=1}^{2^d-1} \right\}_{n=1}^{+\infty}$ является демократической системой в

$L_1(0,1)^d$ тогда и только тогда, когда существует натуральное число N такое, что из любой последовательности двоичных кубов $J_1 \subset J_2 \subset \dots \subset J_N$ с $\mu(J_i) = 2^d \mu(J_{i-1})$ для $i = 2, 3, \dots, N$ существует по крайней мере один элемент, который не принадлежит $\{I_n\}$.

Замечание. Конечное количество элементов не может повлиять на свойство демократичности системы, поэтому для удобства в дальнейших рассуждениях мы будем предполагать, что двоичный куб $[0,1]^d$ отсутствует в наборах двоичных кубов.

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся три леммы.

Лемма 1. Пусть имеются функция $f \in L_1(0,1)^d$ и двоичный куб I . Тогда

$$\|f\|_I \geq |c_I^{(j)}|$$

для всех $1 \leq j \leq 2^d - 1$.

Доказательство. Заметим, что

$$\left| c_I^{(j)} \right| = \mu(I) \cdot \left| \int_I f(t) h_I^{(j)}(t) dt \right| \leq \mu(I) \int_I |f(t) h_I^{(j)}(t)| dt \leq \int_I |f(t)| dt = \|f\|_I.$$

Лемма 1 доказана.

Для любой функции $f \in L_1(0,1)^d$ и двоичного куба I положим

$$P_I(f) = f - \sum_{J \subseteq I} \sum_{j=1}^{2^d-1} c_J^{(j)} h_J^{(j)}.$$

Лемма 2. Пусть имеется функция $f \in L_1(0,1)^d$, для которой $\max_{J,j} |c_J^{(j)}| \leq 1$. Тогда для любого двоичного куба I имеет место следующее соотношение:

$$\|P_I(f)\|_I \leq 1.$$

Доказательство. Пусть $\mu(I) = 2^{-nd}$. Заметим, что функция $P_I(f)$ постоянна на множестве I , а абсолютное значение этой величины не превосходит число

$$(2^d - 1)(1 + 2^d + 2^{2d} + \dots + 2^{(n-1)d}) = 2^{nd} - 1 < 2^{nd}.$$

Поэтому имеем, что $\|P_I(f)\|_I \leq 2^{nd} \cdot \mu(I) = 1$. Лемма 2 доказана.

Пусть имеется набор двоичных кубов $\{I_n\}$ и $I \in \{I_n\}$. Обозначим через $K(I)$ самый маленький двоичный куб, который содержит в себе I и который не содержится в множестве $\{I_n\}$.

Лемма 3. Пусть имеется конечное множество двоичных кубов $\{J_s\}_{s=1}^m \subset \{I_n\}$, где $\{I_n\}$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Далее, пусть

$$K\left(\{J_s\}_{s=1}^m\right) = \left\{K(J) : J \left\{J_s\right\}_{s=1}^m\right\}.$$

Тогда

$$\#\left(\{J_s\}_{s=1}^m\right) \geq \frac{m}{2^{(N-1)d}}.$$

Доказательство этой леммы непосредственно следует из определения $K\left(\{J_s\}_{s=1}^m\right)$ и условий леммы.

Доказательство теоремы. Необходимость. Пусть условие теоремы не выполняется. Для произвольно большого M положим $N = (2^d - 1)M$ и выберем множество двоичных кубов $J_1 \subset J_2 \subset \dots \subset J_N$ с $\mu(J_i) = 2^d \mu(J_{i-1})$ для $i = 2, 3, \dots, N$. Легко проверить, что

$$\left\| \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^{2^d-1} h_{J_i}^k \right\| < 2,$$

но

$$\left\| \sum_{i=1}^N h_{J_i}^{(1)} \right\| > \frac{N}{2}.$$

Это означает, что условие (1) не может выполняться ни при каком C .

Достаточность. Пусть условие теоремы выполняется. Далее, пусть имеется множество двоичных кубов $\{J_s\}_{s=1}^m$ (каждый может повторяться, но не более чем $2^d - 1$ раз). По индукции по $\#K(\{J_s\}_{s=1}^m)$ с использованием лемм 1-3 легко проверить, что для любых чисел $1 \leq j_1, j_2, \dots, j_k \leq 2^d - 1$ будет иметь место следующее соотношение:

$$\left\| \sum_{i=1}^m h_{J_i}^{(j_i)} \right\| \geq \frac{m}{2^{Nd}}.$$

Но с другой стороны, согласно неравенству треугольника имеем, что

$$\left\| \sum_{i=1}^m h_{J_i}^{(j_i)} \right\| \leq m,$$

т. е. условие (1) выполняется при $C = 2^{Nd}$. Теорема 1 доказана.

Институт математики НАН РА
e-mail: gogyan@instmath.sci.am

С. Л. Гогян

О демократических системах в $L_1(0,1)^d$

Описаны все множества двоичных кубов $\{I_n\}$, для которых подмножество $\{h_{I_n}^{(j)}\}$ многомерной системы Хаара является демократической системой в $L_1(0,1)^d$.

Ս. Լ. Գոգյան

$L_1(0,1)^d$ –ում դեմոկրատիկ համակարգերի մասին

Նկարագրված են բոլոր երկուական խորանարդների $\{I_n\}$ բազմությունները, որոնց համար Հաարի բազմաչափ համակարգի $\{h_{I_n}^{(j)}\}$ ենթաբազմությունը $L_1(0,1)^d$ –ում դեմոկրատիկ համակարգ է:

S. L. Gogyan

On Democratic Systems in $L_1(0,1)^d$

All sets of dyadic cubes $\{I_n\}$ are characterized such that the subsystem $\{h_{I_n}^{(j)}\}$ of the multivariate Haar system is democratic system in $L_1(0,1)^d$.

Литература

1. Konyagin S. V., Temlyakov V. N. – East J. Approx. 1999. V. 5. P. 1-15.
2. Dilworth S. J., Kalton N. J., Kutzarova D., Temlyakov V. N. – Constr. Approx. 2003. V. 19. P. 575-597.
3. Gogyan S. – East Journal on Approximations. 2005. V. 11. P. 221-236.
4. Gogyan S. – J. of Contemporary Mathematical Analysis. 2011. V. 46. P. 21-31.