

МАТЕМАТИКА

УДК 517.986.23

К. В. Арутюнян¹, А. Г. Камалян², И. М. Спитковский³

О некоторых экстремальных свойствах частных индексов треугольных матриц-функций

(Представлено академиком А.Б. Нерсисяном 8/VIII 2014)

Ключевые слова: *треугольные матрицы-функции, факторизация, частные индексы.*

1. Постановка задачи. Пусть Ω – ограниченная конечно-связная область комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с границей Γ . Без ограничения общности, $0 \in \Omega$. Ниже мы предполагаем, что контур Γ является карлесоновым. Как известно (см. [1]), в этом случае сингулярный интегральный оператор S , определенный по формуле

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad t \in \Gamma,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения, является ограниченным в пространствах $L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$, и порождает аналитические проекторы

$P_{\pm} = \frac{1}{2}(I \pm S)$. Рассмотрим классы функций $L_p^+ = \text{im } P_+$, $L_p^- = \text{im } P_- + \mathbb{C}$.

Через X^n и $X^{n \times n}$ будем обозначать соответственно множество n -мерных векторов и множество всех матриц размера $n \times n$ с компонентами из X .

Пусть $G, G^{-1} \in L_{\infty}^{n \times n}(\Gamma)$. В ряде задач математической физики (см. [2]) важную роль играет представление

$$G = G_- \Lambda G_+^{-1},$$

где $G_{\pm} \in (L_p^{\pm})^{n \times n}$, $G_{\pm}^{-1} \in (L_q^{\pm})^{n \times n}$ ($q = p/(p-1)$), оператор $GS G^{-1}$ ограничен в пространстве $(L_p(\Gamma))^n$ (действие S на вектор-функцию понимается покомпонентно) и $\Lambda(t) = \text{diag}(t^{\kappa_1}, \dots, t^{\kappa_n})$, $\kappa_1, \dots, \kappa_n \in \mathbb{Z}$.

Это представление принято называть факторизацией матрицы-функции G , а числа $\kappa_1, \dots, \kappa_n$ – ее частными индексами. В скалярном случае

$n=1$ единственный частный индекс принято называть просто индексом функции G . Заметим, что набор частных индексов $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n) \in \mathbb{Z}^n$ определяется с точностью до перестановки его компонент.

Для данного $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_n) \in \mathbb{Z}^n$ через $T(\chi)$ обозначим класс нижнетреугольных матриц-функций из класса $L_{\infty}^{n \times n}(\Gamma)$ с факторизуемыми диагональными элементами, индексы которых равны соответственно $\chi_1, \dots, \chi_n$.

Как известно (см. [3], а также [2]), матрицы-функции из класса $T(\chi)$ допускают факторизацию. Множество всех возможных наборов частных индексов матриц-функций из $T(\chi)$ обозначим через $A(\chi)$. Множество $A(\chi)$ инвариантно относительно перестановок, т.е. с каждым вектором $\kappa \in A(\chi)$ множеству $A(\chi)$ принадлежат и векторы, полученные из κ путем перестановки его компонент. Поскольку χ является набором частных индексов любой диагональной матрицы из $T(\chi)$, то $\chi \in A(\chi)$. Подмножество B множества $A(\chi)$ будем называть базовым подмножеством $A(\chi)$, если множество векторов, полученных путем всевозможных перестановок компонент векторов из B , совпадает с $A(\chi)$. В [4] дана явная конструкция некоторого базового подмножества $A(\chi)$, и тем самым решена задача описания $A(\chi)$.

Для $\kappa \in \mathbb{Z}^n$ мы полагаем $\kappa_{\uparrow} = (\kappa_{(1)}, \dots, \kappa_{(n)})$, где $\kappa_{(1)} \leq \dots \leq \kappa_{(n)}$ — компоненты вектора κ , упорядоченные по неубыванию. Говорят (см. [5]), что вектор $\kappa \in \mathbb{Z}^n$ мажорируется вектором χ в смысле Харди — Литлвуда — Поия, и пишут $\kappa \prec \chi$, если

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \kappa_{(i)} &\geq \sum_{i=1}^k \chi_{(i)}, \quad k=1, \dots, n-1 \\ \sum_{i=1}^n \kappa_i &= \sum_{i=1}^n \chi_i. \end{aligned} \quad (1)$$

В [3] (см. также [2]) доказано, что если $\kappa \in A(\chi)$, то $\kappa \prec \chi$. Таким образом, справедливы включения

$$E(\chi) \subseteq A(\chi) \subseteq M(\chi),$$

где $M(\chi)$ — множество всех векторов из $\mathbb{Z}^n$, мажорирующихся вектором χ , а $E(\chi)$ — множество всех векторов, полученных из χ перестановкой его компонент.

В данной работе мы описываем множества векторов χ , для которых справедливо одно из равенств $A(\chi) = E(\chi)$, $A(\chi) = M(\chi)$. Отметим в этой связи результат И. Ц. Гохберга и М. Г. Крейна (см. [6], а также [7 - 9]), согласно которому при $\chi_1 \geq \dots \geq \chi_n$ имеет место равенство $A(\chi) = E(\chi)$.

Основные результаты работы приведены в секциях 3 и 4. Они основаны на результатах работы [4]. Секция 2 является вспомогательной.

2. Предварительные результаты. Пусть $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_n) \in \mathbb{Z}^n$ и $\Delta = \{1, \dots, n\}$. Рассмотрим множество

$$D(\chi) = \{(i, j) \in \Delta \times \Delta; i > j, \chi_i - \chi_j \geq 2\}$$

и проекции $\pi_1 : D(\chi) \rightarrow \Delta$, $\pi_2 : D(\chi) \rightarrow \Delta$, определенные равенствами $\pi_1((i, j)) = i$, $\pi_2((i, j)) = j$. Для пары векторов χ и $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n) \in \mathbb{Z}^n$ введем множества

$$D_{\kappa, \chi} = \{(i, j) \in \Delta \times \Delta; i > j, \chi_i > \kappa_i \geq \kappa_j > \chi_j\},$$

$$\Delta_+ = \{i \in \Delta; \kappa_i < \chi_i\}.$$

Напомним (см. [4]), что вектор κ T -мажорируется вектором χ ($\kappa \prec_T \chi$), если имеют место равенства (1), $\pi_2(D_{\kappa, \chi}) = \Delta_+$ и если для любого подмножества $\omega_+ \subset \Omega_+$ справедливо неравенство

$$\sum_{j \in \omega_+} (\kappa_j - \chi_j) \leq \sum_{i \in \pi(D_{\kappa, \chi} \cap \pi_2^{-1}(\omega_+))} (\chi_i - \kappa_i).$$

Будем говорить, что вектор κ Q -мажорируется вектором χ , если имеет место равенство (1) и справедливы неравенства

$$\sum_{i=1}^k \kappa_i \geq \sum_{i=1}^k \chi_i, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Пусть S_n – группа перестановок множества Δ . Через $S_n(D_{\kappa, \chi})$ обозначим множество всех перестановок $\sigma \in S_n$ для которых $(i, j) \in D_{\kappa, \chi}$ влечет $\sigma^{-1}(j) < \sigma^{-1}(i)$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Вектор κ T -мажорируется вектором χ тогда и только тогда, когда для любой перестановки $\sigma \in S_n(D_{\kappa, \chi})$ вектор $\kappa' = (\kappa_{\sigma(1)}, \dots, \kappa_{\sigma(n)})$ Q -мажорируется вектором $\chi' = (\chi_{\sigma(1)}, \dots, \chi_{\sigma(n)})$.

Теорема 2. Пусть $\kappa, \chi \in \mathbb{Z}$ и $\kappa \prec_T \chi$. Тогда $\kappa \prec \chi$.

Теорема 3. Пусть $\kappa, \chi \in \mathbb{Z}^n$. Если $\chi = \chi_{\uparrow}$, $\kappa = \kappa_{\uparrow}$ и $\chi \prec \kappa$, то $\kappa \prec_T \chi$.

Из теоремы 2 в частности следует независимое от [3] доказательство включения $A(\chi) \subseteq M(\chi)$.

Для действительных чисел a и b ($a < b$) через $I(a, b)$ обозначим множество целых чисел, лежащих в отрезке $[a; b]$, а через $F(a, b)$ ($a \geq 2, b \geq 2$) – множество пар целых чисел k_1, k_2 , удовлетворяющих системе неравенств $2k_1 + k_2 \leq a$, $k_1 + 2k_2 \leq b$.

Следующая теорема дает явное описание множества $A(\chi)$ при $n = 3$, отличное от предложенных ранее в [9] и [10].

Теорема 4. Пусть $\chi = (\chi_1, \chi_2, \chi_3) \in \mathbb{Z}^3$. Тогда

а) если $D(\chi) = \emptyset$, то множество $\{\chi\}$ является базовым подмножеством $A(\chi)$;

б) если $D(\chi) = \{(2;1)\}$, то множество векторов $\{(\chi_1 + k, \chi_2 - k, \chi_3); k \in I(0; (\chi_2 - \chi_1) / 2)\}$ является базовым подмножеством $A(\chi)$;

в) если $D(\chi) = \{(3;1)\}$, то множество, состоящее из вектора χ и вектора $\chi' = (\chi_1 + 1, \chi_2, \chi_3 - 1)$, является базовым подмножеством $A(\chi)$;

г) если $D(\chi) = \{(3;2)\}$, то множество $\{(\chi_1, \chi_2 + k, \chi_3 - k); k \in I(0; (\chi_3 - \chi_2) / 2)\}$ является базовым подмножеством $A(\chi)$;

е) если $D(\chi) = \{(2;1), (3;1)\}$, то множество векторов вида

$$\kappa = (\chi_1 + k_1 + k_2, \chi_2 - k_1, \chi_3 - k_2), \quad (2)$$

где

$$(k_1, k_2) \in F(\chi_2 - \chi_1, \chi_3 - \chi_1) \cup \{(k_1; 0); k_1 \in I(\chi_3 - \chi_2 + 1; (\chi_2 - \chi_1) / 2)\} \quad (3)$$

является базовым подмножеством $A(\chi)$;

ф) если $D(\chi) = \{(3;1), (3;2)\}$, то множество векторов вида

$$\kappa = (\chi_1 + m_1, \chi_2 + m_2, \chi_3 - m_1 - m_2), \quad (4)$$

где

$$(m_1, m_2) \in F(\chi_3 - \chi_1, \chi_3 - \chi_2) \cup \{(0; m_2); m_2 \in I(\chi_3 - \chi_1 + 1; (\chi_3 - \chi_2) / 2)\}, \quad (5)$$

является базовым подмножеством $A(\chi)$;

г) если $D(\chi) = \{(2;1), (3;1), (3;2)\}$, то объединение множеств векторов вида (2) и (4), где числа k_1, k_2 определяются соотношением (3), а числа m_1, m_2 – соотношением (5), является базовым подмножеством $A(\chi)$.

3. Минимальное базовое подмножество. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. Множество, состоящее из одного элемента χ , является базовым подмножеством $A(\chi)$ тогда и только тогда, когда множество $D(\chi)$ пусто. Иными словами, для выполнения равенства $A(\chi) = E(\chi)$ необходимо и достаточно, чтобы $D(\chi) = \emptyset$.

Заметим, что условие $D(\chi) = \emptyset$ эквивалентно тому, что для любого $j \in \{1, \dots, n-1\}$ и для любого $s \in \{1, \dots, n-j\}$ справедливы неравенства $\chi_{j+s} \leq \chi_j + 1$. В частности, этому условию удовлетворяют векторы с невозрастающими компонентами $\chi_1 \geq \dots \geq \chi_n$, в соответствии с вышеуказанным результатом И. Ц. Гохберга, М. Г. Крейна.

4. Максимальное базовое подмножество. Для каждого $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_n) \in \mathbb{Z}^n$ определим множество

$$D_-(\chi) = \{(i, j) \in \Delta \times \Delta; j < i, \chi_j - \chi_i \geq 2\}.$$

Теорема 6. Пусть $\kappa, \chi \in \mathbb{Z}^n$, $D_-(\chi) = \emptyset$ и $\kappa \prec \chi$. Тогда $\kappa \in A(\chi)$. Иными словами, в случае $D_-(\chi) = \emptyset$ справедливо равенство $A(\chi) = M(\chi)$.

Условие $D_-(\chi) = \emptyset$ эквивалентно тому, что для любого $j \in \{1, \dots, n-1\}$ и для любого $s \in \{1, \dots, n-j\}$ справедливы неравенства $\chi_{j+s} \geq \chi_j - 1$. В частности, этому условию удовлетворяют векторы с неубывающими компонентами $\chi_1 \leq \dots \leq \chi_n$.

Следующее утверждение уточняет теорему 6 в случае $n = 3$.

Теорема 7. Пусть $\chi = (\chi_1, \chi_2, \chi_3) \in \mathbb{Z}^3$. Для того чтобы имело место равенство $A(\chi) = M(\chi)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих трех условий:

- a) $D_-(\chi) = \emptyset$;
- b) $\chi_1 = \chi_3 = \chi_2 + 2$;
- c) $\chi_1 = \chi_3 = \chi_2 - 2$.

¹Российско-Армянский (Славянский) университет
e-mail: harkamo@rambler.ru

²Ереванский государственный университет, Институт математики НАН РА
e-mail: kamalyan_armen@yahoo.com

³The College of William and Mary, Williamsburg, Virginia, USA, and New York University Abu Dhabi (NYUAD), UAE
e-mail: ilya@math.wm.edu, ims2@nyu.edu, imspitkovsky@gmail.com

К. В. Арутюнян, А. Г. Камалян, И. М. Спитковский

О некоторых экстремальных свойствах частных индексов треугольных матриц-функций

Рассматривается множество наборов частных индексов нижнетреугольных матриц-функций, диагональные элементы которых факторизуемы с индексами, равными компонентам вектора $\chi \in \mathbb{Z}^n$. Указанное множество $A(\chi)$ содержит множество $E(\chi)$ всех векторов, полученных из χ перестановкой его компонент, и содержится в множестве $M(\chi)$ всех векторов, мажорирующихся вектором χ . Найдены условия на χ , обеспечивающие одно из равенств $A(\chi) = E(\chi)$, $A(\chi) = M(\chi)$.

Կ. Վ. Հարությունյան, Ա. Հ. Քամալյան, Ի. Մ. Սպիտկովսկի

**Եռանկյունի մատրից-ֆունկցիաների մասնավոր ինդեքսների որոշ
էքստրեմալ հատկությունների մասին**

Դիտարկվում են ստորին-եռանկյունի մատրից-ֆունկցիաներ, որոնց անկյունագծային տարրերը ֆակտորիզացվող են $\chi \in \mathbb{Z}^n$ վեկտորի կոմպոնենտներին հավասար ինդեքսներով: Այդ դասի հնարավոր մասնավոր ինդեքսների $A(\chi)$ բազմությունը պարունակում է χ վեկտորի կոմպոնենտների տեղափոխության միջոցով ստացված $E(\chi)$ վեկտորների բազմությունը և ընդգրկված է χ վեկտորով մաժորացվող $M(\chi)$ վեկտորների բազմության մեջ: Գտնված են χ -ի վրա պայմաններ, որոնք ապահովում են $A(\chi) = E(\chi)$, $A(\chi) = M(\chi)$ հավասարումներից մեկը:

K. V. Harutyunyan, A. G. Kamalyan, I. M. Spitkovsky

**On Some Extremal Properties of the Partial Indices of Triangular
Matrix-Functions**

The set of tuples of the partial indices of lower-triangular matrix-functions is considered, diagonal elements of which are factorizable with indices equal to the components of the vector $\chi \in \mathbb{Z}^n$. The mentioned set $A(\chi)$ contains the set $E(\chi)$ of all vectors obtained from χ by permuting its components and is contained in the set $M(\chi)$ of all vectors majorized by χ . The conditions on χ under which $A(\chi) = E(\chi)$ or $A(\chi) = M(\chi)$ are obtained.

Литература

1. Böttcher A., Karlovich Yu. I. Carleson curves, Muchenhaupt weights, and Toeplitz operators. Basel and Boston. Birkhäuser Verlag. 1997.
2. Litvinchuk G. S., Spitkovsky I. M. Factorization of matrix-functions. Basel and Boston. Birkhäuser Verlag. 1987.
3. Спитковский И. М. - ДАН СССР. 1980. Т. 254. N 4. С. 816-820.
4. Арутюнян К. В., Камалян А. Г., Спитковский И. М. - ДНАН РА. 2015. Т. 115. N1. С. 7-14.
5. Маршал А., Олкин И. Неравенства. Теория мажорации и ее приложения. М. Мир. 1983. 576 с.
6. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. - УМН. 1958. Т. 13, N 2. С. 3-72.
7. Николайчук А. М. - Укр. мат. журн. 1971. Т. 23. N 6. С. 793-798.
8. Примачук Л. П. - ДАН БССР. 1970. Т. 14. N1. С. 5-7.
9. Спитковский И. М., Тишин П. М. - Укр. мат. журн. 1987. Т. 39. N 6, С. 751-756.
10. Арутюнян К. В., Камалян А. Г. - Математика в высшей школе. 2006. Т. 42. N2. С. 10-16.