ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 115 2015 № 1

МАТЕМАТИКА

УДК 517

Р. В. Даллакян, И. В. Оганисян

О коэффициентах Тейлора произведений Бляшке и Джрбашяна, а также связующих их функциях

(Представлено академиком В.С. Захаряном 12/XII 2014)

Ключевые слова: *оператор интегродифференцирования Римана – Лиувилля, произведение Бляшке, произведение Джрбашяна, ядра Джрбашяна, классы типа Дирихле.*

Введение. Пусть $\mathbb{D}=\{z;\ |z|<1\}$ – единичный круг комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Броманом [1] были рассмотрены классы S_α аналитических в $\mathbb{D}$ функций $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^n$, коэффициенты Тейлора – Маклорена которых удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^\alpha |a_n|^2<+\infty,\ 0<\alpha<1.$$

Пусть $0<p<+\infty, -1<\alpha<+\infty$. Класс D_α^p определяется как множество аналитических в $\mathbb{D}$ функций, для которых выполняется условие

$$\left\|D_\alpha^p\right\|^p=\int_0^r\int_0^{2\pi}(1-r)^\alpha\left|f'\left(re^{i\theta}\right)\right|^p rdrd\theta<+\infty$$

в случае, когда $\alpha+1<p$ классы D_α^p называются классами типа Дирихле.

Скажем, что множество точек $\{a_n\}\subset\mathbb{D}$ является множеством единственности для класса D_α^2, если из того, что $f(a_n)=0$ и $f\in D_\alpha^2$, вытекает, что $f\equiv 0$. В работе [2] Г. Шапиро и А. Шильдсом получен исчерпывающий ответ на вопрос: когда последовательность $\{a_n\}$ будет множеством единственности для класса $D_\alpha^2, 0\le\alpha<1$. Для более общих классов $D^2(\omega)$ аналогичный результат получен В. С. Захаряном [3].

В настояшей работе исследуется вопрос принадлежности некоторых аналитических в единичном круге функций классу типа Дирихле $D_\alpha^2, 0<\alpha<1$. Связь между классами S_α и $D_\alpha^2, 0<\alpha<1$ впервые (насколько это известно авторам) показана В. С. Захаряном [4], доказавшим, что $f(z)\in D_{\alpha}^{2},\ 0<\alpha<1$ тогда и только тогда, когда $f(z)\in S_{1-\alpha}$. Пользуясь этим замечанием В. С. Захаряна о принадлежности интересующих нас функций классу $D_{\alpha}^{2},\ 0<\alpha<1$, мы получили некоторые новые результаты о коэффициентах Тейлора – Маклорена этих функций.

Пусть последовательность комплексных чисел $\{z_n\}\subset \mathbb{D}$ такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-|z_n|\right)<+\infty . \tag{1}$$

Произведением Бляшке называется следующая функция:

$$B(z;\{z_n\})=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{z_n-z}{1-\overline{z}_n z}\cdot\frac{|z_n|}{z_n},\ z\in\mathbb{D}.$$

О свойствах произведения Бляшке см. например [5, 6].

М. М. Джрбашяном [7, глава IX; 8] введены в рассмотрение классы $N_{\alpha}\left(-1<\alpha<+\infty\right)$ мероморфных в единичном круге функций и установлено их параметрическое представление.

Класс $N_{\alpha}\left(-1<\alpha<+\infty\right)$ определяется посредством α-характеристики

$$T_{\alpha}(r,F)=m_{\alpha}(r,F)+N_{\alpha}(r,F)$$

как множество тех мероморфных в круге $|z|<1$ функций $F(z)$, для которых

$$\sup_{0<r<1}\left\{T_{\alpha}(r,F)\right\}<+\infty .$$

При этом функции $m_{\alpha}(r,F),\ N_{\alpha}(r,F)$ и $T_{\alpha}(r,F)$ представляют собой своеобразные аналоги известных неванлинновских функций $m(r,F),\ N(r,F)$ и $T(r,F)$, совпадая с ними при значении параметра $\alpha=0$, так что класс N_0 совпадает с классом N Неванлинны.

Вместе с тем важной особенностью классов N_{α} является то обстоятельство, что для любых значений $-1<\alpha_1<\alpha_2<+\infty$ имеет место строгое включение $N_{\alpha_1}\subset N_{\alpha_2}$ и, в частности,

$$N_{\alpha}\subset N_0=N,\ \left(-1<\alpha<0\right).$$

Оператор интегродифференцирования $D^{-\alpha}$ (при $-1<\alpha<+\infty$) в смысле Римана –Лиувилля с началом в нулевой точке определяется следующим образом:

$$D^{-\alpha}\left\{\varphi(r)\right\}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{r}(r-t)^{\alpha-1}\varphi(t)\,dt,\ \left(0<\alpha<+\infty\right),$$

$$D^{0}\left\{\varphi(r)\right\}=\varphi(r),$$

$$D^{-\alpha}\left\{\varphi(r)\right\}=\frac{d}{dr}D^{-(1+\alpha)}\left\{\varphi(r)\right\},\quad \left(-1<\alpha<0\right).$$

Для аналитических функций, принадлежащих классу N_{α}, функция $T_{\alpha}(r,F)$ определяется следующим образом:

$$T_\alpha(r,f)=\int_{-\pi}^{\pi} D_{(+)}^{-\alpha}\log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta,$$

где

$$D_{(+)}^{-\alpha}\{\varphi(r)\}==\max\left\{D^{-\alpha}\{\varphi(r)\};0\right\}.$$

Известно, что (см. [7, 8]) аналитическая функция класса N_α имеет вид

$$f(z)=e^{i\gamma+\lambda k_\alpha}z^\lambda B_\alpha(z;\{a_n\})\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s_\alpha\left(e^{-i\theta}z\right)d\psi(\theta)\right\},$$

где γ – произвольное вещественное число, λ – произвольное натуральное число, $K_\alpha=\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+\alpha)}$, $\psi(\theta)$ – вещественная функция с конечным полным изменением на $[-\pi;\pi]$,

$$B_\alpha(z;\{a_n\})=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{-W_\alpha(z;a_n)},$$

$$W_\alpha(z,\xi)=\int_{|\xi|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}dx-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)}\left\{\xi^{-k}\int_0^{|\xi|}(1-x)^\alpha x^{k-1}dx-\bar{\xi}^k\int_{|\xi|}^{1}(1-x)^\alpha x^{k-1}dx\right\}z^k,\ |z|<1,\ |\xi|<1,$$

$$S_\alpha(z)=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\left[\frac{2}{(1-z)^{1+\alpha}}-1\right],\ |z|<1.$$

Функция $S_\alpha(z)$ называется ядром Джрбашяна типа Шварца, $\operatorname{Re}S_\alpha(z)$ называется ядром Джрбашяна типа Пуассона. При $\alpha=0$ эти ядра совпадают с ядрами Шварца и Пуассона соответственно.

$B_\alpha(z;\{a_n\})$ называется произведением Джрбашяна. В специальном случае $\alpha=0$ произведение B_α совпадает с произведением Бляшке (см. [7, 8]).

$$B_0(z;\{a_n\})=B(z;\{a_n\})=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-z}{1-\bar{a}_n z}\frac{|a_n|}{a_n}.$$

В [9] М. М. Джрбашяном и В. С. Захаряном доказано следующее утверждение.

Теорема (о взаимосвязи произведений B_α и B). *При условии*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)^{1+\alpha}<+\infty,\ (-1<\alpha<0) \tag{2}$$

имеет место представление

$$B_\alpha(z;\{a_n\})=B(z;\{a_n\})\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} s_\alpha\left(e^{-i\theta}z\right)d\omega(\theta)\right\},$$

где $\omega(\theta)$ *– невозрастающая функция ограниченной вариации на* $[0,2\pi]$, *имеющая вид*

$$\omega(\theta)=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\theta} D^{-\alpha}\log\left|\frac{B_\alpha\left(r_n e^{i\theta};\{a_n\}\right)}{B\left(r_n e^{i\theta};\{a_n\}\right)}\right|d\theta \tag{3}$$

$$\left(0<r_1<r_2<\ldots<r_n<\ldots,\ r_n\uparrow 1\right).$$

Приведем также определение классов $T_\beta\,(0<\beta<1)$, входящих в класс $N=N_0$. Скажем, что $w(z)\in T_\beta$, если

$$\int_0^1\frac{A(r,w)}{(1-r)^\beta}dr<+\infty,$$

где

$$A(r,w)=\iint_{|z|<r}\frac{|w'(z)|^2}{\left(1+|w'(z)|^2\right)^r}dxdy.$$

Известно, что (см. [10]) если $w(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^n\in T_\beta\,(0<\beta<1)$ и ограничена, то

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 n^\beta<+\infty.$$

Основные результаты. Теорема 1. *Пусть* $-1<\alpha<0$ *и пусть последовательность комплексных чисел* $\{z_n\}\subset\mathbb{D}$ *такая, что выполняется условие (2). Тогда*

$$B_\alpha\left(z;\{z_n\}\right)\in D^2_{1+\alpha},\ B\left(z;\{z_n\}\right)\in D^2_{1+\alpha}.$$

Замечание. Для произведения Бляшке утверждение теоремы известно, однако, по мнению авторов, доказательство этой теоремы представляет определенный интерес, так как оно основано на ранних работах известных математиков.

Теорема 2. *Пусть* $-1<\alpha<0$ *и пусть последовательность комплексных чисел* $\{z_n\}\subset\mathbb{D}$ *удовлетворяет условию (2). Тогда функция*

$$g_\alpha(z)=\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_\alpha\left(e^{-i\theta}z\right)d\omega(\theta)\right\},\ |z|<1,$$

где $\omega(\theta)$ *– невозрастающая функция конечной вариации на* $[0,2\pi]$, *имеющая вид (3), принадлежит классу* $D^2_{1+\alpha}$.

Замечание. Если $\omega(\theta)$ – невозрастающая функция конечной вариации, не имеющая вид (3), то утверждение теоремы может и не выполняться.

Теорема 3. *Пусть* $-1<\alpha<0$ *и пусть последовательность комплексных чисел* $\{z_n\}\subset\mathbb{D}$ *такая, что выполняется условие (2). Тогда для коэффициентов Тейлора – Маклорена функции* $g_\alpha(z)$ *имеет место следующее условие:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\hat{g}_\alpha(n)\right|^2 n^{-\alpha}<+\infty..$$

Теорема 4. *Пусть* $-1<\alpha<0$ *и пусть последовательность комплексных чисел* $\{z_n\}\subset\mathbb{D}$ *удовлетворяет условию (2). Тогда*

$$1.\ \hat{B}_\alpha(n)=\sum_{k=0}^{n}\hat{g}_\alpha(k)\cdot\hat{B}(n-k)$$

$$2.\ \hat{B}(n)=\sum_{k=0}^{n}\hat{h}_\alpha(k)\cdot\hat{B}_\alpha(n-k),$$

где $h_\alpha(z)=\left[g_\alpha(z)\right]^{-1}$.

Теорема 5. *Пусть* $-1<\alpha<0$ *и пусть последовательность комплексных чисел* $\{z_n\}\subset\mathbb{D}$ *такая, что выполняется условие (2). Тогда между коэффициентами Тейлора – Маклорена функций* $g_\alpha(z)$ *и* $h_\alpha(z)=\left[g_\alpha(z)\right]^{-1}$ *имеет место следующая взаимосвязь:*

$$\hat{g}_\alpha(0)\cdot\hat{h}_\alpha(0)=1,,$$

$$\sum_{k=0}^{n}\hat{g}_\alpha(k)\cdot\hat{h}_\alpha(n-k)=0,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots.$$

Теорема 6. *Пусть* $0<\gamma<0$. *Тогда для любого* δ , $0<\delta<1-\gamma$ *существуют произведения Бляшке и Джрбашяна, множества нулей которых совпадают, такие, что коэффициенты Тейлора – Маклорена этих произведений удовлетворяют следующим условиям:*

$$1.\ \sum_{n=0}^{\infty}n^{\gamma}\left|\hat{B}(n)\right|^2<+\infty,$$

$$2.\ \sum_{n=0}^{\infty}n^{\gamma}\left|\hat{B}_\alpha(n)\right|^2<+\infty,$$

$$3.\ \sum_{n=0}^{\infty}n^{\gamma+\delta}\left|\hat{B}(n)\right|^2=+\infty,$$

$$4.\ \sum_{n=0}^{\infty}n^{\gamma+\delta}\left|\hat{B}_\alpha(n)\right|^2=+\infty.$$

Государственный инженерный университет Армении

Р. В. Даллакян, И. В. Оганисян

О коэффициентах Тейлора произведений Бляшке и Джрбашяна, а также связующих их функциях

С использованием теоремы Г. Шапиро и А. Шильдса, а также замечания В. Захаряна доказано существование произведений Бляшке и Джрбашяна с одинаковым множеством нулей, коэффициенты Тейлора – Маклорена которых удовлетворяют некоторым новым ограничениям. Получена оценка для коэффициентов Тейлора этих функций.

Ռ. Վ. Դալլաքյան, Ի. Վ. Հովհաննիսյան

Բլյաշկեի և Ջրբաշյանի արտադրյալների Թեյլորի գործակիցների և այդ արտադրյալները կապող ֆունկցիաների մասին

Օգտագործելով Գ. Շապիրո և Ա. Շիլդցի մի թեորեմը ու Վ. Զաքարյանի մի դիտողությունը ապացուցվել է միևնույն զրոներով Բլյաշկեի և Ջրբաշյանի այնպիսի արտադրյալների գոյությունը, որոնց Թեյլորի գործակիցները բավարարում են որոշ նոր տիպի սահմանափակումների: Ստացվել են նաև գնահատականներ այդ ֆունկցիաների Թեյլորի գործակիցների համար:

R. V. Dallakyan, I. V. Hovhannisyan

About the Taylor Coefficients of Blaschke and M. Djrbashyan Products and Functions Connecting these Products

In this paper, using a theorem of Shapiro and Shields, as well as one remark of V. Zakaryan, is proved the existence of Blaschke and M. Djrbashyan products with the same set of zeros, the coefficients of the Taylor which satisfy some new restrictions. Also is found new estimation for the Taylor coefficients of these products.

Литература

1. *Broman A.* - On two classes of trigonometrical series. Thesis, University of Uppsala. 1947.
2. *Shapiro H., Shilds A.* - Math. Z. 1962. V. 80. P. 217-229.
3. *Захарян В. С.* - ДАН АрмССР.1964. Т. 38. N 4. С. 199-206.
4. *Захарян В. С.* – Изв. АН АрмССР. 1967. Математика. Т. 2. N 2. С. 117-122.
5. *Duren P. L.* - Theory of H^p spaces. Pure and Applied Mathematics. V. 38. Academic Press, New York – London. 1970.
6. *Привалов И. И.* - Граничные свойства аналитических функций. М.–Л. Гос. изд. технико-теоретической лит. 1950.
7. *Джрбашян М. М.* - Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М. Наука. 1966. С. 671:

8. *Джрбашян М. М., Захарян В. С.* - Классы и граничные свойства функций, мероморфных в круге. Изд. фирма физ.-мат. лит. ВО "Наука". 1993. С. 223
9. *Джрбашян М. М., Захарян В. С.* - Мат. заметки. 1968. Т. 4. N1. С. 3-10.
10. *Джрбашян М. М., Захарян В. С.* - ДАН СССР. Математика. 1967. Т. 173. N 6. С. 1247-1250.
11. *Carleson L.* On a class of meromorphic functions and its associeted exeptional sets. Thesis. University of Uppsala. 1950.