ԲՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ
ԱԿԱԴԵՄԻԱ НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 115 2015 № 2

МАТЕМАТИКА

УДК 519.6

Ф. А. Талалян

Об одной теореме из теории равномерного распределения последовательностей

(Представлено академиком Н.У. Аракеляном 21/I 2015)

Ключевые слова: *равномерно распределенные последовательности.*

Известен следующий результат ([1], теорема 2.6).

Теорема 1. *Пусть последовательность* $x_n,\ n=1,2,....,$ *равномерно распределена на* $[0,1]$. *Тогда имеет место равенство*

$$\limsup_{n\to\infty} n\left|x_{n+1}-x_n\right|=\infty.$$

В монографии [1] данная теорема выводится как следствие из критерия Вейла и одной тауберовой теоремы Харди.

В настоящей заметке дается новое простое доказательство указанной теоремы, опирающееся только на определение равномерной распределенности и не использующее никаких вспомогательных фактов. При этом предложенный метод позволяет рассматривать сразу многомерный случай.

В конце будет показано, как можно перенести тот же результат на случай многомерных последовательностей с асимптотической функцией распределения ([1], с. 63).

В дальнейшем будем пользоваться следующими обозначениями.

Пусть $s\ge 1$– натуральное число, s-мерные векторы будут обозначены через $\overline{a},\ \overline{b},\ \overline{x},\ \overline{x}_n$ и т. д.

Если $\overline{a}=(a_1,...,a_n)$, $\overline{b}=(b_1,...,b_n)$, причем $a_i<b_i$ для всех $i=1,...,s$, то через $\left[\overline{a},\overline{b}\right)$ обозначим s-мерный полуоткрытый справа интервал, определенный точками $\overline{a}$ и $\overline{b}$, т. е.

$$\left[\overline{a},\overline{b}\right)=\left\{\overline{x}=(x_1,...,x_n): a_i\le x_i<b_i,\ \ i=1,...,s\right\}.$$

Далее, если r – действительное число, через $\overline{r}$ обозначим s-мерный вектор, все координаты которого равны r. Таким образом,

$$\overline{0}=(0,\dots,0),\ \ \overline{1}=(1,\dots,1),\ \overline{\left(\frac{1}{2}\right)}=\left(\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2}\right) \text{ и т. д.}$$

Если $\overline{x}\in R^s$ и $F\subset R^s$, то через $|\overline{x}|$ и $|F|$ будут обозначены модуль вектора $\overline{x}$ и, соответственно, s-мерный объем F (если он существует).

Наконец, если $F\subset R^s$, $\overline{x}_n\in\left[\overline{0},\overline{1}\right)$, $i=1,2,\dots$ и N – натуральное число, то, следуя [1], через $A\left(F;N;(\overline{x}_n)\right)$ или просто $A(F;N)$ обозначим количество членов $\overline{x}_n$ с $n\le N$, принадлежащих F.

Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть последовательность* $(\overline{x}_n)$ *равномерно распределена на* s*-мерном единичном кубе* $\left[\overline{0},\overline{1}\right)$. *Тогда*

$$\limsup_{n\to\infty} n\left|\overline{x}_{n+1}-\overline{x}_n\right|=\infty.$$

Доказательство. Предположим обратное. Пусть

$$n\left|\overline{x}_{n+1}-\overline{x}_n\right|\le C,\ \ n=1,2,\dots;\ \ C>0. \tag{1}$$

Обозначим для краткости

$$I=\left[\overline{0},\overline{\left(\frac{1}{8s}\right)}\right),\quad J=\left[\overline{0},\overline{\left(\frac{1}{4\sqrt{s}}\right)}\right);\quad K=\left[\overline{0},\overline{\left(\frac{1}{2}\right)}\right) \quad \text{и} \quad F=\left[\overline{0},\overline{1}\right)\setminus K,$$

где \ – знак теоретико-множественной разности.

Очевидно, F состоит из конечного числа попарно неперекрывающихся s-мерных сегментов. Следовательно, по условию теоремы выполняется равенство

$$\lim_{N\to\infty}\frac{A(F;N)}{N}=|F|. \tag{2}$$

Выберем натуральное число n_0 так, чтобы выполнялось неравенство

$$\left|\overline{x}_{n+1}-\overline{x}_n\right|<\frac{1}{8\sqrt{s}} \quad \text{при} \quad n\ge n_0. \tag{3}$$

Пусть (n_i) – бесконечная строго возрастающая последовательность номеров, для которых

$$n\ge n_0 \quad \text{и} \quad \overline{x}_{n_i}\in I. \tag{4}$$

Для каждого i обозначм через m_i наименьшее натуральное число, для которого $\overline{x}_{n_i+m_i}$ не принадлежит J. Тогда

$$\left|\overline{x}_{n_i+m_i}\right|\ge\frac{1}{4\sqrt{s}} \tag{5}$$

и

$$\left|\overline{x}_{n_i}+j\right|\ge\frac{1}{4},\quad j=1,\dots,m_i-1. \tag{6}$$

Кроме того, в силу (3) и (6) имеем

$$\left|\overline{x}_{n_i+m_i}\right|\le\left|\overline{x}_{n_i+m_i-1}\right|+\left|\overline{x}_{n_i+m_i}-\overline{x}_{n_i+m_i-1}\right|<\frac{1}{4}+\frac{1}{8\sqrt{s}}<\frac{1}{2}. \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует, что $\overline{x}_{n_i+j} \in K$ для всех $j = 0,1,..., m_i$, откуда следует равенство

$$A(F;n_i + m_i) = A(F;n_i), \; i = 1,2,... \tag{8}$$

Далее, из очевидного неравенства

$$\left|\overline{x}_{n_i+m_i}\right| \le \left|\overline{x}_{n_i}\right| + \left|\overline{x}_{n_i+1} - \overline{x}_{n_i}\right| + ... + \left|\overline{x}_{n_i+m_i} - \overline{x}_{n_i+m_i-1}\right|$$

в силу (3) и (5) получим

$$\left|\overline{x}_{n_i+1} - \overline{x}_{n_i}\right| + ... + \left|\overline{x}_{n_i+m_i} - \overline{x}_{n_i-m_i-1}\right| \ge \left|\overline{x}_{n_i+m_i}\right| - \left|\overline{x}_{n_i}\right| \ge \frac{1}{4\sqrt{s}} - \frac{1}{8\sqrt{s}} = \frac{1}{8\sqrt{s}}. \tag{9}$$

Теперь из (1) и (9) получим

$$\frac{m_i C}{n_i} > \frac{C}{n_i} + ... + \frac{C}{n_i + m_i - 1} \ge \frac{1}{8\sqrt{s}}$$

или

$$\frac{m_i}{n_i} \ge \frac{1}{8C\sqrt{s}}, \quad i = 1,2,... \tag{10}$$

(Заметим, что из (10) следует $\lim m_i = \infty$).

В силу (8) и (10) будем иметь

$$\frac{A(F;n_i + m_i)}{n_i + m_i} = \frac{A(F;n_i)}{n_i} = \frac{A(F;n_i)}{n_i} \cdot \frac{n_i}{n_i + m_i} =$$
$$= \frac{A(F;n_i)}{n_i} \cdot \frac{1}{1 + \frac{m_i}{n_i}} < \frac{A(F;n_i)}{n_i} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{8C\sqrt{s}}}.$$

Предельным переходом при $i \to \infty$ отсюда получим

$$|F| \le |F| \frac{1}{1 + \frac{1}{8C\sqrt{s}}},$$

чего не может быть, так как у нас $|F| > 0$ и $C > 0$. Таким образом, предположение (1) приводит к противоречию. Теорема 2 доказана.

Теперь перейдем к рассмотрению последовательностей с непрерывной асимптотической функцией распределения многих переменных (случай одной переменной легко сводится к случаю обычной равномерной распределенности).

Обозначим через G класс непрерывных монотонных функций, заданных на $\left[\overline{0},\overline{1}\right]$, $g(\overline{0}) = 0$, $g(\overline{1}) = 1$ и обладающих еще тем свойством, что области

$$\left\{\overline{x} \in \left[\overline{0},\overline{1}\right) : g(\overline{x}) \ge t\right\}$$

являются квадрируемыми.

Монотонность функций многих переменных мы понимаем в смысле Юнга ([2], с. 347).

Определение. Пусть $g \in \bar{G}$ и $(\bar{x}_n)$ – некоторая последовательность точек $[\bar{0}, \bar{1})$. Функцию g назовем асимптотической функцией распределения для $(\bar{x}_n)$, если для каждого $\alpha \in (0,1)$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{A\big([0,\alpha);N;(g(\bar{x}_n))\big)}{N} = \alpha. \tag{11}$$

Аналог теоремы 1 имеет место также для последовательностей с асимптотической функцией распределения в смысле приведенного определения. А именно, справедлива

Теорема 3. *Пусть* $(\bar{x}_n)$ *– последовательность точек* $[\bar{0}, \bar{1})$ *и* $g \in \bar{G}$ *является асимптотической функцией распределения для* $(\bar{x}_n)$. *Тогда имеет место равенство*

$$\limsup_{n\to\infty} n\left|g(\bar{x}_{n+1}) - g(\bar{x}_n)\right| = \infty.$$

Доказательство. Предположим обратное. Пусть

$$n\left|g(\bar{x}_{n+1}) - g(\bar{x}_n)\right| \le C;\ n = 1,2,...;\ C > 0. \tag{12}$$

Выберем натуральное число n_0 так, чтобы

$$\left|g(\bar{x}_{n+1}) - g(\bar{x}_n)\right| < \frac{1}{8} \qquad \text{при} \qquad n \ge n_0. \tag{13}$$

Пусть n_i – строго возрастающая бесконечная последовательность такая, что

$$n_i > n_0 \quad \text{и} \quad g(\bar{x}_i) < \frac{1}{8}. \tag{14}$$

Пусть для каждого i m_i – наименьшее натуральное число, для которого

$$g\left(\bar{x}_{n_i+m_i}\right) \ge \frac{1}{4}. \tag{15}$$

Используя соотношения (12)–(15), с помощью тех же рассуждений, которые были применены при доказательстве теоремы 2, мы получим соотношения

$$A\left(\left[\frac{1}{2},1\right); n_i + m_i; (g(\bar{x}_n))\right) = A\left(\left[\frac{1}{2},1\right); n_i; (g(\bar{x}_n))\right)$$

и

$$\frac{m_i}{n_i} \ge \frac{1}{8C},$$

которые, как показано выше, приводят к противоречию. Теорема 3 доказана.

Институт математики НАН РА

Ф. А. Талалян

Об одной теореме из теории равномерного распределения последовательностей

Приводится новое простое доказательство одной теоремы из теории равномерно распределенных последовательностей. При этом предлагаемый метод позволяет обобщать указанную теорему на многомерный случай и на случай последовательностей с асимптотической функцией распределения.

Ֆ. Ա. Թալալյան

Հավասարաչափ բաշխված հաջորդականությունների տեսության մի թեորեմի մասին

Բերվում է հավասարաչափ բաշխավծ հաջորդականությունների տեսության մի թեորեմի պարզ ապացույց, որը հնարավորություն է տալիս տարածելու նշված թեորեմը բազմաչափ, ինչպես նաև բաշխվածության ասիմպտոտիկ ֆունկցիա ունեցող հաջորդականությունների վրա:

F. A. Talalyan

On a Theorem of the Theory of Uniform Distribution of Sequences

A new simple proof is given for a theorem from the theory of uniform distribution of sequences. The presented method provides generalization of this theorem both to multidimensional case and for sequences with asymptotic function of distribution.

Литература

1. *Кейперс Л., Нидеррейтер Г.* Равномерно распределенные последовательности. М. Наука. 1985.
2. *Hobson E. W.* The theory of functions of a real variable. New York. 1927.