ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր
Том 115 2015 № 1
Volume

МЕХАНИКА

УДК 539.3

В. М. Белубекян[1], М. В. Белубекян[2]

Резонансные и локализованные сдвиговые колебания в слое с прямоугольным поперечным сечением

(Представлено академиком С. А. Амбарцумяном 28/XI 2014)

Ключевые слова: *антиплоские волны, упругий цилиндр, сосредоточенная масса, локализованные колебания.*

При наличии в упругом теле свободного края могут появиться резонансные и локализованные в окрестности свободного края колебания. Обзор по этим колебаниям приводится в монографии [1]. Естественно ставится вопрос о связи между исследованиями по резонансным и локализованным колебаниям. Для ответа на этот вопрос предлагается рассмотреть наиболее простую модельную задачу.

1. Пусть цилинрическое тело занимает область $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $-\infty < z < \infty$. Рассматривается антиплоская задача (чисто сдвиговые колебания) [2]

$$u = v = 0,\ w = w(x, y, t). \tag{1.1}$$

Уравнение задачи имеет вид

$$c_t^2 \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},\ c_t^2 = \frac{\mu}{\rho}, \tag{1.2}$$

где μ – модуль сдвига, ρ – плотность материала цилиндра.

Три плоскости, ограничивающие цилиндр, закреплены

$$w = 0 \text{ при } x = a,\ y = 0, b. \tag{1.3}$$

Предполагается, что на границе $x = 0$ задано специальное граничное условие

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \tag{1.4}$$

Граничное условие (1.4) может появиться вследствие либо наличия тонкого слоя из материала с отличными от цилиндра характеристиками [3, 4], либо наличия сосредоточенной массы, распределенной по плоскости $x = 0$.

Решение уравнения (1.2), удовлетворяющего граничным условиям (1.3) при $y=0,b$, представляется в виде

$$w=\sum_{n=1}^{\infty} e^{i\omega_n t} w_n(x)\sin\lambda_n y\ ,\ \lambda_n=\frac{n\pi}{b}\ . \tag{1.5}$$

Подстановка (1.5) в (1.2) приводит к уравнению

$$w_n''+\lambda_n^2\left(\eta_n^2-1\right)w_n=0,\ \eta_n^2=\omega_n^2 c_t^{-2}\lambda_n^{-2}\ . \tag{1.6}$$

Уравнение (1.6) в общем случае может иметь решение, удовлетворяющее как условию $\eta_n^2<1$, так и условию $\eta_n^2\geq 1.$.

Аналогичная ситуация имеет место в задаче распространения сдвиговых волн в двухслойной среде [5].

Уравнение (1.6) имеет решение, удовлетворяющее условию $w=0$ при $x=a$ из (1.3)

$$w_n=A_n\sin\sqrt{\eta_n^2-1}\lambda_n\left(a-x\right). \tag{1.7}$$

Требуя, чтобы решение (1.5) с учетом (1.7) удовлетворило граничному условию (1.4), получим дисперсионное уравнение

$$\sqrt{\eta_n^2-1}\,ctg\left(\sqrt{\eta_n^2-1}\lambda_n a\right)=\alpha c_t^2\lambda_n\eta n_n^2\ . \tag{1.8}$$

Уравнение (1.8) в частных случаях $\alpha=0$ (край $x=0$ свободен) и $\alpha\to\infty$ (край $x=0$ закреплен) имеет только те решения, которые удовлетворяют условию

$$\eta_n^2\geq 1\ . \tag{1.9}$$

С другой стороны, для больших $\lambda_n a$ в приближении

$$cth\sqrt{1-\eta_n^2}\lambda_n a\approx 1\ . \tag{1.10}$$

Уравнение (1.8) имеет решение, удовлетворяющее условию

$$\eta_n^2<1 \tag{1.11}$$

$$\eta_n^2=2\left(1+\sqrt{1+4\alpha^2 c_t^4\lambda_n^2}\right)^{-1}. \tag{1.12}$$

Решение (1.12) соответствует результату решения задачи о локализованных колебаниях, когда вместо условия $w=0$ при $x=0$ ставится условие $\lim\limits_{при\, x\to\infty} w\ =0$.

Отсюда следует, что для достаточно больших $\lambda_n a$ уравнение (1.8) имеет решение, удовлетворяющее как условию (1.9) (согласно [1] собственные колебания), так и условию (1.9) (локализованные у свободного края колебания). Но частота локализованных колебаний с увеличением n (моды колебаний) увеличивается и может сравняться при некотором $n=N$ с частотой первой моды собственных колебаний $(n=1)$, что и будет причиной резонанса.

2. Предельным переходом $\eta_n\to 1_n$ можно показать, что уравнение (1.8) имеет решение, удовлетворяющее условию (1.11) (типа локализованных колебаний) при условии

$$\xi_n^2 > \beta^{-1}, \tag{2.1}$$

где приняты новые обозначения

$$\xi_n = \lambda_n a\ ,\ \beta = \alpha c_t^2 a^{-1}. \tag{2.2}$$

Примечание: если вместо условия $w=0$ при $x=0$ принять условие свободного края $\partial w/\partial x = 0$ при $x=0$, то предельных $(\lambda_n a \gg 1)$ локализованных колебаний не существует.

Уравнение (1.8) можно переписать в виде

$$\sqrt{\Omega_1^2 - \xi_1^2}\, ctg \sqrt{\Omega_1^2 - \xi_1^2} = \beta\Omega_1^2, \tag{2.3}$$

где введен новый безразмерный параметр частоты.

Пусть ξ_1 удовлетворят условию (2.1), т.е. $\xi_1^2 > \beta^{-1}$ и Ω_1 есть минимальный корень решения уравнения

$$\sqrt{\Omega_1^2 - \xi_1^2}\, ctg \sqrt{\Omega_1^2 - \xi_1^2} = \beta\Omega_1^2, \tag{2.4}$$

удовлетворяющего условию $\Omega_1^2 > \xi_1^2$.

Требуя, чтобы безразмерная частота (собственная) Ω_1 совпадала с n-й частотой локализованных колебаний, необходимо n найти из решения уравнения

$$\sqrt{n^2\xi_1^2 - \Omega_1^2}\, cth \sqrt{n^2\xi_1^2 - \Omega_1^2} = \beta\Omega_1^2. \tag{2.5}$$

Из (2.5) или из (1.12) можно для определения числа n получить следующую приближенную формулу:

$$n = E\left[\frac{\Omega_1^2}{\xi_1^2}\left(\beta^2\Omega_1^2 + 1\right)\right]^{1/2}, \tag{2.6}$$

где оператор E означает целую часть числа аргумента плюс единица.

Приведем некоторые приближенные численные результаты для $\xi_1 = 2\pi(a = 2b)$:

$$\begin{aligned} &\beta = 1{,}1 \Rightarrow \Omega_1^2 \approx 78{,}96,\ n = 10 \\ &\beta = 1{,}8 \Rightarrow \Omega_1^2 \approx 40{,}113,\ n = 13 \\ &\beta = 9 \Rightarrow \Omega_1^2 \approx 41{,}5,\ n = 76 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Нетрудно проверить, что условие существования локализованных колебаний (2.1) удовлетворяется.

[1]Ереванский государственный университет
[2]Институт механики НАН РА

В. М. Белубекян, М. В. Белубекян

Резонансные и локализованные сдвиговые колебания в слое с прямоугольным поперечным сечением

Установлены условия, при которых возможны одновременно локализованные и объемные сдвиговые колебания. Определяется частота n-й моды локализован-

ных колебаний, совпадающая с минимальной частотой объемных колебаний. Это совпадение является причиной внутреннего резонанса.

Վ. Մ. Բելուբեկյան, Մ. Վ. Բելուբեկյան

Ռեզոնանսային և տեղայնացված սահքի տատանումները ուղղանկյուն կտրվածքով շերտում

Հաստատված են պայմաններ, որի դեպքում հնարավոր են միաժամանակ տեղայնացված և ծավալային սահքի տատանումներ: Որոշված է տեղայնացված տատանումների n-րդ մոդայի հաճախությունը, որը համընկնում է ծավալային տատանման մինիմալ հաճախության հետ: Այդ համընկնումը հանդիսանում է ներքին ռեզոնանսի պատճառ:

V. M. Belubekyan, M. V. Belubekyan

Resonanse and Localized Shear Vibration in the Layer with Rectangular Cross Section

The conditions of the possibility of simultaneous existence of the localized and volume shear vibrations are established. The localized frequency of the n-st mode is determined, which is equal to the minimal volume frequency. This equality is a reason of the internal resonance.

Литература

1. *Вильде М. В., Каплунов Ю. Д., Коссович Л. Ю.* Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах. М. Физматлит. 2010. 280 с.
2. *Новацкий В.* Теория упругости. М. Мир. 1975. 872 с.
3. *Белубекян М. В.* - В сб.: Актуальные проблемы неоднородной механики. Ереван. 1991. С. 66-71.
4. *Белубекян М. В.* - Изв. АН Армении, Механика. 1991. Т. 44. N 3. С. 7-10.
5. *Newton M. I., Mehale G., Martin F. Gizeli E., Meizak R. F.*- Generalized Love waves Europhysics letters. 2002. V. 58. N 6. P. 818-822.