ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 114 2014 № 4

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

В. Ж. Думанян

О разрешимости задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка

(Представлено академиком А. Б. Нерсесяном 19/VI 2014)

Ключевые слова: *задача Дирихле, эллиптическое уравнение.*

В работе исследуется разрешимость задачи Дирихле в ограниченной области $Q\subset R_n, n\geq 2$, с гладкой границей $\partial Q\in C^1$ для эллиптического уравнения второго порядка

$$Lu\equiv -div\left(A(x)\nabla u\right)+\left(\overline{b}(x),\nabla u\right)-div\left(\overline{c}(x)u\right)+d(x)u=f(x)-divF(x), x\in Q, \quad (1)$$

$$u\Big|_{\partial Q}=u_0, \quad (2)$$

с граничной функцией u_0 из $L_2(\partial Q)$. Предполагается, что функции f и $F=(f_1,\dots,f_n)$ принадлежат $L_{2,loc}(Q)$, симметрическая матрица $A(x)=$ $=(a_{ij}(x))$, элементы которой являются вещественнозначными измеримыми функциями, удовлетворяет условию

$$\gamma|\xi|^2\leq\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j=(\xi,A(x)\xi)\leq\gamma^{-1}|\xi|^2 \quad (3)$$

для всех $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)\in R_n$ и почти всех $x\in Q$ с положительной постоянной γ, а коэффициенты $\overline{b}(x)=(b_1(x),\dots,b_n(x))$, $\overline{c}(x)=(c_1(x),\dots,c_n(x))$ и $d(x)$ являются измеримыми и ограниченными в каждой строго внутренней подобласти области Q функциями.

Под решением задачи (1), (2) будем понимать функцию u из $W^1_{2,loc}(Q)$, удовлетворяющую уравнению (1) в смысле обобщенных функций, т.е. для всех финитных и бесконечно дифференцируемых функций $\eta\in C_0^\infty(Q)$ выполняется интегральное тождество

$$\int_Q\left(A(x)\nabla u+\overline{c}(x)u,\nabla\eta\right)dx+\int_Q\left(\overline{b}(x),\nabla u+d(x)u\right)\eta dx=\int_Q\left(f\eta+(F,\nabla\eta)\right)dx,$$

и удовлетворяющую условию (2) в следующем смысле:

для каждой точки $x^0 \in \partial Q$ найдется такая ее окрестность $V_{x^0} \subset \partial Q$, что

$$\int\limits_{V_{x^0}} \left(u\left(x+\delta\overline{\nu}\left(x^0\right)\right)-u_0\left(x\right)\right)^2 ds \to 0 \text{ при } \delta \to +0, \qquad (4)$$

где $\overline{\nu}\left(x^0\right)$ – единичный вектор внутренней нормали к ∂Q в точке x^0.

Понятие решения из $W^1_{2,loc}\left(Q\right)$ было введено в случае области с дважды гладкой границей В. П. Михайловым в работах [1, 2] (см. также [3, [4]), где принятие решением своего граничного значения понималось в следующем смысле:

$$\int\limits_{\partial Q} \left(u\left(x+\delta\overline{\nu}\left(x\right)\right)-u_0\left(x\right)\right)^2 ds \to 0 \text{ при } \delta \to +0.$$

При этом, в случае гладких коэффициентов ($a_{ij}\left(x\right)$, $b_i\left(x\right) \in C^1\left(\overline{Q}\right)$, $i,j=$ $=1,\ldots,n$, $d\left(x\right) \in C^1\left(\overline{Q}\right)$, а $c\left(x\right)=0$) было установлено, что задача (1), (2) фредгольмова, соответствующий оператор имеет тот же спектр и те же пространства собственных функций, что и задача в обычной обобщенной постановке в $W^1_2\left(Q\right)$. Если ноль не является точкой спектра, то задача разрешима при любой граничной функции $u_0 \in L_2\left(\partial Q\right)$ и любой правой части $f\left(F \equiv 0\right)$, удовлетворяющей условию

$$\int\limits_Q r^\theta\left(x\right) f^2\left(x\right) dx < \infty, \text{ с некоторым показателм } \theta < 3,$$

где $r\left(x\right)$ – расстояние точки $x \in Q$ до границы ∂Q.

Свойство $\left(n-1\right)$-мерной непрерывности решения и однозначная разрешимость задачи Дирихле с граничной функцией u_0 из $L_2\left(\partial Q\right)$ для уравнения без младших членов $\left(b_i=0, c_i=0, d=0\right)$ с $f \in W_2^{-1}\left(F=0\right)$ были установлены в работе [5]. При этом предполагалось, что единичный вектор внутренней нормали $\overline{\nu}$ к ∂Q удовлетворяет условию Дини:

$$\left|\overline{\nu}\left(x\right)-\overline{\nu}\left(y\right)\right| \le \omega\left(\left|x-y\right|\right) \qquad (5)$$

для всех $x, y \in \partial Q$, где ω – такая монотонная функция, что $\int\limits_0 \frac{\omega(t)}{t} dt < \infty$, а коэффициенты a_{ij} непрерывны по Дини на границе:

$$\left|a_{ij}\left(x\right)-a_{ij}\left(y\right)\right| \le \omega\left(\left|x-y\right|\right) \qquad (6)$$

для всех $x \in \partial Q$, $y \in Q$ и $i,j=1,\ldots,n$. Не ограничивая общности, можно считать, что функция ω в условиях (5) и (6) одна и та же.

В работе [6] было показано, что приведенный выше результат остается справедливым для правых частей из более широкого класса, а именно, если

$$r^{\frac{3}{2}}\left(1+\left|\ln r\right|\right)^{\frac{3}{4}} f \in L_2\left(Q\right), r^{\frac{1}{2}}\left(1+\left|\ln r\right|\right)^{\frac{3}{4}} F \in \left(L_2\left(Q\right)\right)^n, \qquad (7)$$

Далее мы также будем предполагать условия (5) - (7) выполненными.

Случай задачи Дирихле с граничной функцией из $L_p(\partial Q)$ для уравнения без младших членов исследован в работах [7, 8].

Понятие $(n-1)$-мерной непрерывности было предложено А. К. Гущиным в работе [5] и заключается в следующем.

Пусть μ – мера (неотрицательная, борелевская) в R_n с носителем в $\bar{Q}$, удовлетворяющая следующему условию. Существует такая постоянная $C = C(\mu)$, что для всех $r > 0$ и $x^0 \in \bar{Q}$ мера шара $B_r(x^0)$ радиуса r с центром в точке x^0 не превосходит числа Cr^{n-1}:

$$\mu\left(B_r\left(x^0\right)\right) \le Cr^{n-1} \text{ для всех } r > 0 \text{ и } x^0 \in \bar{Q}; \tag{8}$$

наименьшую из таких постоянных C будем называть нормой μ и обозначать через $\|\mu\|$. Пространство Гущина $(n-1)$-мерно непрерывных функций $C_{n-1}(\bar{Q})$ является пополнением пространства непрерывных в $\bar{Q}$ функ-ций по норме

$$\|u\|_{C_{n-1}(\bar{Q})} = \sup\left(\frac{1}{\|\mu\|}\int_{\bar{Q}} u^2(x)\,d\mu(x)\right)^{\frac{1}{2}},$$

где точная верхняя грань берется по всем удовлетворяющим условию (8) мерам μ.

Отметим только, что определение $(n-1)$-мерной непрерывности можно дать и в терминах близости значений функции на близких мерах (см. [5]).

В работе [9] (см. также [10]) было установлено, что решение задачи (1), (2) (если оно существует) обладает свойством $(n-1)$-мерной непрерывности, т.е. принадлежит пространству Гущина $C_{n-1}(\bar{Q})$. При этом предполагалось, что коэффициенты $\bar{b}(x)$, $\bar{c}(x)$ и $d(x)$ локально ограничены и для них справедливы следующие оценки: существует постоянная $K > 0$, такая что

$$\left|\bar{b}(x)\right| \le \frac{K}{r(x)\left(1+\left|\ln r(x)\right|\right)^{\frac{3}{4}}},\ x \in Q, \tag{9}$$

$$\int_0 t\left(1+\left|\ln t\right|\right)^{\frac{3}{2}} C^2(t)\,dt < \infty, \text{ где } C(t) \equiv \sup_{r(x)\ge t}\left|\bar{c}(x)\right|, \tag{10}$$

$$\int_0 t^3\left(1+\left|\ln t\right|\right)^{\frac{3}{2}} D^2(t)\,dt < \infty, \text{ где } D(t) \equiv \sup_{r(x)\ge t}\left|d(x)\right|. \tag{11}$$

Однако разрешимость изучаемой задачи (с граничной функцией из $L_2(\partial Q)$) была изучена только при жестких условиях на гладкость коэффициентов.

Далее, при тех же условиях (9) - (11), в терминах скалярного произведения в специальном гильбертовом пространстве в работе [11] (см. также [12]) получены необходимые и достаточные условия существования $(n-1)$ - мерно непрерывного решения задачи (1), (2) и установлено, что условия разрешимости исследуемой задачи имеют вид, аналогичный условиям разрешимости в обычной обобщенной постановке (в $W_2^1(Q)$).

Для формулировки основного результата настоящей работы нам потребуется описать схему исследования и привести некоторые результаты работы [11].

Наряду с задачей (1), (2) рассмотрим задачи Дирихле:

$$L_0 v \equiv -div(A\nabla v) = 0, v\Big|_{\partial Q} = u_0, \tag{12}$$

$$L_0 w = -\left(\bar{b}, \nabla w\right) + div(\bar{c}w) - dw - \left(\bar{b}, \nabla v\right) + div(\bar{c}v) - dv + f - divF, w\Big|_{\partial Q} = 0, \tag{13}$$

где функция v в правой части уравнения (13) есть решение задачи (12). Очевидна справедливость следующего утверждения.

Утверждение 1. *Пусть функция v является решением задачи (12). Тогда для того чтобы функция u являлась решением задачи (1), (2), необходимо и достаточно, чтобы функция $w = u - v$ являлась решением задачи (13).*

Задача (12) однозначно разрешима при всех $u_0 \in L_2(\partial Q)$ (см. [5]), решение принадлежит пространству $C_{n-1}(\bar{Q})$ и для него справедлива следующая оценка:

$$\|v\|^2_{C_{n-1}(\bar{Q})} + \int_Q r(x)|\nabla v|^2\, dx \le const\|u_0\|^2_{L_2(\partial Q)}$$

с не зависящей от u постоянной.

Следовательно, в силу утверждения 1 задача (1), (2) разрешима тогда и только тогда, когда разрешима задача (13) с v, являющейся решением задачи (12).

Введем следующие пространства:

$$U(Q) \equiv \left\{u \in W^1_{2,loc}(Q) \cap C_{n-1}(\bar{Q}) : \int_Q r(x)|\nabla u(x)|^2\, dx < \infty\right\},$$

$$\|u\|^2_{U(Q)} = \|u\|^2_{C_{n-1}(\bar{Q})} + \int_Q r(x)|\nabla u(x)|^2\, dx, \qquad \overset{0}{U}(Q) \equiv \left\{u \in U(Q), u\Big|_{\partial Q} = 0\right\}.$$

Следуя [6], обозначим через $\overset{0}{H}_1(Q)$ пополнение $C_0^\infty(Q)$ по норме, порожденной скалярным произведением

$$(u,v)_{\overset{0}{H}_1(Q)} = \int_Q \frac{(\nabla u, \nabla v)}{r\left(1+|\ln r|\right)^{3/2}}\, dx,$$

а через $\overset{0}{H}(Q)$ – пополнение $C_0^\infty(Q)$ по норме, порожденной скалярным произведением

$$(u,v)_{\overset{0}{H}(Q)} = \int\limits_Q \left(r\left(1+|\ln r|\right)^{1/2} (\nabla u, \nabla v) + \frac{u \cdot v}{r\left(1+|\ln r|\right)^{1/2}} \right) dx .$$

Напомним, что $r = r(x)$ – расстояние точки $x \in Q$ до границы ∂Q.

Имеют место следующие вложения: $\overset{0}{H}_1(Q) \subset \overset{0}{W}{}_2^1(Q) \subset \overset{0}{H}(Q) \subset \overset{0}{U}(Q)$ (см. [11]).

Так как решение задачи (1), (2) и решение задачи (12) принадлежат пространству $U(Q)$ (см. [5, 9]), то из утверждения 1 вытекает, что решение w задачи (13) принадлежит пространству $\overset{0}{U}(Q)$.

Рассмотрим оператор $Tu = -\left(\overline{b}, \nabla u\right) + div\left(\overline{c}u\right) - du$ из правой части уравнения (13). Имеет место следующее утверждение (см. [11]).

Лемма 1. *Пусть* $\partial Q \in C^1$ *и пусть выполнены условия (9) - (11). Тогда оператор* T *является линейным и ограниченным оператором из* $U(Q)$ *в* $\left[\overset{0}{H}_1(Q)\right]^*$, *из* $\overset{0}{W}{}_2^1(Q)$ *в* $\overset{0}{W}{}_2^{-1}(Q)$.

В [6] установлено, что для любой правой части $g' \in \left[\overset{0}{H}_1(Q)\right]^*$ существует и единственно решение из $W_{2,loc}^1(Q)$ задачи

$$-div(A\nabla u) = g', \quad u\Big|_{\partial Q} = 0; \tag{14}$$

это решение принадлежит пространству $\overset{0}{H}(Q)$, и имеет место оценка

$$\|u\|_{\overset{0}{H}(Q)} \le C \|g'\|_{\left[\overset{0}{H}_1(Q)\right]^*}$$

с не зависящей от g' постоянной. Следовательно, если через L_0^{-1} обозначить оператор, ставящий в соответствие правой части g' решение u задачи (14), то L_0^{-1} является линейным и ограниченным оператором, действующим из $\left[\overset{0}{H}_1(Q)\right]^*$ в $\overset{0}{H}(Q)$. Кроме того, как хорошо известно (см. например [13]), оператор L_0^{-1} является линейным и ограниченным оператором, действующим из $\overset{0}{W}{}_2^{-1}(Q)$ в $\overset{0}{W}{}_2^1(Q)$. Таким образом, из леммы 1 вытекает следующее утверждение.

Лемма 2. $L_0^{-1}T$ *является линейным и ограниченным оператором из* $U(Q)$ *в* $\overset{0}{H}(Q)$, *из* $\overset{0}{W}{}_2^1(Q)$ *в* $\overset{0}{W}{}_2^1(Q)$.

Пусть w является решением задачи (13). Так как f, $divF \in \left[\overset{0}{H}_1(Q) \right]^*$ (см. [6]), то нетрудно видеть, что w является также решением операторного уравнения $w = L_0^{-1}Tw + L_0^{-1}Tv + L_0^{-1}(f - divF)$ в пространстве $\overset{0}{U}(Q)$, где $v \in U(Q)$ – решение задачи (12). С другой стороны, если функция w из пространства $\overset{0}{U}(Q)$ является решением операторного уравнения $w = L_0^{-1} \cdot$ $\cdot (Tw + Tv + f - divF)$, то w является также решением задачи (13). Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. w *является решением задачи (13) тогда и только тогда, когда* w *является решением операторного уравнения*

$$w - L_0^{-1}Tw = L_0^{-1}g, \ w \in \overset{0}{U}(Q), \qquad (15)$$

с $g = Tv + f - divF$, *где* $v \in U(Q)$ *– решение задачи (12).*

Далее, наряду с уравнением (15) рассмотрим соответствующее операторное уравнение в пространстве $\overset{0}{H}(Q)$:

$$w - L_0^{-1}Tw = h, \ w \in \overset{0}{H}(Q) \qquad (16)$$

с $h \in \overset{0}{H}(Q)$. Из леммы 2 следует справедливость следующего утверждения.

Утверждение 3. *Пусть* w *является решением операторного уравнения (15) в* $\overset{0}{U}(Q)$ *с* $g \in \left[\overset{0}{H}_1(Q) \right]^*$. *Тогда* w *является решением операторного уравнения (16) в* $\overset{0}{H}(Q)$ *с* $h = L_0^{-1}g$.

Объединяя утверждение 2 и утверждение 3, получаем

Утверждение 4. *Для того чтобы функция* w *являлась решением задачи (13), необходимо и достаточно, чтобы функция* w *являлась решением операторного уравнения (16) в пространстве* $\overset{0}{H}(Q)$ *с правой частью* $h = L_0^{-1}(Tv + f - divF)$, *где* v *– решение задачи (12).*

Рассмотрим оператор $L_0^{-1}T$ в гильбертовых пространствах $\overset{0}{H}(Q)$ и $\overset{0}{W}{}_2^1(Q)$. Имеет место следующая теорема (см. [11]).

Теорема 1. $L_0^{-1}T$ *является вполне непрерывным оператором, действующим из* $\overset{0}{H}(Q)$ *в* $\overset{0}{H}(Q)$ *и из* $\overset{0}{W}{}_2^1(Q)$ *в* $\overset{0}{W}{}_2^1(Q)$. *При этом отвечающие характеристическому числу 1 собственные подпространства оператора* $L_0^{-1}T$ *в пространствах* $\overset{0}{H}(Q)$ *и* $\overset{0}{W}{}_2^1(Q)$ *совпадают:*

$$Ker_{\overset{0}{W}{}_2^1(Q)}\left(I - L_0^{-1}T\right) = Ker_{\overset{0}{H}(Q)}\left(I - L_0^{-1}T\right),$$

здесь I *– тождественный оператор.*

Из теоремы 1 следует, что спектры оператора $L_0^{-1}T$ в пространствах $\overset{0}{H}(Q)$ и $\overset{0}{W}{}_2^1(Q)$ совпадают и что его собственные функции из $\overset{0}{H}(Q)$ принадлежат пространству $\overset{0}{W}{}_2^1(Q)$.

Таким образом, изучение разрешимости задачи (1), (2) сведено к изучению разрешимости операторного уравнения (16) в гильбертовом пространстве $\overset{0}{H}(Q)$ с вполне непрерывным оператором $L_0^{-1}T$. В силу теоремы Фредгольма пространство решений однородной задачи

$$w - L_0^{-1}Tw = 0\,,\ \ w \in \overset{0}{H}(Q) \tag{17}$$

конечномерно, его размерность совпадает с размерностью пространства решений однородной сопряженной задачи

$$w^* - \left(L_0^{-1}T\right)^* w^* = 0\,,\ \ w^* \in \overset{0}{H}(Q) \tag{17*}$$

и для разрешимости операторного уравнения (16) в пространстве $\overset{0}{H}(Q)$ необходимо и достаточно условие ортогональности правой части h подпространству решений сопряженной однородной задачи (17*). В частности, операторное уравнение (16) в пространстве $\overset{0}{H}(Q)$ имеет решение при любой h из $\overset{0}{H}(Q)$, если однородная задача (17) имеет только тривиальное решение $w \equiv 0$. Таким образом, из леммы 1 и утверждения 3 вытекает справедливость следующего утверждения.

Утверждение 5. *Пространство решений однородной задачи (17) конечномерно, его размерность совпадает с размерностью пространства решений однородной сопряженной задачи (17*). Любое решение однородной задачи (17) принадлежит* $\overset{0}{W}{}_2^1(Q)$. *Для того чтобы задача (13) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы для всех решений* w^* *однородной задачи (17*) выполнялось условие*

$$\left(L_0^{-1}\left(Tv + f - divF\right), w^*\right)_{\overset{0}{H}(Q)} = 0\,, \tag{18}$$

где v *– решение задачи (12).*

При этом существует единственное решение $w(x)$ *задачи (13), ортогональное (в* $\overset{0}{H}(Q)$*) всем решениям однородной задачи (17), и для него справедлива оценка*

$$\|w\|_{\overset{0}{H}(Q)} \le C\left(\|v\|_{U(Q)} + \|f\|_{\left[\overset{0}{H}_1(Q)\right]^*} + \|divF\|_{\left[\overset{0}{H}_1(Q)\right]^*}\right)$$

с не зависящей от v, f *и* F *постоянной.*

И наконец, исходя из вышеизложенного, сформулируем основной результат работы [11].

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (3), (5) - (8), (9) - (11) и* $u_0 \in L_2(\partial Q)$. *Тогда для того чтобы задача (1), (2) имела решение, необхо-*

димо и достаточно, чтобы для всех решений w^* однородной задачи (17) выполнялось условие (18), где v – решение задачи (12) с той же функцией u_0.*

Решение задачи (1), (2) принадлежит пространству $C_{n-1}(\bar{Q})$. При этом существует единственное решение задачи (1), (2) вида $u=v+w$, где w – решение задачи (13), ортогональное в $\overset{0}{H}(Q)$ всем решениям однородной задачи (17). Для этого решения справедлива оценка

$$\|u\|^2_{C_{n-1}(\bar{Q})}+\int_Q r|\nabla u|^2\,dx \le const\left(\|u_0\|^2_{L_2(\partial Q)}+\int_Q r^3\left(1+|\ln r|\right)^{3/2} f^2 dx+\right.$$

$$\left.+\int_Q r\left(1+|\ln r|\right)^{3/2}|F|^2\,dx\right), \qquad (19)$$

с не зависящей от u_0, f и F постоянной.

Если однородная задача $Lu=0$, $u\big|_{\partial Q}=0$, в $W_2^1(Q)$-постановке имеет только тривиальное решение, то решение неоднородной задачи (1), (2) в $W^1_{2,loc}(Q)$-постановке существует при всех u_0, f, F. Решение единственно и удовлетворяет неравенству (19).

В настоящей работе утверждается, что при естественных дополнительных ограничениях на коэффициенты при младших членах уравнения для правых частей из $W_2^{-1}(Q)$ условие (18) можно записать в более простом виде – в терминах исходной задачи, и при этом, если граничная функция допускает принадлежащее $W_2^1(Q)$ продолжение в область Q, то решение из $C_{n-1}(\bar{Q})$ является решением из $W_2^1(Q)$.

Итак, пусть коэффициенты $\bar{b}(x)$, $\bar{c}(x)$, $d(x)$ локально ограничены, удовлетворяют условиям:

$$\int_0 B^2(t)\,dt<\infty,\ \text{где}\ B(t)\equiv\sup_{r(x)\ge t}\left|\bar{b}(x)\right|, \qquad (20)$$

$$\int_0 C^2(t)\,dt<\infty,\ \text{где}\ C(t)\equiv\sup_{r(x)\ge t}\left|\bar{c}(x)\right|, \qquad (21)$$

$$\int_0 t^2D^2(t)\,dt<\infty,\ \text{где}\ D(t)\equiv\sup_{r(x)\ge t}\left|d(x)\right|, \qquad (22)$$

а функции f и F в правой части уравнения (1) удовлетворяют условию

$$f\in L_2(Q),\ F\in\left(L_2(Q)\right)^n. \qquad (23)$$

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть $\partial Q\in C^1$ и пусть выполнены условия (20) - (22). Тогда оператор T является линейным и ограниченным оператором из $\overset{0}{W}{}_2^1(Q)$ в $\overset{0}{W}{}_2^{-1}(Q)$.*

Замечание. В формулировке леммы 3 условие (20) можно заменить условием

$$\left|\bar{b}(x)\right| \le \frac{const}{r^{1/2}(x)},\ x \in Q.$$

Так как при выполнении условий (20) - (22) оператор T является вполне непрерывным оператором из $\overset{0}{W}{}_2^1(Q)$ в $\overset{0}{W}{}_2^{-1}(Q)$ (см. [14]), то из леммы 3 получаем справедливость следующего утверждения.

Теорема 3. *$L_0^{-1}T$ является линейным и ограниченным оператором, действующим из пространства $U(Q)$ в $\overset{0}{W}{}_2^1(Q)$, и является вполне непрерывным оператором, действующим из пространства $\overset{0}{W}{}_2^1(Q)$ в $\overset{0}{W}{}_2^1(Q)$.*

Из (23) очевидно, что $f - divF \in \overset{0}{W}{}_2^{-1}(Q)$. Так как $v \in U(Q)$, то в силу леммы 3 $Tv \in \overset{0}{W}{}_2^{-1}(Q)$. Таким образом, $g = Tv + f - divF \in \overset{0}{W}{}_2^{-1}(Q)$.

Далее, наряду с уравнением (15) рассмотрим соответствующее уравнение в пространстве $\overset{0}{W}{}_2^1(Q)$:

$$w - L_0^{-1}Tw = h,\ w \in \overset{0}{W}{}_2^1(Q). \tag{24}$$

Из леммы 3 следует справедливость следующего утверждения.

Утверждение 6. *Пусть w является решением операторного уравнения (15) в $\overset{0}{U}(Q)$ с $g \in \overset{0}{W}{}_2^{-1}(Q)$. Тогда w является решением операторного уравнения (24) в $\overset{0}{W}{}_2^1(Q)$ с $h = L_0^{-1}Tg$.*

Объединяя утверждение 2 и утверждение 6, получаем

Утверждение 7. *Пусть $\partial Q \in C^1$ и выполнены условия (3), (5), (6), (20) - (22). Для того чтобы функция w являлась решением задачи (13), необходимо и достаточно, чтобы функция w являлась решением операторного уравнения (24) в пространстве $\overset{0}{W}{}_2^1(Q)$ с правой частью $h = L_0^{-1}(Tv + f - -divF)$, где v – решение задачи (12).*

Таким образом, изучение разрешимости задачи Дирихле (1), (2) в $C_{n-1}(\bar{Q})$-постановке сведено к изучению разрешимости операторного уравнения (24) в гильбертовом пространстве $\overset{0}{W}{}_2^1(Q)$ с вполне непрерывным оператором $L_0^{-1}T$. В силу теоремы Фредгольма пространство решений соответствующего (24) однородного уравнения

$$w - L_0^{-1}Tw = 0,\quad w \in \overset{0}{W}{}_2^1(Q) \tag{25}$$

конечномерно, его размерность совпадает с размерностью пространства решений однородного сопряженного уравнения

$$w^* - \left(L_0^{-1}T\right)^* w^* = 0\,,\quad w^* \in \overset{0}{W}{}_2^1(Q) \qquad (25^*)$$

где $\left(L_0^{-1}T\right)^*$ – сопряженный (в пространстве $\overset{0}{W}{}_2^1(Q)$) к $L_0^{-1}T$ оператор, и для разрешимости операторного уравнения (24) в пространстве $\overset{0}{W}{}_2^1(Q)$ необходимо и достаточно условие ортогональности правой части h подпространству решений однородного сопряженного уравнения (25*).

В частности, операторное уравнение (24) в пространстве $\overset{0}{W}{}_2^1(Q)$ имеет решение при любой h из $\overset{0}{W}{}_2^1(Q)$, если однородное уравнение (25) в $\overset{0}{W}{}_2^1(Q)$ имеет только тривиальное решение $w \equiv 0$.

Таким образом, условия разрешимости в $C_{n-1}\left(\bar{Q}\right)$ исследуемой задачи можно записать в терминах скалярного произведения в пространстве $\overset{0}{W}{}_2^1(Q)$, что позволяет сформулировать эти условия в терминах исходной задачи.

Определим в $\overset{0}{W}{}_2^1(Q)$ скалярное произведение

$$(u,v)'_{\overset{0}{W}{}_2^1(Q)} = \int_Q \big(A(x)\nabla u(x), \nabla v(x)\big)dx\,, \qquad (26)$$

эквивалентное скалярному произведению

$$(u,v)_{\overset{0}{W}{}_2^1(Q)} = \int_Q \Big(u(x)v(x) + \big(\nabla u(x), \nabla v(x)\big)\Big)dx\,.$$

При таком скалярном произведении в пространстве $\overset{0}{W}{}_2^1(Q)$ сопряженный к $L_0^{-1}T$ оператор $\left(L_0^{-1}T\right)^*$ имеет следующий вид:

$$\left(L_0^{-1}T\right)^* = L_0^{-1}T_{L_2}^*\,, \qquad (27)$$

где через $T_{L_2}^*$ обозначен оператор ("сопряженный к оператору T в L_2"):

$$T_{L_2}^* u = -\left(\bar{c}, \nabla u\right) + div\left(\bar{b}u\right) - du\,,\ u \in \overset{0}{W}{}_2^1(Q)\,.$$

Заметим, что оператор $T_{L_2}^*$ обладает теми же свойствами, что и оператор T.

С учетом (27) сопряженное к (25) однородное уравнение (25*) запишется в следующем виде:

$$w^* - L_0^{-1}T_{L_2}{}^* w^* = 0\,,\quad w^* \in \overset{0}{W}{}_2^1(Q) \qquad (25^{**})$$

а это означает, что w^* является решением из $\overset{0}{W}{}_2^1(Q)$ соответствующей (13) однородной сопряженной задачи Дирихле

$$-div\left(A(x)\nabla w^*\right) + \left(\bar{c}(x), \nabla w^*\right) - div\left(\bar{b}(x)w^*\right) + d(x)w^* = 0, x \in Q, w^*\Big|_{\partial Q} = u_0.\ (13_0^*)$$

Из вышеизложенного и утверждения 7 вытекает справедливость следующего утверждения.

Утверждение 8. *Пусть $\partial Q \in C^1$ и выполнены условия (3), (5), (6), (20) - (22). Тогда пространство решений (из $\overset{0}{W}{}_2^1(Q)$) однородной сопряженной задачи (13_0^*) конечномерно, его размерность совпадает с размерностью пространства решений однородной задачи*

$$-div\left(A(x)\nabla w\right)+\left(\bar{b}(x),\nabla w\right)-div\left(\bar{c}(x)w\right)+d(x)w=0, x\in Q, w\Big|_{\partial Q}=u_0. \qquad (13_0)$$

Для того чтобы задача (13) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы для всех решений w^* однородной сопряженной задачи (13_0^*) выполнялось условие

$$\left(L_0^{-1}\left(Tv+f-divF\right),w^*\right)'_{\overset{0}{W}{}_2^1(Q)}=0, \qquad (28)$$

где v – решение задачи (12).

При этом существует единственное решение $w(x)$ задачи (13,) ортогональное (в скалярном произведении $(.,.)'_{\overset{0}{W}{}_2^1(Q)}$) всем решениям однородной задачи (13_0), и для него справедлива оценка

$$\|w\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(Q)}\le C\left(\|v\|_{U(Q)}+\|f\|_{L_2(Q)}+\|F\|_{L_2(Q)}\right),$$

с не зависящей от v, f и F постоянной.

Таким образом, учитывая (26) и объединяя вышеизложенные утверждения, для рассматриваемого случая теорему о разрешимости в $C_{n-1}\left(\bar{Q}\right)$ задачи (1), (2) можно сформулировать следующим образом.

Теорема 4. *Пусть $\partial Q \in C^1$, выполнены условия (3), (5), (6), (20) - (23) и пусть $u_0\in L_2(\partial Q)$. Тогда для того чтобы задача (1), (2) в $C_{n-1}\left(\bar{Q}\right)$-постановке имела решение, необходимо и достаточно, чтобы функции f, F удовлетворяли условию*

$$\int_Q f(x)w_k^*(x)dx+\int_Q\left(F(x),\nabla w_k^*(x)\right)dx=\int_Q\left(\bar{b}(x),\nabla v(x)\right)\nabla w_k^*(x)dx+$$
$$+\int_Q\left(\bar{c}(x)v(x),\nabla w_k^*(x)\right)dx+\int_Q d(x)v(x)w_k^*(x)dx, k=1,\dots,p, \qquad (29)$$

где v – решение задачи (12), а $w_k^*(x), k=1,2,\dots,p$ – функции из $\overset{0}{W}{}_2^1(Q)$, образующие базис в пространстве решений однородной сопряженной задачи (13_0^*).

При этом существует единственное решение задачи (1), (2) вида

$$u=v+w, \qquad (30)$$

где w – решение задачи (13), ортогональное в $\overset{0}{W}{}_2^1(Q)$ (в скалярном произ-

ведении $(.,.)'_{\overset{0}{W}{}_2^1(Q)}$ *) всем решениям однородной задачи (13₀). Для этого решения справедлива оценка*

$$\|u\|^2_{C_{n-1}(\bar{Q})}+\int_Q r(x)\left|\nabla u(x)\right|^2 dx \le const\left(\|u_0\|^2_{L_2(\partial Q)}+\int_Q f^2(x)dx+\int_Q \left|F(x)\right|^2 dx\right),$$

с не зависящей от u_0, f *и* F *постоянной.*

Любое другое решение задачи (1), (2) получается добавлением к функции u *некоторого решения однородной задачи* (13_0).

Кроме того установлено, что для случая, когда граничная функция u_0 допускает принадлежащее $W_2^1(Q)$ продолжение в область Q, условие (29) является также необходимым и достаточным условием для разрешимости задачи (1), (2) в пространстве $W_2^1(Q)$. Точнее, имеет место следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть* $\partial Q\in C^1$, *выполнены условия (3), (5), (6), (20) - (23) и пусть* u_0 *допускает принадлежащее* $W_2^1(Q)$ *продолжение в область* Q. *Тогда для того чтобы задача (1), (2) имела решение в* $W_2^1(Q)$, *необходимо и достаточно, чтобы функции* f, F *удовлетворяли условию (29). При этом для решения задачи (1), (2) вида (30) справедлива оценка*

$$\|u\|^2_{W_2^1(Q)} \le const\left(\|u_0\|_{L_2(\partial Q)}+\left(\int_Q f^2(x)dx\right)^{1/2}+\left(\int_Q \left|F(x)\right|^2 dx\right)^{1/2}\right),$$

где постоянная не зависит от u_0, f, F.

Замечание. Задача Дирихле (1), (2) в $W_2^1(Q)$-постановке подробно изучена, и хорошо известны соответствующие условия разрешимости (см. например [15, 3]). При этом, как обычно для задачи в $W_2^1(Q)$-постановке (см. например [15]), для коэффициентов при младших членах уравнения (1) предполагается выполнение дополнительного условия

$$\left\|\sum_{i=1}^n b_i^2, \sum_{i=1}^n c_i^2, d\right\|_{L_{q/2}} <\infty, q>n. \qquad (31)$$

Заметим только, что из условий (20) – (22) не следует выполнения условия (31).

Ереванский государственный университет
e-mail: duman@ysu.am

В. Ж. Думанян

О разрешимости задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка

Рассматривается задача Дирихле в ограниченной области $Q\subset R_n$ для общего эллиптического уравнения второго порядка, в которой граничное значение решения понимается как предел в L_2 его следов на «параллельных» границе поверхностях. В предыдущих работах автора при естественных ограничениях на коэффициенты уравнения получены необходимые и достаточные условия существования $(n-1)$-мерно непрерывного решения исследуемой задачи. Эти условия сформулированы в терминах вспомогательного операторного уравнения в специальном гильбертовом пространстве и трудно проверяемы. В настоящей работе для несколько более узкого класса правых частей получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи в терминах исходной задачи. При этом установлено, что если дополнительно потребовать принадлежность граничной функции пространству $W_2^{1/2}(\partial Q)$, то полученные условия перейдут в условия разрешимости в $W_2^1(Q)$.

Վ. Ժ. Դումանյան

Երկրորդ կարգի էլիպսական հավասարումների համար Դիրիխլեի խնդրի լուծելիության մասին

Երկրորդ կարգի էլիպսական հավասարումների համար $Q \subset R_n$ սահմանափակ տիրույթում դիտարկվում է Դիրիխլեի խնդիր, որտեղ լուծման եզրային արժեքը հասկացվում է որպես եզրին «զուգահեռ» մակերևույթների վրա լուծման հետքերի սահմանը L_2-ում: Հեղինակի նախորդ աշխատանքներում, հավասարման գործակիցների վրա բնական սահմանափակումների դեպքում, ստացվել են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ ուսումնասիրվող խնդրի $(n-1)$-չափանի անընդհատ լուծման գոյության համար: Այս պայմանները ձևակերպված են հատուկ հիլբերտյան տարածությունում օժանդակ օպերատորային հավասարման տերմիններով և դժվար ստուգվող են: Տվյալ աշխատանքում աջ մասերի որոշակի նեղ դասի համար ստացվել են խնդրի լուծելիության անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, որոնք ձևակերպված են սկզբնական տրված խնդրի տերմիններով: Ընդ որում ցույց է տրված, որ եթե լրացուցիչ պահանջվի եզրային ֆունկցիայի պատկանելիությունը $W_2^{1/2}(\partial Q)$-ին, ապա ստացված պայմանները վերածվում են $W_2^1(Q)$-ում լուծելիության պայմանների:

V. Zh. Dumanyan

On Solvability of the Dirichlet Problem for the Second-Order Elliptic Equation

The Dirichlet problem in a bounded domain $Q \subset R_n$ for a general second-order elliptic equation in which the boundary value of a solution is treated as the limit in L_2 of its traces on the surfaces that are "parallel" to the boundary, is considered. In the author's previous papers necessary and sufficient conditions for the existence of an $(n-1)$-dimensionally continuous solution were obtained under some natural assumptions on the equation coefficients. These assumptions are formulated in terms of an auxiliary operator equation in a special Hilbert space and are difficult to verify. In the present work necessary and sufficient conditions for the existence of a solution in terms of the original problem for a more narrow class of the right-hand sides are

obtained. It is shown that if in addition the boundary function is required to belong to $W_2^{1/2}(\partial Q)$ then obtained conditions transform into conditions of solvability in $W_2^1(Q)$.

Литература

1. *Михайлов В. П.* - Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12. N 10. С. 1877 - 1891.
2. *Михайлов В. П.* - Матем. заметки. 1980. Т. 27. N 1. С. 137 - 145.
3. *Михайлов В. П.* - Дифференциальные уравнения в частных производных. М. Наука. 1983.
4. *Богоявленский О. И., Владимиров В. С., Волович И. В., Гущин А. К., Дрожжинов Ю. Н., Жаринов В. В., Михайлов В. П.* - Тр. МИАН. М. Наука. 1986. Т. 175. С. 63 - 102.
5. *Гущин А. К.* - Матем. сб. 1988. 137(179):1(9). С. 19 - 64.
6. *Гущин А. К., Михайлов В. П.* - Матем. сб. 1991. Т. 182. N 6. С. 787 - 810.
7. *Гущин А. К.* - ТМФ. 2013. Т. 174. N 2. С. 243 - 255.
8. *Гущин А. К.* - Матем. сб. 2012. Т. 203. N 1. С. 3 - 30.
9. *Думанян В. Ж.* - Изв. НАН Армении. Математика. 2010. Т. 45. N 1. С. 31 - 52.
10. *Dumanian V. Zh.* - Note Di Matematica. 2002/2003. 21:2. 99 - 118.
11. *Думанян В. Ж.* – Матем. сб. 2011. Т. 202. N 7. С. 75 - 94.
12. *Думанян В. Ж.* - Доклады РАН. 2011. Т. 436. N. 2. С. 159 - 162.
13. *Михайлов В. П., Гущин А. К.* - Дополнительные главы курса "Уравнения математической физики". Лекционные курсы НОЦ. Вып.7. Математический ин-т им. В.А.Стеклова РАН (МИАН). М. МИАН. 2007.
14. *Dumanyan V. Zh.* - Proceedings of the Yerevan State University. 2011. N. 2. P. 17 - 21.
15. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* - Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М. Наука. 1964. 540 с.