ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 114 2014 № 2

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ

УДК 539.3

Член-корреспондент НАН РА А. С. Аветисян, А. А. Камалян

О распространении электроупругого сдвигового сигнала в неоднородном пьезодиэлектрическом слое класса 6mm

(Представлено 13/ IV 2014)

Ключевые слова: *электроупругий сдвиговой волновой сигнал, неоднородный пьезоэлектрический слой, характер распределения волны по толщине слоя.*

В связи с широким применением различных конструкционных элементов, изготовленных из композитных материалов, в современной технике все более актуальным становится изучение вопросов распространения волн в неоднородных средах. При распространении волнового сигнала в среде ее неоднородность приводит к рассеиванию волновой энергии, или диссипации волны, или изменению дисперсии распространяющейся волны. Амплитуда и фаза распространяющегося волнового сигнала становятся функциями координат и времени, которые связаны между собой нелинейными дифференциальными соотношениями.

Тем самым усложняется решение задачи распространения волнового сигнала уже в неоднородных упругих средах. В настоящее время более актуальны задачи связанных физических полей; особое значение имеют проблемы, касающиеся взаимодействия механической и электромагнитной связанных полей в неоднородных средах, где учет сопряженности механических и электромагнитных полей (пьезоэлектрический эффект, электрострακция и др.) еще более усложняет проблему. В [1–3] и др. исследуется распространение волн типа Лява в случае неоднородного тонкого пьезоэлектрического слоя.

В данной работе рассматривается распространение электроупругого монохроматического сигнала в неоднородном пьезодиэлектрике гексагональной симметрии (класс $6mm$), отнесенном к системе координат $oxyz$, где координатная ось oz параллельна оси симметрии пьезокристалла, а плоскость xoy есть неоднородная плоскость изотропии материала (рис. 1). В этой плоскости задача электроупругости разделяется на плоское деформированное неэлектроактивное и электроактивное антиплоское состояния.

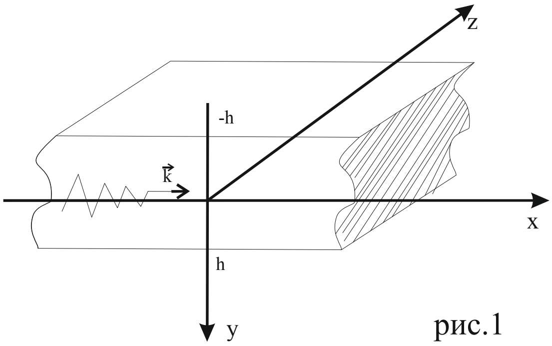

рис.1

Исходя из этого нами исследовано распространение горизонтально поляризованных (*SH*) электроупругих монохроматических волн, вектор которых представляется двумя компонентами

$$\{\vec{u}, \Phi\} = \{0; 0; w(x, y, t); \ \Phi(x, y, t)\}. \tag{1}$$

Запишем уравнения разделенного антиплоского электроупругого состояния в векторном виде

$$\operatorname{div}\vec{\sigma} = \rho(x, y)w; \ \operatorname{div}\vec{D} = 0; \ \vec{E} = -\operatorname{grad}\Phi. \tag{2}$$

Механические напряжения σ_{zx}, σ_{zx} и компоненты вектора электрической индукции D_x, D_y для неоднородного по плоскости xoy пьезоэлектрика указанной симметрии будут

$$\sigma_{zx} = G(x, y)w_{,x} - e(x, y)\Phi_{,x}, \ \sigma_{zy} = G(x, y)w_{,y} - e(x, y)\Phi_{,y},$$
$$D_x = e(x, y)w_{,x} - \varepsilon(x, y)\Phi_{,x}, \ D_y = e(x, y)w_{,y} - \varepsilon(x, y)\Phi_{,y}, \tag{3}$$

с учетом которых уравнения (2) можно привести к следующему виду:

$$G(x, y)\nabla^2 w(x, y, t) + \operatorname{grad}G(x, y)\operatorname{grad}w(x, y, t) -$$
$$-e(x, y)\nabla^2\Phi(x, y, t) - \operatorname{grad}e(x, y)\operatorname{grad}\Phi(x, y, t) = \rho(x, y)\ddot{w}(x, y, t),$$
$$e(x, y)\nabla^2 w(x, y, t) + \operatorname{grad}e(x, y)\operatorname{grad}w(x, y, t) -$$
$$-\varepsilon(x, y)\nabla^2\Phi(x, y, t) - \operatorname{grad}\varepsilon(x, y)\operatorname{grad}\Phi(x, y, t) = 0. \tag{4}$$

Очевидно, что в отличие от случая однородного пьезодиэлектрика простой симметрии класса $6mm$ уравнения сдвиговой деформации и электростатики уже не разделяются. Но если предполагать, что диэлектрическая проницаемость и пьезоэлектрический модуль в неоднородном пьезокристалле меняются идентичным образом, т. е. $e(x, y) = a_0\varepsilon(x, y)$, то получим

$$\nabla^2 w(x, y, t) + \frac{\operatorname{grad}f(x, y)}{f(x, y)}\operatorname{grad}w(x, y, t) = \frac{1}{C^2(x, y)}\ddot{w}(x, y, t),$$
$$\nabla^2\psi(x, y, t) + \frac{\operatorname{grad}\varepsilon(x, y)}{\varepsilon(x, y)}\operatorname{grad}\psi(x, y, t) = 0, \tag{5}$$

где $f(x, y) = G(x, y) + a_0 e(x, y) -$ приведенный коэффициент жесткости сдвига пьезодиэлектрика, зависящий от координат, и следовательно $C^2(x, y) =$

$= \dfrac{f(x,y)}{\rho(x,y)}$ – квадрат скорости сдвиговой волны, изменяющийся от координат точки, $\psi(x,y,t) = \Phi(x,y,t) - a_0 w(x,y,t)$ – введенная функция электрической индукций, a_0 – введенная постоянная.

Зависимость физических характеристик от координат точки, естественно, приведет к изменению амплитуды и фазы распространяющегося волнового сигнала. Тогда возьмем решения уравнений (5) в виде монохроматической волны

$$\begin{Bmatrix} w(x,y,t) \\ \psi(x,y,t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_w(x,y) \\ A_\psi(x,y) \end{Bmatrix} \exp i \left[\begin{Bmatrix} \varphi_w(x,y) \\ \varphi_\psi(x,y) \end{Bmatrix} - \omega t \right]. \tag{6}$$

Здесь $A_w(x,y)$ и $A_\psi(x,y)$ – амплитуды, а $\varphi_w(x,y)$ и $\varphi_\psi(x,y)$ – укороченные фазы монохроматических волн.

С учетом (6) из (5), используя также обозначение $U(x,y) = \ln A(x,y)$, после несложных преобразований находим системы уравнений, которым должны удовлетворять меняющиеся амплитуды $A_w(x,y)$, $A_\psi(x,y)$ и фазы $\varphi_w(x,y)$, $\varphi_\psi(x,y)$ распространяющейся электроупругой волны:

$$\left(\operatorname{grad} U_w\right)^2 - \left(\operatorname{grad} \varphi_w\right)^2 + \nabla^2 U_w + \frac{\operatorname{grad} f(x,y)}{f(x,y)} \operatorname{grad} U_w + \frac{\omega^2}{C^2(x,y)} = 0,$$

$$2 \operatorname{grad} U_w \cdot \operatorname{grad} \varphi_w + \nabla^2 \varphi_w + \frac{\operatorname{grad} f(x,y)}{f(x,y)} \operatorname{grad} \varphi_w = 0, \tag{7}$$

$$\left(\operatorname{grad} U_\psi\right)^2 - \left(\operatorname{grad} \varphi_\psi\right)^2 + \nabla^2 U_\psi + \frac{\operatorname{grad} \varepsilon(x,y)}{\varepsilon(x,y)} \operatorname{grad} U_\psi = 0,$$

$$2 \operatorname{grad} U_\psi \cdot \operatorname{grad} \varphi_\psi + \nabla^2 \varphi_\psi + \frac{\operatorname{grad} \varepsilon(x,y)}{\varepsilon(x,y)} \operatorname{grad} \varphi_\psi = 0. \tag{8}$$

Волновые поля для упругого сдвига и электрического потенциала, характеризующие распространяющийся монохроматический сигнал, представятся через точные решения полученных систем нелинейных уравнений [4] (1.7) и (1.8) в виде:

$$w(x,y,t) = \exp\left[U_w(x,y) + i\varphi_w(x,y) - i\omega t\right],$$

$$\Phi(x,y,t) = \exp\left[U_\psi(x,y) + i\varphi_\psi(x,y) - i\omega t\right] + a_0 w(x,y,t). \tag{9}$$

Если аналогично гармонической волне (6) для укороченных фаз монохроматических волн $\varphi_w(x,y)$ и $\varphi_\psi(x,y)$ ввести вектор $\vec{k} = \operatorname{grad}\varphi$, то этот вектор также будет функцией координат x и y как по величине, так и по направлению.

Таким образом, задача о распространении монохроматических волн в неоднородной пьезоэлектрической среде приводится к решению систем нелинейных дифференциальных уравнений типа (7) и (8) относительно амплитуд и фаз волны.

Для общности предположим, что неоднородный пьезодиэлектрический слой отнесен к системе декартовых координат таким образом, что занимает область $\{|x|<\infty,\ |y|\le h;\ |z|<\infty\}$. Тогда для удовлетворения граничных условий на поверхностях $y=\pm h$, с учетом того, что все физические характеристики материала являются функциями координат x, y, при разных сочетаниях электромеханических условий на указанных границах, кроме выражений упругого сдвига и электрического потенциала (9), будем пользоваться соотношениями (3)

$$\sigma_{zx}=G(x,y)w_{,x}-e(x,y)\Phi_{,x},\ \sigma_{zy}=G(x,y)w_{,y}-e(x,y)\Phi_{,y},$$
$$D_x=e(x,y)w_{,x}-\varepsilon(x,y)\Phi_{,x},\ D_y=e(x,y)w_{,y}-\varepsilon(x,y)\Phi_{,y}.$$

Естественно, что все физические характеристики материала $G(x,y)$, $\rho(x,y)$, $\varepsilon(x,y)$ и $e(x,y)$, являющиеся функциями координат x, y, должны удовлетворять некоторым численным условиям. Жесткость упругого сдвига и плотность материала должны быть положительными: $G(x,y)>0$, $\rho(x,y)>0$, и относительная диэлектрическая проницаемость материала может быть только больше единицы: $\varepsilon(x,y)>1$, а пьезоэлектрический модуль $e(x,y)=a_0\varepsilon(x,y)$ за счет выбора введенной постоянной может быть отрицательным или принимать также значение нуль: $a_0\le 0$, что будет соответствовать непьезоактивному диэлектрику.

При решении динамических задач электроупругости в квазистатической постановке в практике пользуются условиями механически открытых или закрытых, а также электрически открытых или закрытых на поверхностях тел. Так что при исследовании распространения электроупругого сдвигового сигнала в неоднородном пьезодиэлектрическом слое на поверхностях $y=\pm h$ неоднородного пьезодиэлектрического слоя можем рассматривать разные сочетания электромеханических граничных условий:

а) Поверхности $y=\pm h$ неоднородного пьезодиэлектрического слоя механически и электрически закрытые. Тогда на поверхностях будем иметь

$$w(x,\pm h,t)=0,\ \Phi(x,\pm h,t)=0 \tag{10}$$

или с учетом выражений для упругого сдвига и электрического потенциала

$$\exp\left[U_w(x,\pm h)+i\varphi_w(x,\pm h)\right]=0,$$
$$\exp\left[U_\psi(x,\pm h)+i\varphi_\psi(x,\pm h)\right]+a_0 w(x,\pm h)=0. \tag{11}$$

б) Поверхности $y=\pm h$ неоднородного пьезодиэлектрического слоя механически и электрически открытые. Тогда на поверхностях будем иметь

$$\sigma_{zy}(x,\pm h,t)=0,\ D_y(x,\pm h,t)=0 \tag{12}$$

или с учетом выражений (3) для механического напряжения $\sigma_{zy}(x,\pm h,t)=0$ и электрической индукции $D_y(x,\pm h,t)=0$

$$G(x,\pm h)w_{,y}(x,\pm h)-e(x,\pm h)\Phi_{,y}(x,\pm h)=0,$$
$$e(x,\pm h)w_{,y}(x,\pm h)-\varepsilon(x,\pm h)\Phi_{,y}(x,\pm h)=0. \tag{13}$$

в) Поверхность $y=-h$ неоднородного пьезодиэлектрического слоя механически и электрически открытая, а поверхность $y=+h$ неоднородного пьезодиэлектрического слоя механически и электрически закрытая. Тогда на поверхностях будем иметь

$$\begin{gathered}
G(x,-h)w_{,y}(x,-h)-e(x,-h)\Phi_{,y}(x,-h)=0,\\
e(x,-h)w_{,y}(x,-h)-\varepsilon(x,-h)\Phi_{,y}(x,-h)=0,\\
\exp\left[U_w(x,+h)+i\varphi_w(x,+h)\right]=0, \qquad (14)\\
\exp\left[U_\psi(x,+h)+i\varphi_\psi(x,+h)\right]+a_0w(x,+h)=0.
\end{gathered}$$

г) Поверхности $y=\pm h$ неоднородного пьезодиэлектрического слоя механически открытые, в то же время одна поверхность $y=-h$ неоднородного пьезодиэлектрического слоя электрически открытая, а другая поверхность $y=+h$ неоднородного пьезодиэлектрического слоя электрически закрытая. Тогда на поверхностях будем иметь

$$\begin{gathered}
G(x,\pm h)w_{,y}(x,\pm h)-(x,\pm h)\Phi_{,y}(x,\pm h)=0,\\
e(x,-h)w_{,y}(x,-h)-\varepsilon(x,-h)\Phi_{,y}(x,-h)=0, \qquad (15)\\
\exp\left[U_\psi(x,+h)+i\varphi_\psi(x,+h)\right]+a_0w(x,+h)=0.
\end{gathered}$$

д) Поверхности $y=\pm h$ неоднородного пьезодиэлектрического слоя механически открытые и электрически закрытые. Тогда на поверхностях будем иметь

$$\begin{gathered}
G(x,\pm h)w_{,y}(x,\pm h)-e(x,\pm h)\Phi_{,y}(x,\pm h)=0, \qquad (16)\\
\exp\left[U_\psi(x,\pm h)+i\varphi_\psi(x,\pm h)\right]+a_0w(x,\pm h)=0.
\end{gathered}$$

е) Поверхности $y=\pm h$ неоднородного пьезодиэлектрического слоя механически закрытые и электрически открытые. Тогда на поверхностях будем иметь

$$\begin{gathered}
\exp\left[U_\psi(x,\pm h)+i\varphi_\psi(x,\pm h)\right]+a_0w(x,\pm h)=0, \qquad (17)\\
e(x,\pm h)w_{,y}(x,\pm h)-\varepsilon(x,\pm h)\Phi_{,y}(x,\pm h)=0.
\end{gathered}$$

ж) Поверхности $y=\pm h$ неоднородного пьезодиэлектрического слоя механически закрытые, в то же время одна поверхность $y=-h$ неоднородного пьезодиэлектрического слоя электрически открытая, а другая поверхность $y=+h$ неоднородного пьезодиэлектрического слоя электрически закрытая. Тогда на поверхностях будем иметь

$$\begin{gathered}
\exp\left[U_w(x,\pm h)+i\varphi_w(x,\pm h)\right]=0,\\
e(x,-h)w_{,y}(x,-h)-\varepsilon(x,-h)\Phi_{,y}(x,-h)=0, \qquad (18)\\
\exp\left[U_\psi(x,+h)+i\varphi_\psi(x,+h)\right]+a_0w(x,+h)=0.
\end{gathered}$$

и) Поверхности $y=\pm h$ неоднородного пьезодиэлектрического слоя электрически закрытые, в то же время одна поверхность $y=-h$ неоднородного пьезодиэлектрического слоя механически открытая, а другая поверхность $y=+h$ неоднородного пьезодиэлектрического слоя механически закрытая. Тогда на поверхностях будем иметь

$$\begin{gathered}\exp\left[U_{\psi}(x,\pm h)+i\varphi_{\psi}(x,\pm h)\right]+a_0 w(x,\pm h)=0,\\ G(x,-h)w_{,y}(x,-h)-e(x,-h)\Phi_{,y}(x,-h)=0,\\ \exp\left[U_{w}(x,+h)+i\varphi_{w}(x,+h)\right]=0.\end{gathered}\tag{19}$$

й) Поверхности $y=\pm h$ неоднородного пьезодиэлектрического слоя электрически открытые, в то же время одна поверхность $y=-h$ неоднородного пьезодиэлектрического слоя механически открытая, а другая поверхность $y=+h$ неоднородного пьезодиэлектрического слоя механически закрытая. Тогда на поверхностях будем иметь

$$\begin{gathered}e(x,\pm h)w_{,y}(x,\pm h)-\varepsilon(x,\pm h)\Phi_{,y}(x,\pm h)=0,\\ G(x,-h)w_{,y}(x,-h)-e(x,-h)\Phi_{,y}(x,-h)=0,\\ \exp\left[U_{w}(x,+h)+i\varphi_{w}(x,+h)\right]=0.\end{gathered}\tag{20}$$

к) Одна поверхность $y=-h$ неоднородного пьезодиэлектрического слоя механически открытая и электрически закрытая, а другая поверхность $y=+h$ неоднородного пьезодиэлектрического слоя механически закрытая и электрически открытая. Тогда на поверхностях будем иметь

$$\begin{gathered}G(x,-h)w_{,y}(x,-h)-e(x,-h)\Phi_{,y}(x,-h)=0,\\ \exp\left[U_{\psi}(x,-h)+i\varphi_{\psi}(x,-h)\right]+a_0 w(x,-h)=0,\\ \exp\left[U_{w}(x,+h)+i\varphi_{w}(x,+h)\right]=0,\\ e(x,+h)w_{,y}(x,+h)-\varepsilon(x,+h)\Phi_{,y}(x,+h)=0.\end{gathered}\tag{21}$$

Очевидно, что если на границах раздела пьезодиэлектрическая среда граничит с вакуумом, то электрическое поле просачивается во внешнее полупространство и вместо условий электрически закрытой или электрически открытой границы

$$G(x,\pm h)w_{,y}(x,\pm h)-e(x,\pm h)\Phi_{,y}(x,\pm h)=0$$

на соответствующих поверхностях будем иметь условия непрерывности электрического поля с полем во внешней среде:

$$\begin{gathered}\exp\left[U_{\psi}(x,\pm h)+i\varphi_{\psi}(x,\pm h)\right]+a_0 w(x,\pm h)=\exp\left[U_{\psi}^{(e)}(x,\pm h)+i\varphi_{\psi}^{(e)}(x,\pm h)\right],\\ e(x,\pm h)w_{,y}(x,\pm h)-\varepsilon(x,\pm h)\Phi_{,y}(x,\pm h)=-\varepsilon^{(e)}(x,\pm h)\Phi_{,y}^{(e)}(x,\pm h).\end{gathered}\tag{22}$$

Если же пьезодиэлектрическая среда граничит с другой неоднородной пьезодиэлектрической средой, то тогда в обеих средах решаются системы нелинейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами (7) и (8) по отношению к амплитудам упругого сдвига и электрического потенциала $A_w(x,y)$, $A_{\psi}(x,y)$, а также фазам $\varphi_w(x,y)$, $\varphi_{\psi}(x,y)$ распространяющейся электроупругой волны и на соответствующих поверхностях будем иметь условия непрерывности электрического и механического полей. Условия непрерывности в этих случаях соответственно примут вид:

$$
\begin{gathered}
\exp\left[U^{(1)}{}_{\psi}\left(x,\pm h\right)+i\varphi^{(1)}{}_{\psi}\left(x,\pm h\right)\right]+a^{(1)}{}_{0}w^{(1)}\left(x,\pm h\right)= \\
=\exp\left[U_{\psi}^{(2)}\left(x,\pm h\right)+i\varphi_{\psi}^{(2)}\left(x,\pm h\right)\right]+a^{(2)}{}_{0}w^{(2)}\left(x,\pm h\right), \\
G^{(1)}\left(x,\pm h\right)w^{(1)}{}_{,y}\left(x,\pm h\right)-e^{(1)}\left(x,\pm h\right)\Phi^{(1)}{}_{,y}\left(x,\pm h\right)= \\
=G^{(2)}\left(x,\pm h\right)w^{(2)}{}_{,y}\left(x,\pm h\right)-e^{(2)}\left(x,\pm h\right)\Phi^{(2)}{}_{,y}\left(x,\pm h\right), \\
e^{(1)}\left(x,\pm h\right)w^{(1)}{}_{,y}\left(x,\pm h\right)-\varepsilon^{(1)}\left(x,\pm h\right)\Phi^{(1)}{}_{,y}\left(x,\pm h\right)= \\
=e^{(2)}\left(x,\pm h\right)w^{(2)}{}_{,y}\left(x,\pm h\right)-\varepsilon^{(2)}\left(x,\pm h\right)\Phi_{,y}^{(2)}\left(x,\pm h\right), \\
w^{(1)}\left(x,\pm h,t\right)=w^{(2)}\left(x,\pm h,t\right).
\end{gathered}
\tag{23}
$$

Таким образом, задача распространения электроупругого сдвигового сигнала в неоднородном пьезодиэлектрическом слое приводится к решению системы нелинейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами (7) и (8) по отношению к амплитудам упругого сдвига и электрического потенциала $A_w\left(x,y\right)$, $A_\psi\left(x,y\right)$, а также фазам $\varphi_w\left(x,y\right)$, $\varphi_\psi\left(x,y\right)$ распространяющейся электроупругой волны, с учетом обозначения $U\left(x,y\right)=\ln A\left(x,y\right)$ и представлений (6). Граничные условия (10) - (22) в каждой конкретной задаче, с учетом (6) и (9), также следует представить через амплитуды упругого сдвига и электрического потенциала $A_w\left(x,y\right)$, $A_\psi\left(x,y\right)$, а также через фазы $\varphi_w\left(x,y\right)$, $\varphi_\psi\left(x,y\right)$ распространяющейся электроупругой волны.

Институт механики НАН РА
Ереванский государственный университет

Член-корреспондент НАН РА А. С. Аветисян, А. А. Камалян

О распространении электроупругого сдвигового сигнала в неоднородном пьезодиэлектрическом слое класса *6mm*

Рассматривается постановка задачи о распространении электроупругого монохроматического сигнала в неоднородном пьезодиэлектрике гексагональной симметрии (класс $6mm$). Задача приводится к решению системы нелинейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами по отношению к амплитудам упругого сдвига и электрического потенциала, а также фазам распространяющейся электроупругой волны. Граничные условия в каждой конкретной задаче также представляются через амплитуды упругого сдвига и электрического потенциала.

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ա. Ս. Ավետիսյան, Ա. Ա. Քամալյան

Սահքի էլեկտրաառաձգական ազդանշանի տարածումը 6 *mm* պիեզոդիէլեկտրիկ անհամասեռ շերտում

Դիտարկվում է հեքսոգոնալ համաչափությամբ ($6mm$ դասի) անհամասեռ պիեզոդիէլեկտրիկում էլեկտրաառաձգական մոնոխրոմատիկ ազդանշանի տարածման խնդդիրը: Խնդիրը բերվում է տարածվող էլեկտրաառաձգական ալիքի փուլերի, ինչպես նաև առաձգական սահքի և էլեկտրական պոտենցիալի ամպլիտուդաների նկատմամբ փոփոխական գործակիցներով ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի լուծմանը: Եզրային պայմանները ամեն մի կոնկրետ խնդրում նույնպես ներկայացվում են առաձգական սահքի և էլեկտրական պոտենցիալի ամպլիտուդների միջոցով:

Corresponding member of NAS RA A. S. Avetisyan, A. A. Kamalyan

On Propagation of Electroelastic Shear Wave in 6mm Class Piezodielectric Inhomogeneous Layer

The statement of the problem of electroelastic monochromatic signal propagation in inhomogeneous dielectric media was considered. The problem is put into the solution of nonlinear differential equations system with coefficients depending on amplitudes of elastic shear strain and electrical potential and depending on propagating electroelastic wave phase too. Boundary conditions in any particular case also depend on amplitudes of elastic shear strain and electrical potentials.

Литература

1. *Аветисян А. С.* - Изв. АН АрмССР. Механика. 1987. Т. 40. № 1. С. 24–29.
2. *Bakirtas I., Maugin G. A.* - Journal de Mechanique Theoretique et Appliquee. 1982. V. 1. № 6. P. 995–1013.
3. *Bhattacharya S. N.* - Pure and Appl. Geophysics. 1972. V. 93. № 1. P. 19–35
4. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т.1. М.–Л. ГИТТЛ. 1951. 476 с.