ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 114 2014 № 1

МАТЕМАТИКА

УДК 517.91

С. А. Анисонян

Исследование систем обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно высших производных

(Представлено академиком А. Б. Нерсесяном 10/X 2013)

Ключевые слова: *нормальная система линейных дифференциальных уравнений, задача Коши.*

Пусть C – множество непрерывных функций, N – множество натуральных чисел, N_0 – множество целых неотрицательных чисел, R – множество вещественных чисел, $S(n)$ – множество многочленов от одного переменного порядка меньше n. Наибольший общий делитель отличных от нуля многочленов L_1, L_2 обозначим символом (L_1, L_2). В дальнейшем запись $(L_1, L_2)=1$ будет означать, что многочлены L_1, L_2 взаимно просты. Рассмотрим следующую систему линейных дифференциальных уравнений в окрестности нуля:

$$\begin{cases} L_1(p)u_1 + L_2(p)u_2 = f_1(t), \\ L_3(p)u_1 + L_4(p)u_2 = f_2(t), \end{cases} \tag{1}$$

где u_1, u_2 – неизвестные функции независимого переменного t, $f_1(t), f_2(t)$ – заданные функции, $L_i(p)$ – многочлены с постоянными коэффициентами относительно оператора дифференцирования $p=\dfrac{d}{dt}$ порядка k_i, $i=\overline{1,4}$. .

Известно (см [1]), что когда система (1) сводится к нормальной системе, то она при соответствующих условиях на правые части имеет решение. Рассмотрим случаи, когда система (1) не является разрешенной относительно высшей производной, а значит, не сводится к нормальной системе.

Такие системы в разных постановках рассматривались С.Г. Крейном [2], Г.В. Демиденко, С.В. Успенским [3], С.В. Брычевым [4], Ю.Е. Бояринцевым [5], А.О. Ремизовым [6] и др.

Рассмотрим систему (1), когда $D(L) \equiv 0$, где $D(L) \equiv D(L(\lambda))$ – детерминант матрицы $L(\lambda) = \begin{bmatrix} L_1(\lambda) & L_2(\lambda) \\ L_3(\lambda) & L_4(\lambda) \end{bmatrix}$.

Лемма 1. *Пусть многочлены* L_i *порядка* $k_i \in N_0$ $\left(i = \overline{1,4}\right)$ *такие, что* $D\left(L\right) \equiv 0$.

Тогда существуют многочлены $R_1, R_2, Q_1, Q_2, \left(R_1, R_2\right) = 1$, *такие, что*

$$L_1 = R_1 \cdot Q_1, L_2 = R_1 \cdot Q_2, L_3 = R_2 \cdot Q_1, L_4 = R_2 \cdot Q_2..$$

Теорема 1. ***1)*** *Система (1) имеет решение тогда и только тогда, когда существует функция* z, *удовлетворяющая обоим уравнениям системы*

$$\begin{cases} R_1\left(p\right) z_1 = f_1\left(t\right), \\ R_2\left(p\right) z_2 = f_2\left(t\right). \end{cases} \tag{2}$$

2) Пусть $f_1 \in C^{n_2}$, $f_2 \in C^{n_1}$, *где* $ordR_1 = n_i$, $i = 1,2$. *Для того, чтобы существовала функция* z, *удовлетворяющая обоим уравнениям системы (2), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие:*

$$R_1 f_2 = R_2 f_1 . \tag{3}$$

Рассмотрим систему (1) в случае, когда $f_i \in C, i = 1,2$.

Пусть L^0 – тождественный оператор, а $L^k z = \dfrac{1}{\left(k-1\right)!}\displaystyle\int_0^t \left(t-\tau\right)^{k-1} z\left(\tau\right) d\tau$ $\left(k \in N\right)$ – интегральный оператор порядка $k \in N$, $N_i\left(L\right) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j^i L^{n-j}$ – многочлены относительно интегрального оператора L, где $n_i \equiv ordR_i$, a_j^i – коэффициенты многочленов R_i, $i = 1,2$ из леммы 1.

Теорема 2. ***1)*** *Пусть* $f_1, f_2 \in C$. *Для того, чтобы существовала функция* z, *удовлетворяющая обоим уравнениям системы (2), необходимо и достаточно, чтобы*

$$N_2(L^{n_1} f_1(t)) - N_1(L^{n_2} f_2(t)) \in S(n_1 + n_2). \tag{4}$$

2) Система (1) при $f_1, f_2 \in C$ *имеет решение тогда и только тогда, когда выполняется условие (4).*

Рассмотрим систему (1) при $D(L) \neq 0$, когда данная система не сводится к нормальной системе дифференциальных уравнений.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ – попарно различные корни многочлена $D(L)$ кратности $k_1, \ldots k_r$, $(k_j > 0,\ j = \overline{1,r})$ m_i^j – кратность корня λ_i многочлена L_j, $\left(m_i^j \geq 0\right)$ $i = \overline{1,r},\ j = \overline{1,4}$, $\omega_i^1 \equiv \min\left(m_i^1, m_i^3\right)$, $\omega_\xi^2 \equiv \min\left(m_i^1, m_i^4\right)$, $\omega_i \equiv \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \omega_i^1$, $\omega_2 \equiv \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \omega_i^2$, $n \equiv \displaystyle\sum_{i=1}^{r} k_i$.

Теорема 3. *Для любого* $m \in N_0$ *такого, что* $m \ge \omega_1$, $n - m \ge \omega_2$, *система (1) при начальных условиях*

$$u_1^{(i)}(0) = a_i \quad i = \overline{0, m-1}, \text{ если } m > 0 \qquad (5)$$

$$u_2^{(i)}(0) = \beta_j \quad j = \overline{0, n-m-1}, \text{ если } n > m \qquad (6)$$

имеет единственное решение.

При $m = 0$ $m \equiv 0$ не ставится условие (5), а при $m = n$ не ставится условие (6).

Российско-Армянский университет
E-mail: s_anis@rambler.ru

С. А. Анисонян

Исследование систем обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно высших производных

Рассматривается система линейных дифференциальных уравнений, не сводящаяся к нормальной системе. Найдены необходимые и достаточные условия разрешимости системы, когда определитель характеристической матрицы тождественно равен нулю, и условия единственности решения задачи Коши для системы в случае, когда определитель характеристической матрицы не равен нулю.

Ս. Հ. Անիսոնյան

Ավագ կարգի ածանցյալների նկատմամբ չլուծվող սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերի հետազոտություն

Ուսումնասիրվում է նորմալ համակարգի չբերվող երկու գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգ: Գտնվում են լուծման գոյության անհրաժեշտ և բավարար պայմանները, երբ համակարգի որոշիչը նույնաբար հավասար է զրոյի: Դրվում է Կոշու խնդիր, ուսումնասիրվում են լուծման միակության հարցերը, երբ համակարգի որոշիչը հավասար չէ զրոյի:

S. H. Anisonyan

About Systems of Ordinary Differential Equations, Not Resolvable with the Respect to the Highest Derivatives

A system of two linear differential equations which is not reducible to a normal system is studied. Necessary and sufficient conditions for the system's solvability are found when the determinant of the matrix is identically equal to zero and the conditions of the uniqueness of solution of the Cauchy problem for the system are studied, when the determinant of the matrix is not equal to zero.

Литература

1. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Наука. 1974. 331 с.
2. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховых пространствах. М. Физматлит. 1971. 104 с.
3. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск. Научная книга. 1998. 436 с.
4. *Брычев С. В.* Исследование задачи Коши для вырожденных систем линейных дифференциальных уравнений. Канд. дис. Екатеринбург. 2000 г.
5. *Бояринцев Ю. Е.* Методы решения вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск. Наука. 1988. 154 с.
6. *Ремизов А. О.* Системы дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных. Канд. дис. М. 2001.