ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 114 2014 № 4

МЕХАНИКА

УДК 539.3

Г. С. Айрапетян, Н. С. Асланян,
член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян

Изгиб микрополярной упругой прямоугольной пластинки

(Представлено 25/VII 2014)

Ключевые слова: *прямоугольная пластинка; микрополярная*, *упругая*, *изгибная деформация.*

Введение. В работах [1, 2] на основе асимптотически обоснованного метода гипотез построена общая прикладная теория изгиба микрополярных упругих тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений. В работе [3] построены теории микрополярных пластин со стесненным вращением и “с малой сдвиговой жесткостью”.

В данной работе на основе указанных общих прикладных теорий изучается задача изгибной деформации микрополярной упругой прямоугольной пластинки под нормальной равномерно распределенной нагрузкой, когда стороны прямоугольника шарнирно оперты. Для изучаемых задач построены точные решения, которые доведены до окончательных численных результатов. На основе численного анализа устанавливаются эффективные свойства микрополярного материала пластинки (с точки зрения прочности и жесткости пластинки) по сравнению с классическими материалами.

1. Изгиб прямоугольной микрополярной упругой пластинки по теории с независимыми полями перемещений и вращений. Рассмотрим прямоугольную изотропную пластинку, которая оперта по всем четырем сторонам и изгибается нормальной нагрузкой $q(x,y)$, распределенной по произвольному закону. Направим оси x и y вдоль сторон и обозначим через a и b длины сторон пластинки. Основные уравнения изгиба микрополярной пластинки с независимыми полями перемещений и вращений будут [1, 2]:

$$(\mu+\alpha)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)+(\mu-\alpha)\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}+\frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}\right)+2\alpha\left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1}-\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2}\right)=-\frac{q_3}{h},$$

$$(\mu-\alpha)\frac{\partial w}{\partial x_1}+(\mu+\alpha)\Psi_1-2\alpha\Omega_2-\frac{\mathrm{E}h^2}{3\left(1-\nu^2\right)}\left(\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial x_1\partial x_2}\right)-$$

$$-\frac{h^2}{3}\left((\mu+\alpha)\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial x_2^2}+(\mu-\alpha)\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial x_1\partial x_2}+2\alpha\frac{\partial\iota}{\partial x_2}\right)=0,$$

$$(\mu-\alpha)\frac{\partial w}{\partial x_2}+(\mu+\alpha)\Psi_2+2\alpha\Omega_1-\frac{\mathrm{E}h^2}{3(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial x_2^2}+\nu\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial x_1\partial x_2}\right)-$$

$$-\frac{h^2}{3}\left((\mu+\alpha)\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial x_1^2}+(\mu-\alpha)\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial x_1\partial x_2}-2\alpha\frac{\partial\iota}{\partial x_1}\right)=0, \qquad (1.1)$$

$$(\beta+2\gamma)\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial x_1^2}+(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial x_2^2}+(\beta+\gamma-\varepsilon)\frac{\partial^2\Omega_2}{\partial x_1\partial x_2}+2\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}-2\Omega_1-\Psi_2\right)+\beta\frac{\partial\iota}{\partial x_1}=0,$$

$$(\beta+2\gamma)\frac{\partial^2\Omega_2}{\partial x_2^2}+(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^2\Omega_2}{\partial x_1^2}+(\beta+\gamma-\varepsilon)\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial x_1\partial x_2}-2\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}+2\Omega_2-\Psi_1\right)+\beta\frac{\partial\iota}{\partial x_2}=0,$$

$$\left(\beta+2\gamma+4\alpha\frac{h^2}{3}\right)\iota+\beta\left(\frac{\partial\Omega_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\Omega_2}{\partial x_2}\right)-\frac{h^2}{3}\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\left(\frac{\partial^2\iota}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\iota}{\partial x_2^2}\right)-\frac{2}{3}\alpha h^2\left(\frac{\partial\Psi_2}{\partial x_1}-\frac{\partial\Psi_1}{\partial x_2}\right)=0,$$

которые необходимо интегрировать, учитывая граничные условия шарнирного опирания [1, 2]:

при $x_1=0, x_1=a$, $w=0$, $\frac{\partial\Psi_1}{\partial x_1}=0$, $\frac{\partial\Omega_2}{\partial x_1}=0$, $\Omega_1=0$, $\Psi_2=0$, $\frac{\partial\iota}{\partial x_1}=0$

при $x_2=0, x_2=b$, $w=0$, $\frac{\partial\Psi_2}{\partial x_2}=0$, $\frac{\partial\Omega_1}{\partial x_2}=0$, $\Omega_2=0$, $\Psi_1=0$, $\frac{\partial\iota}{\partial x_2}=0$ (1.2)

Здесь w – прогиб пластинки; Ψ_1,Ψ_2 – повороты нормали к срединной плоскости пластинки вокруг осей x_1 и x_2 соответственно; Ω_1,Ω_2 – свободные повороты указанной нормали вокруг осей x_1 и x_2 соответственно; ι – интенсивность поворотов вокруг оси x_3 точек трехмерной пластинки; $E,\nu,\mu,\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon$, где $\mu=\frac{\mathrm{E}}{2(1+\nu)}$ – упругие константы микрополярного материала пластинки; *2h* – толщина пластинки. В модели (1.1), (1.2) микрополярных пластин с независимыми полями перемещений и вращений учтены все поперечные сдвиговые деформации. Если в этой модели пренебрегать поперечными сдвиговыми деформациями, получим модель микрополярных пластин с независимыми полями перемещений и вращений, когда в основе имеем классическую кинематическую гипотезу Кирхгофа. Все граничные условия (1.2) будут удовлетворены, если представить решение системы уравнений (1.1) в виде ряда

$$w=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\sin\frac{m\pi x_1}{a}\sin\frac{n\pi x_2}{b}, \qquad \iota=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}F_{mn}\cos\frac{m\pi x_1}{a}\cos\frac{n\pi y x_2}{b},$$

$$\Omega_1=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}\sin\frac{m\pi x_1}{a}\cos\frac{n\pi x_2}{b}, \qquad \Omega_2=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}C_{mn}\cos\frac{m\pi x_1}{a}\sin\frac{n\pi x_2}{b}, \quad (1.3)$$

$$\Psi_1=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}D_{mn}\cos\frac{m\pi x_1}{a}\sin\frac{n\pi x_2}{b},\qquad \Psi_2=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}K_{mn}\sin\frac{m\pi x_1}{a}\cos\frac{n\pi x_2}{b}.$$

Разложим функцию $q(x_1,x_2)$ также в двойной ряд Фурье:

$$q(x_1,x_2)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}q_{mn}\sin\frac{m\pi x_1}{a}\sin\frac{n\pi x_2}{b},$$

$$q_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b q(x_1,x_2)\sin\frac{m\pi x_1}{a}\sin\frac{n\pi x_2}{b}dx_1dx_2. \tag{1.4}$$

Подставляя выражения (1.3) и (1.4) в системе уравнений (1.1) и сравнивая коэффициенты при одинаковых синусах в левой и правой частях, получим алгебраическую линейную систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов A_{mn}, $B_{mn}, C_{mn}, D_{mn}, K_{mn}, F_{mn}$ в разложениях (1.3):

$$\left(1+\frac{\alpha}{\mu}\right)\left(m^2+n^2\right)\pi A_{mn}+\left(1-\frac{\alpha}{\mu}\right)\left(mD_{mn}+nK_{mn}\right)+2\frac{\alpha}{\mu}\left(mC_{mn}-nB_{mn}\right)=\frac{8q_{mn}}{\delta\mu\pi^3},$$

$$\left(1-\frac{\alpha}{\mu}\right)m\pi A_{mn}+\left(1+\frac{\alpha}{\mu}\right)D_{mn}-2\frac{\alpha}{\mu}C_{mn}+\frac{2}{3(1-\nu)}\delta^2\pi^2\left(m^2D_{mn}+\nu mnK_{mn}\right)+$$

$$\frac{\delta^2}{3}\left[\left(1+\frac{\alpha}{\mu}\right)n^2\pi^2D_{mn}+\frac{1}{3}\left(1-\frac{\alpha}{\mu}\right)mn\pi^2K_{mn}+\frac{2}{3}n\frac{\alpha}{\mu}\pi F_{mn}\right]=0,$$

$$\left(1-\frac{\alpha}{\mu}\right)n\pi A_{mn}+\left(1+\frac{\alpha}{\mu}\right)K_{mn}+2\frac{\alpha}{\mu}B_{mn}+\frac{2}{3(1-\nu)}\delta^2\pi^2\left(n^2K_{mn}+\nu m^2D_{mn}\right)+$$

$$+\frac{\delta^2}{3}\left[\left(1+\frac{\alpha}{\mu}\right)m^2\pi^2K_{mn}+\frac{1}{3}\left(1-\frac{\alpha}{\mu}\right)mn\pi^2D_{mn}-\frac{2}{3}m\frac{\alpha}{\mu}\pi F_{mn}\right]=0 \tag{1.5}$$

$$(\beta+3\gamma+\varepsilon)\left(m^2+n^2\right)\pi^2B_{mn}+(\beta+\gamma-\varepsilon)mn\pi^2C_{mn}+$$

$$+2\frac{\alpha}{\mu}\left(n\pi A_{mn}-K_{mn}-2B_{mn}\right)+\beta m\pi F_{mn}=0,$$

$$(\beta+3\gamma+\varepsilon)\left(m^2+n^2\right)\pi^2C_{mn}+(\beta+\gamma-\varepsilon)mn\pi^2B_{mn}-$$

$$-2\frac{\alpha}{\mu}\left(m\pi A_{mn}-D_{mn}+2C_{mn}\right)+\beta\pi F_{mn}=0,$$

$$(\beta+2\gamma)F_{mn}+\beta\pi\left(mB_{mn}+nC_{mn}\right)+\frac{\delta^2}{3}\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\left(m^2+n^2\right)\pi^2F_{mn}-$$

$$-2\frac{\alpha}{\mu}\frac{\delta^2}{3}\left(m\pi K_{mn}-n\pi D_{mn}-2F_{mn}\right)=0.$$

Решая систему линейных алгебраических уравнений (1.5) и определяя указанные выше коэффициенты в формуле (1.3), определим все основные функции, участвующие в задаче: в частности, на основе первой формулы из (1.3) определим прогиб пластинки, а также, подставляя их в соответствующие формулы, определим силовые и моментные напряжения.

2. Изгиб микрополярной упругой прямоугольной пластинки по теории со стесненным вращением. Отметим, что математическая модель микрополярных пластин со стесненным вращением ранее построена в работах [4, 5]. Основные уравнения изгибной деформации микрополярной прямоугольной пластинки со стесненным вращением имеют вид [3, 4]:

$$2\mu\frac{\partial\Psi_1}{\partial x_1}+2\mu\frac{\partial\Psi_2}{\partial x_2}+(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^3\Psi_1}{\partial x_1\partial x_2^2}+(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^3\Psi_2}{\partial x_1^2\partial x_2}-2(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2\partial x_2^2}+$$

$$+\frac{\gamma+\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial^3\Psi_1}{\partial x_1^3}+\frac{\partial^3\Psi_2}{\partial x_2^3}\right)-\frac{\gamma+\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4}+\frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4}\right)+2\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)=-\frac{q_3}{h},$$

$$2\mu\Psi_1-\left(\gamma+\frac{2\mu h^2}{3}\right)\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial x_2^2}-\left(\frac{\gamma+\varepsilon}{2}+\frac{4\mu h^2}{3(1-\nu)}\right)\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial x_1^2}+\left(\frac{\gamma-\varepsilon}{2}-\frac{4\mu h^2\nu}{3(1-\nu)}-\frac{2\mu h^2}{3}\right)$$

$$\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial x_1\partial x_2}-\frac{2h^2}{3}\frac{\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{\partial^4\Psi_2}{\partial x_1^3\partial x_2}+\frac{2h^2}{3}\frac{\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{\partial^4\Psi_1}{\partial x_1^2\partial x_2^2}-\frac{2h^2}{3}\frac{\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{\partial^4\Psi_2}{\partial x_1\partial x_2^3}+$$

$$+\frac{2h^2}{3}\frac{\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{\partial^4\Psi_1}{\partial x_2^4}+2\mu\frac{\partial w}{\partial x_1}+\frac{\gamma+\varepsilon}{2}\frac{\partial^3 w}{\partial x_1\partial x_2^2}+\frac{\gamma+\varepsilon}{2}\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3}=0, \qquad (2.1)$$

$$2\mu\Psi_2-\left(\gamma+\frac{2\mu h^2}{3}\right)\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial x_1^2}-\left(\frac{\gamma+\varepsilon}{2}+\frac{4\mu h^2}{3(1-\nu)}\right)\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial x_2^2}+\left(\frac{\gamma-\varepsilon}{2}-\frac{4\mu h^2\nu}{3(1-\nu)}-\frac{2\mu h^2}{3}\right)\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial x_1\partial x_2}-$$

$$-\frac{2h^2}{3}\frac{\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{\partial^4\Psi_1}{\partial x_1^3\partial x_2}+\frac{2h^2}{3}\frac{\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{\partial^4\Psi_2}{\partial x_1^2\partial x_2^2}-\frac{2h^2}{3}\frac{\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{\partial^4\Psi_1}{\partial x_1\partial x_2^3}+$$

$$+\frac{2h^2}{3}\frac{\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{\partial^4\Psi_2}{\partial x_1^4}+2\mu\frac{\partial w}{\partial x_2}+\frac{\gamma+\varepsilon}{2}\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2\partial x_2}+\frac{\gamma+\varepsilon}{2}\frac{\partial^3 w}{\partial x_2^3}=0.$$

Граничные условия шарнирного опирания выражаются так:

при $x_1=0, x_1=a$, $w=0$, $\frac{\partial\Psi_1}{\partial x_1}=0$, $\Psi_2=0$,

при $x_2=0, x_2=b$, $w=0$, $\frac{\partial\Psi_2}{\partial x_2}=0$, $\Psi_1=0$. (2.2)

В модели микрополярных упругих пластин со стесненным вращением имеются четыре упругие константы: E,ν,γ и ε (или E,μ,γ и ε). Отметим, что в модели (2.1), (2.2) микрополярных пластин со стесненным вращением учтены поперечные сдвиговые деформации. Решение системы уравнений (2.1) с учетом граничных условий (2.2) будем искать в виде (1.3) для Ψ_1,Ψ_2 и w. В результате приходим к следующей линейной системе алгебраических неоднородных уравнений относительно коэффициентов:

$$\left(\frac{\gamma+\varepsilon}{4}\pi^4\left(m^4+n^4\right)+\pi^2\left(m^2+n^2\right)+\frac{\gamma+\varepsilon}{2}m^2n^2\right)A_{mn}+\left(\pi m-\frac{\gamma+\varepsilon}{4}\pi^3\left(m^3+mn^2\right)\right)\cdot$$

$$\cdot B_{mn}+\left(\pi n-\frac{\gamma+\varepsilon}{4}\pi^3\left(n^3+m^2n\right)\right)B_{mn}=\frac{8}{\delta\pi^2}\frac{q_m}{\mu}\frac{1}{mn}, \qquad (2.3)$$

$$\left(\pi m-\frac{\gamma+\varepsilon}{4}\pi^3m^3+\frac{\gamma-\varepsilon}{4}\pi^3mn^2-\frac{\gamma}{2}\pi^3mn^2\right)A_{mn}+$$

$$+\left(1+\frac{\gamma+\varepsilon}{4}\pi^2m^2+\frac{\gamma}{2}\pi^2m^2+\frac{2\delta^2\pi^2m^2}{3(1-\nu)}+\frac{\delta^2\pi^2n^2}{3}+\right.$$

$$\left.+\frac{\delta^2}{3}\frac{\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\pi^4\left(m^2n^2+n^4\right)\right)B_{mn}+$$

$$+\left(\pi^2mn+\frac{2\delta^2\pi^2\nu mn}{3(1-\nu)}+\frac{\delta^2\pi^2mn}{3}-\frac{\delta^2}{3}\frac{\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\pi^4\left(m^3n+mn^3\right)\right)C_{mn}=0,$$

$$\left(\pi n-\frac{\gamma+\varepsilon}{4}\pi^3n^3+\frac{\gamma-\varepsilon}{4}\pi^3m^2n-\frac{\gamma}{2}\pi^3m^2n\right)A_{mn}+$$

$$+\left(1+\frac{\gamma+\varepsilon}{4}\pi^2m^2+\frac{\gamma}{2}\pi^2m^2+\frac{2\delta^2\pi^2m^2}{3(1-\nu)}+\frac{\delta^2\pi^2n^2}{3}+\frac{\delta^2}{3}\frac{\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\pi^4\left(m^2n^2+n^4\right)\right)C_{mn}+$$

$$+\left(\pi^2mn+\frac{2\delta^2\pi^2\nu mn}{3(1-\nu)}+\frac{\delta^2\pi^2mn}{3}-\frac{\delta^2}{3}\frac{\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\pi^4\left(m^3n+mn^3\right)\right)B_{mn}=0.$$

Отметим, что в модели (2.1), (2.2) микрополярных пластин со стесненным вращением учтены поперечные сдвиговые деформации. Если пренебрегать поперечными сдвигами, получим модель микрополярных пластин со стесненным вращением, когда за основу принимается классическая кинематическая гипотеза Кирхгофа. Эта модель приводится к решению следующего простого дифференциального уравнения [3]:

$$\left(\frac{2\mathrm{E}h^3}{3\left(1-\nu^2\right)}+2h(\gamma+\varepsilon)\right)\left(\frac{\partial^4w}{\partial x_1^4}+2\frac{\partial^4w}{\partial x_1^2\partial x_2^2}+\frac{\partial^4w}{\partial x_2^4}\right)=q, \tag{2.4}$$

а граничные условия шарнирного опирания будут выглядеть следующим образом:

при $x_1=0, x_1=a$, $w=0$, $\dfrac{\partial^2w}{\partial x_1^2}=0$; при $x_2=0, x_2=b$, $w=0$, $\dfrac{\partial^2w}{\partial x_2^2}=0$. (2.5)

Решение граничной задачи (2.4), (2.5) представим в виде (1.3) для функции w. В результате подстановки в уравнение (2.4) для определения коэффициентов A_{mn} приходим к решению следующего алгебрического уравнения:

$$\left[\frac{4\delta^3}{3\left(1-\nu\right)}+2\left(\frac{\gamma}{a^2\mu}+\frac{\varepsilon}{a^2\mu}\right)\pi^4\left(m^2+n^2\right)^2\right]A_{mn}=\frac{16}{\pi^2mn}\frac{q_m}{\mu}. \tag{2.6}$$

3. Изгиб микрополярной упругой прямоугольной пластинки по модели "с малой сдвиговой жесткостью". Основные уравнения изгибной деформации микрополярной прямоугольной пластинки "с малой сдвиговой жесткостью" имеют вид [3]:

$$(\mu+\alpha)\left(\frac{\partial^2w}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2w}{\partial x_2^2}\right)+(\mu-\alpha)\left(\frac{\partial\Psi_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\Psi_2}{\partial x_2}\right)=-\frac{q_3}{h},$$

$$(\mu-\alpha)\frac{\partial w}{\partial x_1}+(\mu+\alpha)\Psi_1-\frac{1}{3}h^2\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{2\mu}{1-\nu}\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial x_1^2}+(\mu+\alpha)\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial x_2^2}+\frac{2\mu\nu}{1-\nu}\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial x_1\partial x_2}+(\mu-\alpha)\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial x_1\partial x_2}\right)=0, \tag{3.1}$$

$$(\mu-\alpha)\frac{\partial w}{\partial x_2}+(\mu+\alpha)\Psi_2-\frac{1}{3}h^2\cdot$$

$$\left(\frac{2\mu}{1-\nu}\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial x_2^2}+(\mu+\alpha)\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial x_1^2}+\frac{2\mu\nu}{1-\nu}\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial x_1\partial x_2}+(\mu-\alpha)\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial x_1\partial x_2}\right)=0.$$

Граничные условия шарнирного опирания имеют вид

$$\text{при } x_1=0,\ x_1=a,\ w=0,\ \Psi_2=0,$$

$$\text{при } x_2=0, x_2=b,\ w=0,\ \Psi_1=0. \tag{3.2}$$

В этой модели микрополярных упругих тонких пластин имеются три упругих коэффициента μ,ν,α (или E,μ,α). В модели (3.1), (3.2) изгиба микрополярных пластин учтены все поперечные сдвиговые деформации. Решение системы уравнений (3.1) с учетом граничных условий (3.2) представим в виде ряда типа (1.3), в итоге для определения неизвестных коэффициентов приходим к следующей алгебраической линейной системе уравнений:

$$\left(1+\frac{\alpha}{\mu}\right)\pi\left(m^2+n^2\right)A_{mn}+\left(1-\frac{\alpha}{\mu}\right)mB_{mn}+\left(1-\frac{\alpha}{\mu}\right)nC_{mn}=\frac{8}{\delta\pi^3}\frac{q}{\mu}\frac{1}{mn}, \tag{3.3}$$

$$\left(1-\frac{\alpha}{\mu}\right)m\pi A_{mn}+\left(\left(1+\frac{\alpha}{\mu}\right)+\frac{2}{3(1-\nu)}\delta^2m^2\pi^2+\frac{\delta^2}{3}\left(1+\frac{\alpha}{\mu}\right)n^2\pi^2\right)\cdot$$

$$\cdot B_{mn}+\frac{\delta^2}{3}\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}-\frac{\alpha}{\mu}\right)mn\pi^2C_{mn}=0,$$

$$\left(1-\frac{\alpha}{\mu}\right)n\pi A_{mn}+\frac{\delta^2}{3}\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}-\frac{\alpha}{\mu}\right)mn\pi^2\mathbf{B}_{mn}+$$

$$+\left(\left(1+\frac{\alpha}{\mu}\right)+\frac{2}{3(1-\nu)}\delta^2n^2\pi^2+\frac{\delta^2}{3}\left(1+\frac{\alpha}{\mu}\right)m^2\pi^2\right)C_{mn}=0,$$

Если пренебрегать поперечными сдвигами, придем к модели микрополярных пластин “с малой сдвиговой жесткостью”, когда кинематические гипотезы будут соответствовать классическим гипотезам Кирхгоффа

$$\frac{2\mathrm{E}h^3}{3\left(1-\nu^2\right)}\left(\frac{\partial^4w}{\partial x_1^4}+2\frac{\partial^4w}{\partial x_1^2\partial x_2^2}+\frac{\partial^4w}{\partial x_2^4}\right)-8\alpha h\left(\frac{\partial^2w}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2w}{\partial x_2^2}\right)=q. \tag{3.4}$$

Граничные условия шарнирного опирания имеют вид

$$\text{при}\quad x_1=0,\ x_1=a,\ w=0,\ \frac{\partial^2w}{\partial x_1^2}=0;$$

$$\text{при}\quad x_2=0,\ \ x_2=b,\ w=0,\ \frac{\partial^2w}{\partial x_2^2}=0. \tag{3.5}$$

Решение граничной задачи (3.3), (3.4) представим в виде (1.3) для функции w. В итоге для определения коэффициентов A_{mn} приходим к следующему линейному алгебраическому уравнению:

$$\pi^2\left(\frac{4\delta^3\pi^2}{3(1-\nu)}\left(m^2+n^2\right)^2+8\frac{\alpha}{\mu}\delta\left(m^2+n^2\right)\right)A_{mn}=\frac{16q_m}{\pi^2 mn\mu}. \tag{3.6}$$

4. Численный счет и обсуждение результатов. А) Рассмотрим конкретный микрополярный материал. Это полиуретан [6], для которого упругие константы имеют следующие значения: $\lambda=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}=4370\frac{\text{КГ}}{\text{см}^2}$, $\mu=\frac{E}{2(1+\nu)}=1093\frac{\text{КГ}}{\text{см}^2}$, $\alpha=46\frac{\text{КГ}}{\text{см}^2}$, $\gamma+\varepsilon=4.8$ КГ, $\beta=120$ КГ. Для геометрических размеров пластинки приняты следующие значения: $a=b=10$см, $h=0.1$см ($\delta=\frac{1}{100}$), а для интенсивности приложенной равномерно распределенной нагрузки $q=0.005\frac{\text{КГ}}{\text{см}^2}$. Приведем результат вычислений по общей микрополярной теории со свободным вращением (1.1), (1.2): $\frac{w_{\max}^{мик}}{w_{\max}^{кл}}=0.21$, $\frac{\sigma_{\max}^{мик}}{\sigma_{\max}^{кл}}=0.19$. Как можно убедиться, при всех равных условиях микрополярность материала дает пластинке значительную прочность и жесткость. В рамках микрополярной теории без учета поперечных сдвигов (т.е. когда геометрические гипотезы соответствуют гипотезе Кирхгоффа) имеем тот же самый результат, что и в предыдущем случае.

Теперь материал пластинки рассмотрим как гипотетический материал и выясним, какую роль играют физические константы материала в отдельности. Для этого систему уравнений (1.1) и граничные условия (1.2) приведем к безразмерному виду; получим следующие безразмерные величины $\frac{\alpha}{\mu},\frac{\gamma}{\mu a^2},\frac{\varepsilon}{\mu a^2},\frac{\beta}{\mu a^2},\frac{q}{\mu},\delta=\frac{h}{a},\frac{w}{a},a\iota$. Будем придерживать величины $\frac{\gamma}{\mu a^2},\frac{\varepsilon}{\mu a^2},\frac{\beta}{\mu a^2},\frac{h}{a}$ и $\frac{q}{\mu}$ на следующих значениях: $\frac{\gamma}{\mu a^2}=\frac{\varepsilon}{\mu a^2}=22\cdot10^{-6}$, $\frac{\beta}{\mu a^2}=11\cdot10^{-4}$, $\delta=\frac{h}{a}=\frac{1}{100}$, $\frac{q}{\mu}=26\cdot10^{-7}$. Проследим изменение величин $\frac{\overline{w}_{\max}^{мик}}{\overline{w}_{\max}^{кл}}$, $\frac{\overline{\sigma}_{\max}^{мик}}{\overline{\sigma}_{\max}^{кл}}$ от значения $\frac{\alpha}{\mu}$ по модели (1.1), (1.2). Когда $\frac{\alpha}{\mu}=10^{-5}$, $\frac{\overline{w}_{\max}^{мик}}{\overline{w}_{\max}^{кл}}=0.980$, $\frac{\overline{\sigma}_{\max}^{мик}}{\overline{\sigma}_{\max}^{кл}}=0.981$, при $\frac{\alpha}{\mu}=0.125\cdot10^{-3}$ $\frac{\overline{w}_{\max}^{мик}}{\overline{w}_{\max}^{кл}}=0.862$, $\frac{\overline{\sigma}_{\max}^{мик}}{\overline{\sigma}_{\max}^{кл}}=0.861$;

при $\dfrac{\alpha}{\mu}=0.5\cdot10^{-3}$ $\dfrac{\overline{w}^{мик}_{\max}}{\overline{w}^{кл}_{\max}}=0.765$, $\dfrac{\overline{\sigma}^{мик}_{\max}}{\overline{\sigma}^{кл}_{\max}}=0.764$; при $\dfrac{\alpha}{\mu}=0.2$ $\dfrac{\overline{w}^{мик}_{\max}}{\overline{w}^{кл}_{\max}}=0.684$, $\dfrac{\overline{\sigma}^{мик}_{\max}}{\overline{\sigma}^{кл}_{\max}}=0.683$.

Как можно убедиться, физическая постоянная α играет значительную роль в характеристиках прочности и жесткости микрополярной пластинки (если у микрополярного материала физическая постоянная α имеет высокие значения, то такой материал имеет высокие прочностные и жесткостные характеристики). Что касается ролей физических постоянных γ,ε и β, отметим, что их роли связаны со значением физической постоянной α. Если α имеет меньшее значение, влияние величин γ,ε и особенно β очень мало. Например, при $\delta=0.01,\dfrac{q}{\mu}=2.59\cdot10^{-6}$, $\dfrac{\alpha}{\mu}=\dfrac{1}{16000}$, $\dfrac{\beta}{a^2\mu}=11\cdot10^{-4}$, когда $\dfrac{\gamma}{a^2\mu}=\dfrac{\varepsilon}{a^2\mu}=5\cdot10^{-6}$, то $\dfrac{\overline{w}^{мик}}{\overline{w}^{кл}}=0.95$, $\dfrac{\overline{\sigma}^{мик}}{\overline{\sigma}^{кл}}=0.95$; а когда $\dfrac{\gamma}{a^2\mu}=\dfrac{\varepsilon}{a^2\mu}=20\cdot10^{-6}$, то $\dfrac{\overline{w}^{мик}}{\overline{w}^{кл}}=0.91$, $\dfrac{\overline{\sigma}^{мик}}{\overline{\sigma}^{кл}}=0.91$. При остальных равных условиях, если имеем $\dfrac{\alpha}{\mu}=\dfrac{1}{1000}$, когда $\dfrac{\gamma}{a^2\mu}=\dfrac{\varepsilon}{a^2\mu}=5\cdot10^{-6}$, то $\dfrac{\overline{w}^{мик}}{\overline{w}^{кл}}=0.91$, $\dfrac{\overline{\sigma}^{мик}}{\overline{\sigma}^{кл}}=0.91$; когда $\dfrac{\gamma}{a^2\mu}=\dfrac{\varepsilon}{a^2\mu}=20\cdot10^{-6}$, то $\dfrac{\overline{w}^{мик}}{\overline{w}^{кл}}=0.74$, $\dfrac{\overline{\sigma}^{мик}}{\overline{\sigma}^{кл}}=0.73$.

В) Рассмотрим численные результаты по теории изгиба микрополярных пластин со стесненным вращением (2.1), (2.2). В этом случае если имеем следующие данные:

$\delta=\dfrac{1}{100}$, $a=10см$, $\nu=0.4$, $\dfrac{q}{\mu}=2.59\cdot10^{-6}$, тогда, если $\dfrac{\gamma}{a^2\mu}=\dfrac{\varepsilon}{a^2\mu}=1\cdot10^{-6}$, имеем $\dfrac{\overline{w}^{мик}}{\overline{w}^{кл}}=0.98$, $\dfrac{\overline{\sigma}^{мик}}{\overline{\sigma}^{кл}}=0.98$; если $\dfrac{\gamma}{a^2\mu}=\dfrac{\varepsilon}{a^2\mu}=10\cdot10^{-6}$, имеем $\dfrac{\overline{w}^{мик}}{\overline{w}^{кл}}=0.85$, $\dfrac{\overline{\sigma}^{мик}}{\overline{\sigma}^{кл}}=0.85$; если $\dfrac{\gamma}{a^2\mu}=\dfrac{\varepsilon}{a^2\mu}=25\cdot10^{-6}$, имеем $\dfrac{\overline{w}^{мик}}{\overline{w}^{кл}}=0.69$, $\dfrac{\overline{\sigma}^{мик}}{\overline{\sigma}^{кл}}=0.69$; если $\dfrac{\gamma}{a^2\mu}=\dfrac{\varepsilon}{a^2\mu}=35\cdot10^{-6}$, имеем $\dfrac{\overline{w}^{мик}}{\overline{w}^{кл}}=0.61$, $\dfrac{\overline{\sigma}^{мик}}{\overline{\sigma}^{кл}}=0.61$.

Из приведенных данных можно сделать вывод о том, что если для микрополярного материала пластинки применима стесненная теория,при всех равных условиях, по сравнению с классическим случаем, микрополярность материала повышает прочностные и жесткостные характеристики материала, кроме того при больших значениях физических констант γ и ε, указанные характеристики пластинки имеют большие показатели.

Аналогичный результат имеет место и тогда, когда в случае микрополярного материала стесненного вращения для деформации тонкой пластинки принимается гипотеза Кирхгофа.

С) Наконец, рассмотрим случай модели микрополярной пластинки "с малой сдвиговой жесткостью". Допустим, что $\delta = \frac{1}{100}$, $\frac{q}{\mu} = 2.59 \cdot 10^{-6}$. Если $\frac{\alpha}{\mu} = 10^{-5}$, имеем $\frac{\bar{w}^{мик}}{\bar{w}^{кл}} = 0.98$, $\frac{\bar{\sigma}^{мик}}{\bar{\sigma}^{кл}} = 0.98$; если $\frac{\alpha}{\mu} = 10^{-4}$, имеем $\frac{\bar{w}^{мик}}{\bar{w}^{кл}} = 0.85$, $\frac{\bar{\sigma}^{мик}}{\bar{\sigma}^{кл}} = 0.85$; если $\frac{\alpha}{\mu} = 0.25 \cdot 10^{-3}$, имеем $\frac{\bar{w}^{мик}}{\bar{w}^{кл}} = 0.69$, $\frac{\bar{\sigma}^{мик}}{\bar{\sigma}^{кл}} = 0.69$; если $\frac{\alpha}{\mu} = 0.2 \cdot 10^{-2}$, имеем $\frac{\bar{w}^{мик}}{\bar{w}^{кл}} = 0.2$, $\frac{\bar{\sigma}^{мик}}{\bar{\sigma}^{кл}} = 0.2$.

Как можно убедиться, и по модели "с малой сдвиговой жесткостью" микрополярность материала пластинки повышает прочность и жесткость пластинки, и чем выше α, тем выше показатели этого явления.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН ПА в рамках научного проекта №SCS 13-2C 154.

Гюмрийский государственный педагогический
институт им. М. Налбандяна

Г. С. Айрапетян, Н. С. Асланян,
член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян

Изгиб микрополярной упругой прямоугольной пластинки

На основе общих прикладных теорий изучается задача изгибной деформации микрополярной упругой прямоугольной пластинки под нормальной равномерно распределенной нагрузкой, когда стороны прямоугольника шарнирно оперты. Для изучаемых задач построены точные решения, которые доведены до окончательных численных результатов. На основе численного анализа устанавливаются эффективные свойства микрополярного материла пластинки (с точки зрения прочности и жесткости пластинки) по сравнению с классическими материалами.

Գ. Ս. Հայրապետյան, Ն. Ս. Ասլանյան,
ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ս. Հ. Սարգսյան

Միկրոպոլյար առաձգական ուղղանկյուն սալի ծռումը

Աշխատանքում կիրառական ընդհանուր տեսությունների հիման վրա ուսումնասիրվում է միկրոպոլյար առաձգական սալի ծռման դեֆորմացիան նորմալ ուղղվածությամբ բաշխված բեռի ազդեցության տակ,երբ սալի բոլոր կողմերը հոդակապորեն

հենված են: Ուսումնասիրվող խնդիրների համար կառուցվում են ճշգրիտ լուծումները, որոնք հասցվում են մինչև վերջնական թվային արդյունքների ստացման: Թվային անալիզի հիման վրա հաստատվում են սալի միկրոպոլյար նյութի էֆեկտիվ հատկությունները (սալի ամրության և կոշտության տեսանկյունից)՝ համեմատած դասական նյութերի հետ:

G. S. Hayrapetyan, N. S. Aslanyan,
corresponding member of NAS RA S. H. Sargsyan

Bending of Micropolar Elastic Rectangular Plate

The problem of bending deformation of hinged supported micropolar elastic rectangular plate is studied on the basis of main applied theories when it is under the normaly distributed load. Exact solutions which are reduced to final numerical results are constructed for the studied problems. On the basis of the numerical analysis the effective properties of the plate micropolar material are revealed (from the point of view of strength and stiffness) compared with the classical materials.

Литература

1. *Саркисян С. О.* - Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т. 53. Вып. 2. С. 148-156.
2. *Саркисян С. О.* – Учен. зап. Гюмрийского гос. пед. ин-та. 2013. N 1. Вып. А. С. 7-37.
3. *Саркисян С. О.* - Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72. Вып. 2. С.129-147.
4. *Хоффмэн О.* - Прикладная механика. Амер. о-во инж.-механиков. Серия Е. 1964. Т. 31. N4. С. 149-150.
5. *Геворгян Г. А.* - Прикладная механика. 1966. Т. 2. Вып. 10. С. 36-43.
6. *Lakes R. S.* In: Continuum models for materials with micro-structure/ Ed. by H. Muhlhaus. N.Y. Wiley. 1995. P. 1-22.