ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 115 2015 № 1

МАТЕМАТИКА

УДК 517.986.23

К. В. Арутюнян[1], А. Г. Камалян[2], И. М. Спитковский[3]

О возможных наборах частных индексов треугольных матриц-функций

(Представлено академиком А.Б. Нерсесяном 8/ VIII 2014)

Ключевые слова: *треугольные матрицы-функции, факторизация, частные индексы.*

1. Введение. Пусть Γ – карлесоновский замкнутый контур комплексной плоскости $\mathbb{C}$, ограничивающий содержащую нулевую точку конечносвязную область. Сингулярный интегральный оператор S, определенный по формуле

$$(S\varphi)(t)=\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau,\ t\in\Gamma,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения, является ограниченным в пространствах $L_p(\Gamma), 1<p<\infty$, (см. [1]). Рассмотрим классы функций $L_p^+=imP_+$, $L_p^-=imP_-+\mathbb{C}$, где проекторы $P_\pm$ определяются равенствами $P_\pm=\frac{1}{2}(I\pm S)$. Ниже для данного множества X через X^m и $X^{n\times n}$ будем обозначать соответственно множество n-мерных векторов и множество всех матриц размера $n\times n$ с компонентами из X.

Пусть $G,G^{-1}\in L_\infty^{n\times n}(\Gamma)$. Под факторизацией относительно контура Γ в пространстве $L_p(\Gamma)(1<p<\infty)$ матрицы-функции G (см. [2]) мы понимаем представление

$$G=G_-\Lambda G_+^{-1},$$

где $G_\pm\in\left(L_p^\pm\right)^{n\times n}$, $G_\pm^{-1}\in\left(L_q^\pm\right)^{n\times n}\left(q=p/(p-1)\right)$, оператор GSG_-^{-1} ограничен в пространстве $\left(L_p(\Gamma)\right)^n$ (действие S на вектор-функцию понимается покомпонентно), и $\Lambda(t)=diag\left(t^{\kappa_1},\dots,t^{\kappa_n}\right),\kappa_1,\dots,\kappa_n\in\mathbb{Z}$.

Целые числа $\kappa_1,\dots,\kappa_n$ называются частными индексами матрицы-функции G; при $n=1$ (единственный) частный индекс называется просто индексом (скалярной) функции G. Вектор $\kappa=(\kappa_1,\dots,\kappa_n)\in\mathbb{Z}^n$ будем называть набором частных индексов матрицы-функции G. Набор частных индексов определяется однозначно с точностью до произвольной перестановки его компонент.

Пусть $\chi=(\chi_1,\dots,\chi_n)\in\mathbb{Z}^n$. Обозначим через $T(\chi)$ множество нижне-треугольных матриц-функций из класса $L_\infty^{n\times n}(\Gamma)$, диагональные элементы которых факторизуемы и индекс каждого j-го диагонального элемента равен χ_j. Как известно (см. [3], а также [2]), матрицы-функции из класса $T(\chi)$ допускают факторизацию. Множество $A(\chi)\subset\mathbb{Z}^n$ определим следующим образом: вектор $\kappa\in\mathbb{Z}^n$ принадлежит множеству $A(\chi)$ тогда и только тогда, когда он является набором частных индексов некоторой матрицы-функции G из $T(\chi)$.

Для случая $n=2$ описание $A(\chi)$ имеется в [4]. Задача описания $A(\chi)$ для $n>2$ была явно сформулирована в [2]. В случае $n=3$ отличные друг от друга описания множества $A(\chi)$ даны в работах [5] и [6]. Исследованию этой задачи при произвольном n посвящены работы [5] и [7]. Множество $A(\chi)$ инвариантно в том смысле, что с каждым вектором κ из $A(\chi)$ оно содержит и все векторы, полученные из κ путем всевозможных перестановок его компонент. Подмножество B множества $A(\chi)$ назовем базовым, если множество векторов, полученных путем всевозможных перестановок компонент векторов из B, совпадает с $A(\chi)$. Задача описания множества $A(\chi)$ по существу сводится к нахождению базового подмножества простой структуры. В данной работе мы предлагаем конструкцию базового подмножества, основанную на решении совокупности явно выписываемых систем линейных уравнений и неравенств.

2. Основной результат. Пусть $\kappa=(\kappa_1,\dots,\kappa_n)\in\mathbb{Z}^n$ и $\Delta=\{1,\dots,n\}$. Рассмотрим множество

$$D(\chi)=\{(i,j)\in\Delta\times\Delta; i>j, \chi_i-\chi_j\geq 2\}$$

и проекции $\pi_1: D(\chi)\to\Delta$, $\pi_2: D(\chi)\to\Delta$, определенные равенствами $\pi_1(i,j)=i$, $\pi_2(i,j)=j$. Скажем, что подмножество $D'\subset D(\chi)$ является (T,χ)-допустимым, если множества $\pi_1(D')$ и $\pi_2(D')$ не пересекаются. В частности, (T,χ)-допустимым является пустое множество. Множество (T,χ)-допустимых подмножеств обозначим через J. Под слоем, соответствующим (T,χ)-допустимому подмножеству D', будем понимать множество $A_T(D',\chi)\subset\mathbb{Z}^n$, определяемое следующим образом. Вектор

$\kappa=(\kappa_1,\dots,\kappa_n)\in\mathbb{Z}^n$, принадлежит $A_T(D',\chi)$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

A1. $\kappa_i<\chi_i$ для $i\in\pi_1(D')$, $\kappa_i>\chi_i$ для $i\in\pi_2(D')$,

$\kappa_i=\chi_i$ для $i\in\Delta\setminus(\pi_1(D')\cup\pi_2(D'))$;

A2. $\kappa_i\ge\chi_i$ для $(i,j)\in D'$;

A3. $\kappa_i<\chi_j$ для $(i,j)\in\big(D(\chi)\cap(\pi_1(D')\times\pi_1(D'))\big)\setminus D'$;

A4. для любого подмножества $\omega\in\pi_2(D')$ справедливо неравенство

$$\sum_{j\in\omega}(\kappa_j-\chi_j)\le\sum_{i\in\pi_1\left(D'\cap\pi_2^{-1}(\omega)\right)}(\chi_i-\kappa_i).$$

A5. $\sum_{i=1}^{n}\kappa_i=\sum_{i=1}^{n}\chi_i$

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Множество* $\bigcup_{D'\in J}A_T(D',\chi)$ *является базовым подмножеством* $A(\chi)$.

3. Схема доказательства. Доказательство теоремы 1 основано на последовательном применении нижеприведенных теорем 2-7. На наш взгляд, эти теоремы представляют самостоятельный интерес. За исключением теоремы 2 все теоремы новые. Теорема 2 является переформулировкой результатов, полученных в [5] (см. также [7]).

Пусть $1\le j<i\le n$, $j,i,l\in\mathbb{N}$. Отображение $\varphi_{j,i,l}:\mathbb{Z}^n\to\mathbb{Z}^n$ назовем (j,i,l)-сплетающим сжатием, если для $\kappa=(\kappa_1,\dots,\kappa_n)\in\mathbb{Z}^n$ в случае $\kappa_i-\kappa_j\le l$ имеет место равенство $\varphi_{j,i,l}(\kappa)=\kappa$, а в случае $1\le l\le\kappa_i-\kappa_j-1$ i-я компонента вектора $\varphi_{j,i,l}(\kappa)$ равна κ_j+l, j-я компонента $\varphi_{j,i,l}(\kappa)$ равна κ_j-l, а при r, отличном от i и j, r-я компонента вектора $\varphi_{j,i,l}(\kappa)$ совпадает с κ_r. Отображение $\varphi:\mathbb{Z}^n\to\mathbb{Z}^n$ назовем j-сплетающим сжатием $(1\le j\le n$, $j\in\mathbb{N})$, если оно либо совпадает с тождественным отображением, либо представляется в виде композиции (j,i_s,l_s)-сплетающих сжатий $\varphi=\varphi_{j,i_r,l_r}\cdot\varphi_{j,i_{r-1},l_{r-1}}\dots\varphi_{j,i_1,l_1}$, где $l_1\ge l_2\ge\dots\ge l_r$. Отображение $\varphi:\mathbb{Z}^n\to\mathbb{Z}^n$ назовем сплетающим сжатием, если оно представляется в виде композиции $\varphi=\varphi_1\varphi_2\dots\varphi_{n-1}$, где отображения φ_j являются j-сплетающими сжатиями $(j=1,\dots n-1)$. Множество образов $\varphi(\chi)$, получаемых при действии всех возможных сплетающих сжатий на вектор χ, обозначим через $B_1(\chi)$.

Теорема 2. *Множество* $B_1(\chi)$ *является базовым подмножеством* $A(\chi)$.

Пусть $1\le j<i\le n$, $j,i\in\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Отображение $\psi_{j,i,m}:\mathbb{Z}^n\to\mathbb{Z}^n$ назовем (j,i,m)-прямым сжатием, если для всех r, отличных от i и j, r-

я компонента вектора $\varphi_{j,i,m}(\kappa)$ совпадает с κ_r , а i-я и j-я компоненты вектора $\varphi_{j,i,m}(\kappa)$ равны соответственно $\kappa_i - s$ и $\kappa_j + s$. Здесь $s = m$, когда $1 \le m \le \frac{1}{2}(\kappa_i - \kappa_j)$, и $s = 0$, если это условие не выполняется (т.е. когда либо $m = 0$, либо $\kappa_i - \kappa_j \le 1$, либо $m > \frac{1}{2}(\kappa_i - \kappa_j)$). Композицию $\psi_{j,n,m_n j}$ $\psi_{j,n-1,m_{n-1}j} \dots \psi_{j,j+1,m_{j+1}j}$ (j, i, m_{ij})-прямых сжатий будем называть прямым j-сжатием.

Пусть $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_n) \in \mathbb{Z}^n$. Прямое j-сжатие назовем χ-обусловленным, если из условия $m_{ij} > 0$ следует, что

$$\chi_i - m_{ij} \ge \chi_j + \sum_{k=j+1}^{n} m_{kj} .$$

Композицию $\psi = \psi_1 \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$, где ψ_j $(j = 1, \dots, n-1)$ являются прямыми j-сжатиями, будем называть прямым сжатием. Если ψ_{n-1} является χ-обусловленным $(n-1)$-прямым сжатием, а ψ_j $(1 \le j \le n-2)$ является $\psi_{j+1} \dots \psi_{n-1}(\chi)$ обусловленным прямым j-сжатием, то ψ будем называть χ-обусловленным прямым сжатием.

Множество образов $\psi(\chi)$, полученных при действии всех возможных χ-обусловленных прямых сжатий на вектор χ, обозначим через $B_2(\chi)$.

Удовлетворяющий равенству А5 вектор $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n) \in \mathbb{Z}^n$ назовем (χ, j)-каноническим, если либо $\kappa = \chi$, либо существуют натуральные числа $i_1, \dots, i_r$ $(j < i_s \le n; s = 1, \dots, r)$ такие, что справедливы следующие утверждения:

$$\chi_{i_1} \ge \dots \ge \chi_{i_k} > \chi_j ,\ \kappa_i \ge \dots \ge \kappa_{i_k} \ge \kappa_j ,\ \chi_{i_s} > \kappa_{i_s} \quad \text{для} \quad s = 1, \dots, r ,$$

$$\chi_i = \kappa_i \quad \text{для} \quad i \in \Delta \setminus \{ j, i_1, \dots, i_r \} .$$

(χ, j)-канонический вектор одновременно является образом некоторого j-сплетающего сжатия и образом некоторого χ-обусловленного прямого j-сжатия. Кроме того, для произвольного χ-сплетающего φ сжатия вектор $\varphi(\chi)$ может быть получен перестановкой компонент некоторого (χ, j)-канонического вектора. Аналогичным свойством обладает вектор $\psi(\chi)$, где ψ произвольное χ-обусловленное прямое j-сжатие. С помощью этих фактов доказывается следующее утверждение.

Теорема 3. *Множество* $B_2(\chi)$ *является базовым подмножеством* $A(\chi)$.

Рассмотрим матрицу вида

$$\Psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ m_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \dots & m_{n\,n-1} & 0 \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где m_{ij} $(1 \le j < i \le n; i, j \in \mathbb{N})$ – целые неотрицательные числа. Матрицу (1) будем называть χ-обусловленной, если из условия $m_{ij} > 0$ $(1 \le j < i \le n)$ следует, что

$$\chi_j + \sum_{r=j+1}^{n} m_{rj} \le \chi_i - \sum_{r=j}^{i-1} m_{ir} + \sum_{r=i+1}^{n} m_{ri} \ .$$

Числа Ψ_i^+, Ψ_i^- $(i = 1, \dots, n)$ определим следующими равенствами:

$$\Psi_i^+ = \sum_{r=i+1}^{n} m_{ki} \ , \ \Psi_i^- = \sum_{r=1}^{i-1} m_{ir} \ .$$

Вектор $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n) \in \mathbb{Z}^n$, компоненты которого определяются равенствами

$$\kappa_p = \chi_p + \Psi_p^+ - \Psi_p^- \ (p = 1, \dots, n),$$

будем называть Ψ-образом вектора χ и обозначать $\kappa = \Psi[\chi]$.

Теорема 4. *Множество* $B_2(\chi)$ *совпадает с множеством векторов вида* $\Psi[\chi]$, *где* Ψ *– произвольная* χ*-обусловленная матрица.*

Матрицу Ψ вида (1) будем называть χ-строго обусловленной, если $\Psi_p^+ \Psi_p^- = 0$ для всех $i \in \Delta$ и если из условия $m_{ij} > 0$ следует, что $\Psi_j^+ = \Psi_i^- = 0$ и $\chi_j + \Psi_j^+ \le \chi_i - \Psi_i^-$. Обозначим через $B_3(\chi)$ множество Ψ-образов вектора χ, где Ψ пробегает множество всех χ-строго обусловленных матриц. Очевидно, что $B_3(\chi) \subset B_2(\chi)$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Множество* $B_3(\chi)$ *является базовым подмножеством* $A(\chi)$.

Для пары векторов $\kappa = (\kappa_1 \dots, \kappa_n), \chi = (\chi_1 \dots, \chi_n) \in \mathbb{Z}^n$ определим множества $D_{\kappa,\chi} = \{(i,j) \in \Delta \times \Delta; i > j, \chi_i > \kappa_i \ge \kappa_j > \chi_j\}$, и $\Delta_+ = \{i \in \Delta; \kappa_i > \chi_i\}$.

Будем говорить, что вектор κ T-мажорируется вектором χ, и писать $\kappa \underset{T}{\prec} \chi$, если имеют место равенства A5, $\pi_2(D_{\kappa,\chi}) = \Delta_+$ и для любого подмножества $\omega_+ \subset \Delta_+$ справедливо неравенство

$$\sum_{j \in \omega_+} (\kappa_j - \chi_j) \le \sum_{i \in \pi_1\left(D_{\kappa,\chi} \cap \pi_2^{-1}(\omega_+)\right)} (\chi_i - \kappa_i).$$

Теорема 6. *Вектор* $\kappa \in \mathbb{Z}^n$ *принадлежит множеству* $B_3(\chi)$ *тогда и только тогда, когда* $\kappa \underset{T}{\prec} \chi$.

Теорема 7. *Вектор* κ T*-мажорируется вектором* χ *тогда и только тогда, когда* $\kappa \in \bigcup_{D' \in J} A_T(D',\chi)$. *Кроме того, если* $\kappa \in A_T(D',\chi)$ *при некотором* $D' \in J$ *, то* $D' = D_{\kappa,\chi}$.

4. Пример. Пусть $\chi = (0,5,2,4)$.

В этом случае $D(\chi) = \{(2;1),(3;1),(4;1),(4;3)\}$, а (T,χ)-допустимыми множествами являются:

$D_1' = \varnothing$, $D_2' = \{(2;1)\}$, $D_3' = \{(3;1)\}$,

$D_4' = \{(4;1)\}$, $D_5' = \{(4;3)\}$, $D_6' = \{(2;1),(3;1)\}$,

$D_7' = \{(2;1),(4;1)\}$, $D_8' = \{(2;1),(4;3)\}$, $D_9' = \{(3;1),(4;1)\}$,

$D_{10}' = \{(4;1),(4;3)\}$, $D_{11}' = \{(2;1),(3;1),(4;1)\}$, $D_{12}' = \{(2;1),(4;1),(4;3)\}$.

Множество $\left(D(\chi) \cap \pi_1(D_r') \times \pi_2(D_r')\right) \setminus D_r'$ во всех случаях кроме $r = 8$ пусто. По этой причине условие А3 появляется лишь при $r = 8$.

Условие А5 всегда имеет вид $\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4 = 11$. Поскольку $\pi_2(D_r')$ $(r = 1,\ldots,12)$ является подмножеством $\{1,3\}$, то возможными непустыми подмножествами $\pi_2(D_r')$ являются $\omega_1 = \{1\}$, $\omega_2 = \{3\}$ и $\omega_3 = \{1;3\}$. Соответственно,

$$\pi_2^{-1}(\omega_1) = \{(2;1),(3;1),(4;1)\} ,$$

$$\pi_2^{-1}(\omega_1) = \{(2;1),(3;1),(4;1)\} ,\ \pi_2^{-1}(\omega_2) = \{(4;3)\} ,$$

$$\pi_2^{-1}(\omega_3) = \{(2;1),(3;1),(4;1),(4;3)\} .$$

Очевидно, что $A_T(D_1',\chi) = \{\chi\}$. Дадим описание множества $A_T(D_2',\chi)$. Условие А4 имеет вид $\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4 \le 11$ и является очевидным следствием А5. Условия А1 и А2 описываются системой: $\kappa_1 > 0$, $\kappa_2 < 5$, $\kappa_3 = 2, \kappa_4 = 4, \kappa_1 \le \kappa_2$. Учитывая А5, получим, что $A_T(D_2',\chi) = \{(1,4,2,4),$ $(2,3,2,4)\}$. Аналогичным образом нетрудно убедиться в том, что $A_T(D_3',\chi) = \{(1,5,1,4)\}$, $A_T(D_4',\chi) = \{(1,5,2,3),(2,5,2,2)\}$, $A_T(D_5',\chi) = \{(0,5,3,3)\}$. Для того, чтобы $\kappa \in A_T(D_7',\chi)$, необходимы и достаточны следующие условия:

А1. $\kappa_1 > 0$, $\kappa_2 < 5, \kappa_3 = 2, \kappa_4 < 4$;

А2. $\kappa_1 \le \kappa_2, \kappa_1 \le \kappa_4$;

А4. $\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_4 \le 9$;

А5. $\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4 = 11$.

Отсюда следует, что $A_T(D_7',\chi) = \{(2,4,2,3),(3,3,2,3)\}$. Для того, чтобы $\kappa \in A_T(D_8',\chi)$ необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

А1. $\kappa_1 > 0, \kappa_2 < 5, \kappa_3 > 2, \kappa_4 < 4$;

А2. $\kappa_1 \le \kappa_2$, $\kappa_3 \le \kappa_4$;

A3. $\kappa_4 < x_1$;

A4. $\kappa_1 + \kappa_2 \le 5,\ \kappa_3 + x_4 \le 6,\ \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4 \le 11$;

A5. $\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4 = 11$.

Очевидно, что $\kappa_3 = \kappa_4 = 3$ и неравенство $3 = \kappa_4 < \kappa_1 < \kappa_2 < 5$ в целых числах не имеет решений. Следовательно, $A_T(D_8', \chi) = \varnothing$. Аналогичным образом нетрудно убедиться, что

$A_T(D_6', \chi) = A_T(D_9', \chi) = A_T(D_{10}', \chi) = A_T(D_{10}', \chi) = \varnothing$,

$A_T(D_{12}', \chi) = \{(1,4,3,3),(2,3,3,3)\}$.

Выбирая по одному из векторов, получаемых друг из друга перестановкой компонент, мы с помощью теоремы 1 находим, что множество

$$\bigcup_{k=1}^{12} A_T(D_k', \chi) = \{(0,5,2,4),(1,4,2,4),(1,5,1,4),(1,5,2,3),(2,5,2,3)\},(0,5,3,3),(1,4,3,3)$$

является базовым подмножеством $A(\chi)$.

[1]Российско-Армянский (Славянский) университет
e-mail: harkamo@rambler.ru
[2]Ереванский государственный университет,
Институт математики НАН РА
e-mail: kamalyan_armen@yahoo.com
[3]The College of William and Mary, Williamsburg, Virginia, USA, and New York University Abu Dhabi (NYUAD),UAE
e-mail: ilya@math.wm.edu, ims2@nyu.edu, imspitkovsky@gmail.com

К. В. Арутюнян, А. Г. Камалян, И. М. Спитковский

О возможных наборах частных индексов треугольных матриц-функций

Предлагается конструктивное описание множества возможных наборов частных индексов треугольных матриц-функций с фиксированными индексами диагональных элементов.

Կ. Վ. Հարությունյան, Ա. Հ. Քամալյան, Ի. Մ. Սպիտկովսկի

Եռանկյունի մատրից-ֆունկցիաների մասնավոր ինդեքսների հնարավոր հավաքածուների մասին

Առաջարկվում է անկյունագծային տարրերի ինդեքսները ֆիքսված եռանկյունի մատրից-ֆունկցիաների մասնավոր ինդեքսների հնարավոր հավաքածուների կոնստրուկտիվ նկարագրում:

K. V. Harutyunyan, A. G. Kamalyan, I. M. Spitkovsky

On Possible Tuples of Partial Indices of Triangular Matrix-Functions

A constructive description of the set of possible tuples of partial indices of triangular matrix-functions with fixed indices of their diagonal entries is given.

Литература

1. *Böttcher A., Karlovich Yu. I.* Carleson curves, Muchenhoupt weights, and Toeplitz operators. Birkhäser Verlag, Basel and Boston, 1997.
2. *Litvinchuk G. S., Spitkovsky I. M.* Factorization of matrix-functions. Birkhäser Verlag, Basel and Boston, 1987.
3. *Спитковский И. М.* - ДАН СССР. 1980. Т. 254. N 4. С. 816-820.
4. *Чеботарев Г. Н.*– Успехи мат. маук. 1956. Т. 2. N3. С. 192-202.
5. *Спитковский И. М., Тишин П. М.* – Укр. мат. журн. 1987. Т. 39. N 6. С. 751-756.
6. *Арутюнян К. В., Камалян А. Г.* – Математика в высшей школе. 2006. Т. 2. N 3. С. 29-33.
7. *Арутюнян К. В., Камалян А. Г.* – Изв. НАН Армении. Математика. 2007. Т. 42. N 2. С. 10-16.