ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր
Том 113 2013 № 4
Volume

МАТЕМАТИКА

УДК 517.51

Академик Г. Г. Геворкян, К. А. Керян

Об общей системе Франклина на R^1

(Представлено 15/III 2013)

Ключевые слова: *общая система Франклина,безусловная базисность, сходимость.*

В 1928 г. Франклин [1] построил первый пример полного ортонормированного базиса в $C[0,1]$, состоящего из кусочно-линейных непрерывных функций. Эту систему в математической литературе называют системой Франклина. Ее систематическое изучение начато Чисельским [2, 3]. Далее эта система оказалась очень полезной при решении разных задач. В частности, Чисельский [4] построил базис в $C^{(1)}(I^2)$. С применением системы Франклина С. В. Бочкарев [5] построил первый пример базиса в пространстве функций, аналитических в единичном круге $D=\{z:|z|<1\}$ и непрерывных до границы, тем самым решив проблему, сформулированную Банахом. В 1982 г. Войташчик [6] доказал, что классическая система Франклина является безусловным базисом в действительном пространстве Харди $H^1[0,1]$. До этого в 1980 г. [7] было доказано лишь существование безусловного базиса в $H^1[0,1]$.

Стромберг [8] построил аналог системы Франклина на действительной оси R следующим образом. Пусть $R_0=\{n:n\in N\}\cup\{0\}\cup\{-n/2:n\in N\}$ $R_{1/2}=R_0\cup\{1/2\}$, где N – множество натуральных чисел. Через S_0 и $S_{1/2}$ обозначим множества непрерывных и кусочно-линейных функций из $L_2(R)$, соответственно, с узлами из R_0 и $R_{1/2}$. Существует единственная функция $f\in S_{1/2}$ со свойствами: f ортогональна S_0, $\|f\|_2=1$ и $f(1/2)>0$. Далее полагается $f_{jk}(x)=2^{j/2}f(2^jx-k)$, $j,k\in Z$, где Z – множество целых чисел. Стромберг [8] доказал, что система $\{f_{jk}(x)\}_{j,k\in Z}$ является полной ортонормированной системой в $L_2(R)$, а также безусловным базисом в $L_p(R)$, $1<p<\infty$. Эта система не может быть базисом в $L_1(R)$, так как $\int_R f(t)dt=0$.

В настоящей работе с применением метода построения общей системы Франклина строится полная ортонормированная система из непрерывных и кусочно-линейных функций. Без доказательства приводятся некоторые свойства этой системы. Оказывается, что она является базисом в $L_1(R)$, безусловным базисом в $L_p(R)$, $1 < p < \infty$ и обладет некоторыми базисными свойствами в $C(R)$. Но сначала приведем определение общей системы Франклина.

Последовательность (разбиение) $T = \{t_n : n \geq 0\}$ называется допустимой, если $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_n \in (0;1)$, $n \geq 2$, T всюду плотно в $[0;1]$ и каждая точка $t \in (0;1)$ встречается в T не более чем два раза.

Для допустимой последовательности $T = \{t_n : n \geq 0\}$ и $n \geq 2$ обозначим $T_n = \{t_i : 0 \leq i \leq n\}$. Пусть π_n получается из T_n неубывающей перестановкой: $\pi_n = \{\tau_i^n : \tau_i^n \leq \tau_{i+1}^n, 0 \leq i \leq n-1\}$, $\pi_n = T_n$. Через S_n обозначим пространство функций, определенных на $[0;1]$, которые непрерывны слева, линейны на $(\tau_i^n; \tau_{i+1}^n)$ и непрерывны в τ_i^n, если $\tau_{i-1}^n < \tau_i^n < \tau_{i+1}^n$. Поскольку $dimS_n = n+1$ и $S_{n-1} \subset S_n$, то существует (с точностью до знака) единственная функция $f \in S_n$, которая ортогональна S_{n-1} и $\| f \|_2 = 1$. Эту функцию называют n-й функцией Франклина, соответствующей раз биению T. Известно, что $f(t_n) \neq 0$. Поэтому полагают $f(t_n) > 0$.

Общая система Франклина $\{f_n(x) : n \geq 0\}$, соответствующая разбиению T, определяется по правилу $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = \sqrt{3}(2x-1)$ и для $n \geq 2$ функция $f_n(x)$ – это n-я функция Франклина, соответствующая разбиению T.

Если последовательность T диадическая, т.е. $t_n = \dfrac{2m-1}{2^{k+1}}$, где $n = 2^k + {}$ ${}+m$, $1 \leq m \leq 2^k$, $k = 0,1,2,...$, то соответствующая ей система – классическая система Франклина, введенная в работе [1].

Исследование общей системы Франклина было начато в работе [9], где доказано, что если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$ является рядом Фурье интегрируемой функции f, то

$$| S_n(x) | \leq C \cdot M(f, x),$$

где $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k f_k(x)$ – частичная сумма ряда Фурье–Франклина, а $M(f, x)$ – максимальная функция Харди – Литлвуда функции f.

Оказалось, что многими важными свойствами классической системы Франклина обладает также общая система Франклина. В частности, Г. Геворкяном и А. Камонт [10] доказано, что общая система Франклина является безусловным базисом в пространствах $L^p[0,1]$, $1 < p < +\infty$. До этого в работах [11, 12] была доказана безусловная базисность общей системы Франклина при некоторых дополнительных условиях на регулярность и структуру разбиения отрезка $[0,1]$, порождающую общую систему Франклина. Безусловная базисность классической системы Франклина доказана С.В. Бочкаревым [13].

В работах [10,11,14,15] исследованы другие свойства системы Франклина. При этом найдены необходимые или достаточные условия на последовательность T для сохранения того или иного свойства классической системы Франклина для общей системы Франклина.

Теперь введем понятие общей системы Франклина на R .

Определение 1. *Последовательность (разбиение) $T=\{t_n : n \geq 0\}$ называется допустимой на R, если T всюду плотно в R и $t_i \neq t_j$, когда $i \neq j$.*

Пусть $T=\{t_n : n \geq 0\}$ – допустимая последовательность на R. Для $n \geq 2$ обозначим $T_n=\{t_i : 0 \leq i \leq n\}$. Допустим, что π_n получается из T_n неубывающей перестановкой: $\pi_n=\{\tau_i^n : \tau_i^n \leq \tau_{i+1}^n, 0 \leq i \leq n-1\}$, $\pi_n = T_n$. Тогда через S_n обозначим пространство непрерывных на R функций f с носителем в $[\tau_0^n; \tau_n^n]$ и линейных на каждом отрезке $[\tau_i^n; \tau_{i+1}^n]$, $i=0,1,\dots,n-1$. Очевидно, что $\dim S_n = n-1$ и $S_n \subset S_{n+1}$. Поэтому для $n>2$ существует (с точностью до знака) единственная функция $f \in S_n$, которая ортогональна S_{n-1} и $\| f \|_2 = 1$. Эту функцию назовем n-й функцией Франклина на R^1, соответствующей разбиению T.

Определение 2. *Общая система Франклина на R^1 $\{f_n(x) : n \geq 2\}$, соответствующая разбиению T, определяется по правилу: $f_2(x)$ это нормированный в $L_2(R)$ B-сплайн, соответствующий точкам t_0, t_1, t_2, и для $n \geq 3$ функция $f_n(x)$ является n-й функцией Франклина, соответствующей разбиению T.*

Из всюду плотности на R последовательности T следует, что $\bigcup_{n \geq 2} S_n$ всюду плотно в $L_p(R)$, $1 \leq p < \infty$. Поэтому система $\{f_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$ полна в $L_p(R)$, $1 \leq p < \infty$. Для ядра Дирихле

$$K_n(x,t) = \sum_{k=2}^{n} f_k(t) f_k(x)$$

имеют место следующие оценки:

$$\int_R |K_n(x,t)|\, dt \leq C$$

для некоторой постоянной $C > 0$ и

$$\lim_{n \to \infty} \int_{|x-t|>\delta} |K_n(x,t)|\, dt = 0,$$

для любых фиксированных $\delta > 0$, и $X \in R.$

Применяя эти оценки, нетрудно вывести следующие теоремы.

Теорема 1. *Для любой функции $f \in C(R)$ с компактным носителем частичные суммы $S_n(f,x)$ ряда Фурье по системе $\{f_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$ равномерно сходятся к $f(x)$ на R.*

Теорема 2. *Пусть* $T=\{t_n : n\ge 0\}$ *допустимая последовательность на* R, *тогда соответствующая ей система* $\{f_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$ *является базисом в* $L_p(R)$ *для* $1\le p<\infty$.

Еще раз отметим, что система Стромберга $\{f_{jk}(x)\}_{j,k\in Z}$ не является базисом в $L_1(R)$, поскольку $\int_R f_{jk}(x)dx=0,\quad j,k\in Z.$

Неизвестно, существует ли одноиндексная нумерация системы $\{f_{jk}(x)\}_{j,k\in Z}$, при которой частичные суммы ряда Фурье–Стромберга непрерывной функции с компактным носителем локально равномерно сходятся.

Пусть $\varphi(x)$ четная, возрастающая на $[0,\infty)$ функция. Обозначим $C_\varphi(R)=\{f\in C(R): |f(x)|\le c\varphi(x)$ для некоторого $c>0$ и $\forall x\in R\}$.

Последовательность построим следующим образом. Положим $t_0=0$, $t_1=-1$, $t_2=1$. На втором шаге добавим точки $t_3=-2$, $t_4=-\frac{1}{2}$, $t_5=\frac{1}{2}$, $t_6=2$. На n-м шаге $t_{2^n-1}=-n,$ а потом последовательно слева направо добавим средние точки интервалов, полученные точками, определенными до n-го шага, и положим $t_{2^{n+1}-2}=n$. Так, продолжая до бесконечности, получим последовательность T, которая будет всюду плотной на R. Пусть $\{f_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$ – система Франклина, соответствующая построенной последовательности T. Тогда имеют место следующие теоремы.

Теорема 3. *Пусть*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\varphi(n)}{2^n}=0.$$

Тогда для любой функции $f\in C_\varphi(R)$ *частичные суммы* $S_n(f,x)$ *ряда Фурье–Франклина функции* f *локально равномерно сходятся к* $f(x)$.

Теорема 4. *Если*

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{\ln\varphi(n)}{2^n}>0,$$

то существует функция $f\in C_\phi(R)$, *для которой* $S_n(f,x)$ *не сходятся к* $f(x)$ *в некоторых точках.*

Рассмотрим последовательность T, построенную тем же алгоритмом, что и ранее, с той разницей, что на n-м шаге добавлены точки $t_{2^n-1}=-\tau_n, t_{2^{n+1}-2}=\tau_n$, где последовательность $\tau_n\uparrow\infty$. Тогда для системы Франклина, соответствующей этой последовательности, имеет место следующая

Теорема 5. *Для любой функции* $f\in C_\varphi(R)$ *частичные суммы соответствующего ряда Фурье будут сходиться к* $f(x)$, *если*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\tau_n-\tau_{n-1})\varphi(\tau_n)}{2^n}=0.$$

Методами работы [16] можно доказать следующую теорему.

Теорема 6. *Для каждой допустимой последовательности на* R *соответствующая ей система Франклина на* R^1 *является безусловным базисом в* $L_p(R)$, $1 < p < \infty$.

Отметим, что для этой системы определен ряд Фурье для каждой локально интегрируемой функции, чего нельзя сказать о системе Стромберга. Но эта система не является базисом в $H_1(R)$, так как интегралы функций этой системы не равны 0.

Ереванский государственный университет

Академик Г. Г. Геворкян, К. А. Керян

Об общей системе Франклина на R^1

Приведены некоторые свойства базисности и безусловной базисности общей системы Франклина в пространствах $L_p(R), 1 \le p < \infty$, и $C(R)$.

Ակադեմիկոս Գ. Գ. Գևորգյան, Կ. Ա. Քերյան

R^1 -ի վրա Ֆրանկլինի ընդհանուր համակարգի մասին

Ներկայացված են Ֆրանկլինի ընդհանուր համակարգի բազիսության և ոչ պայմանական բազիսության որոշ հատկություններ $L_p(R), 1 \le p < \infty$ և $C(R)$ տարածություններում:

Academician G. G. Gevorgyan, K. A. Keryan

On a General Franklin Systems on R^1

Some properties of basisness and unconditional basisness are given for a general Franklin systems in $L_p(R), 1 \le p < \infty$, and $C(R)$ spaces.

Литература

1. *Franklin Ph.* – Math. Ann. 1928. V. 100. P. 522–528.
2. *Ciesielski Z.* – Studia Math. 1963. V. 23. P. 141–157.
3. *Ciesielski Z.* – Studia Math. 1966. V. 27. P. 289–323.
4. *Ciesielski Z.* – Studia Math. 1969. V. 33. P. 243–247.
5. *Бочкарев С. В.* – Мат. сборник. 1974. Т. 95. N 1. С. 3–18.
6. *Wojtaszczyk P.* – Ark. Mat. 1982. V. 20. P. 293–300.
7. *Maurey B.* – Acta Math. 1980. V. 145. P. 79–120.
8. *Stromberg J.* – In: Conference on harmonic analysis in honor of Antoni Zygmund, Wadsworth Math. Wadsworth, Belmont, CA. 1983. P. 475–494.
9. *Ciesielski Z., Kamont A.* – Funct. Approx. Comment. Math. 1997. V. 25. P.129–143.
10. *Gevorkyan G. G., Kamont A.* – Studia Math. 2004. V. 164. P. 161–204.

11. *Gevorkyan G. G., Kamont A.* – Dissertationes Mathematicae (Rozprawy Matematyczne). 1998. V. 374. P. 1–59.
12. *Gevorkyan G. G., Sahakian A. A.* - Izv. Nats. Akad. Nauk Armenii. Mat. V. 35. N 4. 2000. P. 7–25 (in Russian); english translation: J. Contemp. Math. Anal. V. 35. 2000. N 4. P 2–22.
13. *Bochkarev S.V.* - Anal. Math. 1975. N 1. P. 249–257.
14. *Gevorkyan G. G., Kamont A.*- Studia Math. 2005. V. 167. P. 259 – 292.
15. *Геворкян Г.Г., Камонт А.* - Доклады НАН Армении. 2006. Т. 106. N 2. C. 108-114.
16. *Gevorkyan G. G., Kamont A.* - Studia Math. 2004. V. 64. P. 161 – 204.