ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր
Том 114 2014 № 2
Volume

МАТЕМАТИКА

УДК 517.55

Г. А. Карагулян, К. Р. Мурадян

О расходимости треугольных и секторных сумм двойных рядов Фурье

(Представлено академиком Г. Г. Геворкяном 4/IV 2014)

Ключевые слова: *двойные ряды Фурье, треугольные суммы, расходимость почти всюду.*

Карлесон [1] доказал, что частичные суммы тригонометрического ряда Фурье любой функции $f \in L^2(T)$ сходятся почти всюду (п.в.). Усовершенствовав метод Карлесона, Хант [2], Шелин [3] и Антонов [4] установили, что свойство сходимости п.в. рядов Фурье сохраняется и в более широких классах функций. Аналогичные задачи исследованы также для кратных рядов Фурье. Если функция $f \in L^1(T^2)$ имеет двойной ряд Фурье

$$f(x,y) \sim \sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} c_{nm} e^{i(nx+my)}$$

и $G \subset \mathbb{R}^2$ есть некоторая область, то обозначим

$$S_G(x,y,f) = \sum_{(n,m)\in G} c_{nm} e^{i(nx+my)} .$$

Пусть $P \subset \mathbb{R}^2$ есть произвольная открытая многоугольная область, содержащая начало координат, и пусть $\lambda P = \{(\lambda x, \lambda y) : (x,y) \in P\}, \lambda > 0$. Фефферман [5] доказал, что частичные суммы $S_{\lambda P}(x,y,f)$ любой функции $f \in L^p(T^2)$, $p > 1$, сходятся п.в. при $\lambda \to \infty$. В случае когда P прямоугольник, Шелин [3] доказал аналогичное для более широкого класса функций $L(\log L)^3 \log\log L$, а если $P-$ квадрат, то свойство сходимости п.в. сохраняется также в $L(\log L)^2 \log\log L$. Уточнив второй результат Шелина, в работе [4] Антонов установил сходимость п.в. квадратных сумм рядов Фурье в классе $L(\log L)^2 \log\log\log L$. Тевзадзе [6] показал, что для любой последовательности прямоугольников $R_1 \subset R_2 \subset R_3 \subset \ldots$, стороны которых параллельны осям координат и $\bigcup_k R_k = \mathbb{R}^2$, частичные суммы $S_{R_k}(x,y,f)$ любой функции $f \in L^2(\mathrm{T}^2)$ сходятся п.в. Заметим, что во всех упомянутых результатах последовательности частичных сумм зависят от одного параметра, а в их доказательствах используются теорема Карлесона или другие одномерные результаты.

Иными свойствами обладают частичные суммы

$$S_{NM}(x,y,f) = \sum_{|n|\le \mathrm{N}, m\le M} c_{nm} e^{i(nx+my)}\ , \tag{1}$$

где областями суммирования являются произвольные прямоугольники, стороны которых параллельны осям координат. Фефферман [7] построил пример непрерывной функции $f \in C(\mathrm{T}^2)$, для которой суммы (1) расходятся всюду при $N,M \to \infty$.

Отметим, что в вышеприведенных теоремах сходимости двойных рядов Фурье рассматриваются многоугольники, стороны которых параллельны фиксированным направлениям. Оказывается, что это тоже является важным обстоятельством в этих теоремах. Цель настоящей работы – установить, что при незначительной свободе направлений сторон суммирующих многоугольных областей получится расходимость п. в. Мы рассматриваем области следующих видов:

$$\Delta(a,b) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : a|u| + b|v| \le 1\}, a,b > 0, \tag{2}$$

$$V(\alpha,\beta) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : |x| = r\cos\theta, |\mathrm{y}| = \mathrm{r}\sin\theta, r \ge 0, \alpha \le \theta \le \beta\}, \tag{3}$$
$$0 \le \alpha < \beta \le \pi/2.$$

Если Δ есть некоторая область вида (2), с параметрами (a,b), то обозначим

$$\rho(\Delta) = \frac{\max\{a,b\}}{\min\{a,b\}}.$$

Для произвольной пары $(a,\ b)$ это есть ромб, а если $a = b$ или, что то же самое, $\rho(\Delta) = 1$, то получается квадрат. Отметим, что двойной ряд Фурье (1) можно записывать в вещественной форме (по синусам и косинусам). Тогда суммы двойного ряда Фурье (1) по областям (2) превращаются в треугольные в вещественном случае. Поэтому эти суммы называются треугольными. Аналогично, суммы по областям (3) назовем секторными. Если $G \subset \mathbb{R}^2$ есть некоторая область, то обозначим $G^+ = \{(x,y) \in G : x, y \ge 0\}$. Последовательность областей $G_k, k = 1,2,....,$ назовем полной, если $\bigcup_k G_k = \mathbb{R}^2$. Следующая теорема является следствием вышеупомянутого общего результата Феффермана [5], и, как отмечается в той же работе, она в то же время эквивалентна общей теореме.

Теорема A (Фефферман)**.** *Если* Δ_k, $\mathrm{k} = 1,2,...,$ *есть полная возрастающая последовательность квадратных областей вида (2)* $(\rho(\Delta_k) = 1)$*, то для любой функции* $f \in L^p(\mathrm{T}^2)$*,* $p > 1$ *, имеет место*

$$\lim_{k\to\infty} S_{\Delta_k}(x,y,f) = f(x,y)\, \textit{п.в}\ ,\textit{на}\ \mathrm{T}^2. \tag{4}$$

Установлены следующие теоремы. Первая из них показывает, что для произвольных областей вида (2) теорема A неверна. Более того, имеет место

Теорема 1. *Существуют функция* $f \in \bigcap_{p\geq 1} L^p(T^2)$ *и полная возрастающая последовательность областей* Δ_k, $k = 1, 2, ...,$ *вида (2) такие, что* $\rho(\Delta_k) \to 1$ *и имеет место соотношение*

$$\limsup_{k\to\infty} |S_{\Delta_k}(x, y, f)| = \infty \quad \text{п.в. на } \mathrm{T}^2.$$

Условие $\rho(\Delta_k) \to 1$ означает, что в бесконечности ромбы Δ_k "превращаются" в квадраты. Теорема 1 показывает, что все равно этого недостаточно для сохранения свойства сходимости (4). Теорема аналогичного характера имеет место также для секторных сумм.

Теорема 2. *Для любой возрастающей последовательности секторных областей* V_k, $k = 1, 2, ...,$ *существует функция* $f \in \bigcap_{p\geq 1} L^p(T^2)$ *такая, что*

$$\limsup_{k\to\infty} |S_{V_k}(x, y, f)| = \infty \quad \text{п.в. на } \mathrm{T}^2.$$

В доказательствах теорем используется техника из работы [8]. Основным ключом в доказательствах является следующая лемма.

Основная лемма. *Пусть* $p > 2$ *и* V_n, $n = 1, 2, ..., m$, *есть произвольная последовательность секторов. Тогда существуют двойные тригонометрические полиномы* T_n, $n = 1, 2, ..., m$, *такие, что*

$$T_n(x, y) = \sum_{(t,s)\in D_n} c_{ts} e^{i(tx+sy)}, \quad D_n \subset V_n^+,$$

$$\left\| \sum_{n=1}^{m} T_n(x, y) \right\|_p \leq c_1,$$

$$\left| \left\{ (x, y) \in \mathrm{T}^2 : \max_{1\leq l\leq m} \left| \sum_{n=1}^{l} T_n(x, y) \right| > c_3 \sqrt{\frac{\log m}{p}} \right\} \right| > c_2,$$

где c_i *– абсолютные постоянные.*

Институт математики НАН РА
e-mails: g.karagulyan@yahoo.com,
karenmuradyan1988@mail.ru

Г. А. Карагулян, К. Р. Мурадян

О расходимости треугольных и секторных сумм двойных рядов Фурье

Рассматриваются некоторые вопросы расходимости треугольных и секторных частичных сумм двойных тригонометрических рядов Фурье. В частности, строится пример функции из $f \in \bigcap_{p\geq 1} L^p(T^2)$, треугольные частичные суммы двойного ряда Фурье которой расходятся почти всюду.

G. A. Karagulyan, K. R. Muradyan

On the Divergence of Triangular and Sectorial Sums of Double Fourier Series

Some problems of divergence of triangular and sectorial sums of double trigonometric Fourier series are considered. In particular, we construct an example of function $f \in \bigcap_{p\geq 1} L^p(T^2)$, which double Fourier series triangular partial sums diverge almost everywhere.

Գ. Ա. Կարագուլյան, Կ. Ռ. Մուրադյան

Կրկնակի Ֆուրիեի շարքերի եռանկյուն և սեկտորիալ գումարների տարամիտության մասին

Դիտարկվում են կրկնակի եռանկյունաչափական Ֆուրիեի շարքերի տարամիտության որոշ խնդիրներ: Մասնավորապես կառուցվում է $\bigcap_{p\geq 1} L^p(T^2)$ դասին պատկանող մի ֆունկցիա, որի կրկնակի Ֆուրիեի շարքի եռանկյուն մասնակի գումարները տարամիտում են համարյա ամենուրեք:

Литература

1. *Carleson L.* – Acta Math. 1966. V. 116. P. 135-137.
2. *Hunt A.* – In: Proc. Conf. Southern Inninois Univ. Edvardsville. 1968. P. 235-255.
3. *Sjölin P.* – Arkiv för Mat. 1971. V. 9. P. 65–90.
4. *Antonov N. Yu.* – East Journal on Approximation. 1996. V. 2. N 2. P. 187-196.
5. *Fefferman Ch.* – Bull. Amer. Math. Soc. 1971. V. 77. N 5. P. 744-745.
6. *Тевзадзе Н. Р.* – Сообщ. АН ГССР . 1970. Т. 58. N 2. С. 277-279.
7. *Fefferman Ch.* – Bull. Amer. Math. Soc. 1971. V. 77. N 2. P. 191-195.
8. *Karagulyan G. A.* – Proc. Amer. Math. Soc. 2007. V. 135. N 10. 3133-3141.