ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 113 2013 № 3

МАТЕМАТИКА

УДК 517.946

А. О. Бабаян, А. А. Закарян

Задача Дирихле для одного неправильно эллиптического уравнения четвертого порядка

(Представлено академиком В. С. Захаряном 18/IV 2013)

Ключевые слова: *дефектные числа, неправильно эллиптическое уравнение, задача Дирихле, некорректная граничная задача.*

1. Введение. Формулировка результатов. Пусть

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$$

единичный круг комплексной плоскости. В области D рассмотрим дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$\sum_{k=0}^{4} A_k \frac{\partial^4 u}{\partial x^k \partial y^{4-k}}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D, \tag{1}$$

где A_k – комплексные постоянные. Предполагаем, что если λ_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ – корни характеристического уравнения

$$\sum_{k=0}^{4} A_k \lambda^{4-k} = 0, \tag{2}$$

то количество корней с положительной мнимой частью не совпадает с количеством корней с отрицательной мнимой частью, т. е. уравнение (1) является неправильно эллиптическим. Решение уравнения (1) ищется в классе $C^4(D) \cap C^{(1,\alpha)}(\overline{D})$ и на границе Γ удовлетворяет условиям Дирихле

$$u\big|_{\Gamma} = f(x, y), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_{\Gamma} = g(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma. \tag{3}$$

Здесь $f \in C^{(1,\alpha)}(\Gamma)$ и $g \in C^{(\alpha)}(\Gamma)$ – заданные функции, $\frac{\partial}{\partial N} = -\frac{\partial}{\partial r}$ – дифференцирование по направлению внутренней нормали к границе Γ (здесь и далее $z = x + iy = re^{i\varphi}$).

Как было показано в [1], для неправильно эллиптических уравнений классические краевые задачи, и в частности задача Дирихле, не являются корректными. В [2] были исследованы краевые задачи для неправильно эллиптических уравнений второго порядка и описаны более узкие классы функций, в которых данные задачи являются нетеровыми. Вопросу однозначной разрешимости однородной задачи Дирихле (при $f \equiv g \equiv 0$) для уравнения четвертого порядка общего вида посвящена работа [3]. В [4] получены условия разрешимости граничных задач для неоднородного полианалитического уравнения. Задача Дирихле для правильно эллиптического уравнения высокого порядка изучена в [5]. В [6], используя представление общего решения уравнения (1), полученное в [5], исследуются однородная и неоднородная задачи (1), (3) при некотором расположении корней характеристического уравнения.

В настоящей работе изучается случай, когда корни уравнения (2) удовлетворяют условиям

$$\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3,\ \ \lambda_j \neq i,\ \ \Im\lambda_j > 0,\ \ j = 1,2,3,\ \ \lambda_4 = -i. \tag{4}$$

В этом случае исследуются однородная и неоднородная задачи (1), (3). В частности, доказывается, что однородная задача Дирихле или не имеет ненулевых решений, или имеет одно линейно независимое решение.

Для точной формулировки полученных результатов введем некоторые определения. Используя операторы комплексного дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right),\ \ \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

представим уравнение (1) в комплексной форме. При условии (4) уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}} - \mu_1\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}} - \mu_2\frac{\partial}{\partial z}\right)u(x,y) = 0, \tag{5}$$

где $\mu_1 = \dfrac{i-\lambda_1}{i+\lambda_1}$, $\mu_2 = \dfrac{i-\lambda_3}{i+\lambda_3}$. Из условий (4) следует, что

$$\mu_1 \neq \mu_2,\ \ |\mu_j| < 1,\ \ j = 1,2;\ \ \ \mu_1\mu_2 \neq 0. \tag{6}$$

Представим граничные условия (3) в эквивалентной форме

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \overline{z}}\right|_{\Gamma} = F(x,y),\ \ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{\Gamma} = G(x,y),\ \ (x,y) \in \Gamma;\ \ u(1,0) = f(1,0). \tag{7}$$

Здесь функции F и G, принадлежащие пространству $C^{(\alpha)}(\Gamma)$, определяются соотношениями

$$F(x,y) = \frac{z}{2}\left(g(x,y) + i\frac{\partial f}{\partial \varphi}(x,y)\right),\ \ G(x,y) = \frac{\overline{z}}{2}\left(g(x,y) - i\frac{\partial f}{\partial \varphi}(x,y)\right),$$

$$z = re^{i\varphi} \in \Gamma. \tag{8}$$

Определим также класс граничных функций, который будет необходим для дальнейшего.

Определение 1. *Обозначим* $B^{(m,\alpha)}(\delta)$ *класс функций, аналитических в кольце* $R = \{z : \delta < |z| < 1\}$, *которые вместе с производными до порядка* m

принадлежат пространству $C^{(\alpha)}(\overline{R})$ *(т. е. удовлетворяют условию Гельдера в замыкании области* R*).*

В этих обозначениях результаты, полученные в работе, можно сформулировать так:

Теорема 1. *Рассмотрим однородную задачу (5), (3) и обозначим* $z=\mu_2\mu_1^{-1}$.

1. Если выполняются условия

$$P_{k-2}(z)\equiv\sum_{j=0}^{k-2}(k-1-j)z^j\neq 0,\quad k=3,4,\ldots, \tag{9}$$

то однородная задача (5), (3) не имеет нетривиальных решений.

2. Если условия (9) не выполняются, то $P_{k_0-2}(z)=0$ *только при одном значении* $k_0>2$. *При этом однородная задача (5), (3) имеет одно линейно независимое решение, которое является многочленом порядка* k_0+1.

Теорема 2. *Пусть граничные функции из (7)* F *и* G *принадлежат множеству* $B^{(1,\alpha)}(r)$, *где* $r=\max(|\mu_1|,|\mu_2|)$. *Тогда, если выполняются условия (9), то неоднородная задача (5), (3) имеет решение. При нарушении условий (9) для разрешимости задачи (5), (3) необходимо и достаточно, чтобы граничные функции* F *и* G *удовлетворяли одному линейно независимому условию.*

Далее, в третьем параграфе, рассматривается задача (1), (3) в случае другого расположения корней характеристического уравнения.

2. Доказательство теорем 1 и 2. *Доказательство теоремы 1.* Общее решение уравнения (5) представляется в виде ([5])

$$u(x,y)=\Phi_0(z+\mu_1\bar z)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\Phi_1(z+\mu_1\bar z)+\Phi_2(z+\mu_2\bar z)+\Psi(\bar z), \tag{10}$$

где Φ_j $(j=0,1)$ и Φ_2 – функции, аналитические в областях $D_1=\{z+\mu_1\bar z\mid z\in D\}$ и $D_2=\{z+\mu_2\bar z\mid z\in D\}$ соответственно, а также аналитическую в круге D функцию Ψ необходимо определить. Подставим функцию (10) в граничные равенства (7). Используя операторное тождество ([5])

$$\frac{\partial^{k+m}}{\partial z^k\partial\bar z^m}\frac{\partial^l}{\partial\varphi^l}=\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}+(k-m)iI\right)^l\frac{\partial^{k+m}}{\partial z^k\partial\bar z^m},$$

получим

$$\Psi'(\bar z)+\mu_1\Phi_0'(z+\mu_1\bar z)+\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}-iI\right)\mu_1\Phi_1'(z+\mu_1\bar z)+\mu_2\Phi_2'(z+\mu_2\bar z)=F(z),\ z\in\Gamma,$$

$$\Phi_0'(z+\mu_1\bar z)+\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}+iI\right)\Phi_1'(z+\mu_1\bar z)+\Phi_2'(z+\mu_2\bar z)=G(z),\ z\in\Gamma. \tag{11}$$

Нам понадобится представление функции $\Phi(z+\mu\bar z)$, где Φ аналитична в области $D_1=\{z+\mu\bar z: z\in D\}$, в окрестности Γ с помощью аналитической в D функции. В [7] доказано, что при $|z|=1$ функция $\Phi(z+\mu\bar{z})$ допускает представление

$$\Phi(z+\mu\bar{z})=\omega(z)+\omega(\mu\bar{z}), \tag{12}$$

где ω – аналитическая в единичном круге функция. Если известна функция ω, то Φ определяется по формуле

$$\Phi(z+\mu\bar{z})=\omega\left(\frac{z+\mu\bar{z}+\sqrt{(z+\mu\bar{z})^2-4\mu}}{2}\right)+\omega\left(\frac{z+\mu\bar{z}-\sqrt{(z+\mu\bar{z})^2-4\mu}}{2}\right), \tag{13}$$

где $|z|<1$. В этих формулах выбираем ту ветвь $\sqrt{\zeta^2-4\mu}$, которая аналитически продолжается вне сегмента $\left[-2\sqrt{\mu},2\sqrt{\mu}\right]$ и удовлетворяет условию $\zeta^{-1}\sqrt{\zeta^2-4\mu}\to 1$ при $\zeta\to\infty$. Используем (12) для представления функций Φ'_j на окружности Γ

$$\Psi'(\bar{z})=\sum_{k=0}^{\infty}A_k\bar{z}^k,\ \ \Phi'_2(z+\mu_2\bar{z})=\sigma_2(z)+\sigma_2(\mu_2\bar{z})\equiv\sum_{k=0}^{\infty}B_{k2}z^k+\sum_{k=0}^{\infty}B_{k2}\mu_2^k\bar{z}^k,$$

$$\Phi'_j(z+\mu_1\bar{z})=\sigma_j(z)+\sigma_j(\mu_1\bar{z})\equiv\sum_{k=0}^{\infty}B_{kj}z^k+\sum_{k=0}^{\infty}B_{kj}\mu_1^k\bar{z}^k,\ \ j=0,1,\quad z\in\Gamma. \tag{14}$$

Так как подлежащие определению функции σ_j и Ψ' аналитичны в круге D, то они определяются своими коэффициентами Тейлора A_k и B_{kj}. Для определения этих коэффициентов подставим разложения (14) в граничные условия (5)

$$\sum_{k=0}^{\infty}A_k\bar{z}^k+\sum_{k=0}^{\infty}B_{k0}\mu_1z^k+\sum_{k=0}^{\infty}B_{k0}\mu_1^{k+1}\bar{z}^k+\sum_{k=0}^{\infty}B_{k1}i\mu_1(k-1)z^k-$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty}B_{k1}i(k+1)\mu_1^{k+1}\bar{z}^k+\sum_{k=0}^{\infty}B_{k2}\mu_2z^k+\sum_{k=0}^{\infty}B_{k2}\mu_2^{k+1}\bar{z}^k=F(z),|z|=1,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}B_{k0}z^k+\sum_{k=0}^{\infty}B_{k0}\mu_1^k\bar{z}^k+\sum_{k=0}^{\infty}B_{k1}i(k+1)z^k-$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty}B_{k1}i(k-1)\mu_1^k\bar{z}^k+\sum_{k=0}^{\infty}B_{k2}z^k+\sum_{k=0}^{\infty}B_{k2}\mu_2^k\bar{z}^k=G(z),|z|=1. \tag{15}$$

Разложим функции F и G на окружности Γ в ряд Фурье

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}F_kz^k+\sum_{k=1}^{\infty}F_{-k}\bar{z}^k\equiv F_+(z)+F_-(z),$$

$$G(z)=\sum_{k=0}^{\infty}G_kz^k+\sum_{k=1}^{\infty}G_{-k}\bar{z}^k\equiv G_+(z)+G_-(z) \tag{16}$$

и приравняем в (15) коэффициенты при соответствующих степенях z и $\bar{z}$. Получим системы для определения неизвестных A_k и B_{kj}. При $k=0$ имеем

$$2A_0 + 2\mu_1 B_{00} - 2i\mu_1 B_{01} + 2\mu_2 B_{02} = F_0,\ 2B_{00} + 2iB_{01} + 2B_{02} = G_0. \quad (17)$$

При $k \geq 1$ получаем систему четырех уравнений относительно неизвестных A_k и B_{kj}:

$$\begin{gathered} A_k + \mu_1^{k+1} B_{k0} - i(k+1)\mu_1^{k+1} B_{k1} + \mu_2^{k+1} B_{k2} = F_{-k} \\ \mu_1^k B_{k0} - i(k-1)\mu_1^k B_{k1} + \mu_2^k B_{k2} = G_{-k}, \\ \mu_1 B_{k0} + i(k-1)\mu_1 B_{k1} + \mu_2 B_{k2} = F_k, \\ B_{k0} + i(k+1) B_{k1} + B_{k2} = G_k, \end{gathered} \quad (18)$$

Определитель основной матрицы системы (18) имеет вид

$$\Omega_k = \det \tilde{\Omega}_k \equiv \det \begin{pmatrix} 1 & \mu_1^{k+1} & -i(k+1)\mu_1^{k+1} & \mu_2^{k+1} \\ 0 & \mu_1^k & -i(k-1)\mu_1^k & \mu_2^k \\ 0 & \mu_1 & i(k-1)\mu_1 & \mu_2 \\ 0 & 1 & i(k+1) & 1 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Преобразуя этот определитель и используя обозначения теоремы 1, получим

$$\Omega_k = 2i\mu_1^{k+1}(1-z)^2 P_{k-2}(z). \quad (20)$$

При условиях теоремы 1 $\mu_1 \neq 0$ и $1 - z \neq 0$, так как $\mu_1 \neq \mu_2$. Поэтому однородная (при $F_k = G_k \equiv 0$) система (18) имеет ненулевое решение при $k > 2$ тогда и только тогда, когда $P_{k-2}(z) = 0$ (отметим, что $\Omega_2 \neq 0$, так как является обобщенным определителем Вандермонда с различными коэффициентами). Например, при $k = 3$ $P_{k-2}(z) = z + 2$, следовательно, при $z = -2$ или $\mu_2 = -2\mu_1$ однородная система (18) имеет ненулевое решение A_3, B_{3j}, $j = 0,1,2$. По этим ненулевым коэффициентам по формулам (14), (13), (10) определяем нетривиальное решение однородной задачи (5), (3), которое в этом случае является многочленом четвертого порядка $(1 - z\bar{z})^2$. Аналогично, если однородная система (18) имеет ненулевое решение при некотором $k_0 > 2$, то по нему получаем решение однородной задачи (5), (3), которое является ненулевым многочленом порядка $k_0 + 1$. Предположим, что выполнены условия (9). Тогда при $k \geq 2$ $\Omega_k \neq 0$, следовательно, однородная система (18) однозначно разрешима, т. е. $A_k = B_{jk} = 0$ при $j = 0,1,2$ и $k \geq 2$. Поэтому ненулевым решением однородной задачи может быть только многочлен степени не выше двух. Но из однородных граничных условий (3) следует, что если этот многочлен ненулевой, то он должен делиться на $(1 - z\bar{z})^2$ (см. [8], т. 5.1, с. 84), т. е. должен иметь степень не ниже четырех. Таким образом, в этом случае однородная задача (5), (3) не имеет нетривиальных решений. Первая часть теоремы 1 доказана.

Для доказательства второй части теоремы 1 рассмотрим многочлен $P_{k-2}(z)$. Докажем следующее предложение.

Лемма 1. *Пусть для некоторого* k_0 *имеем* $P_{k_0-2}(z_0)=0$. *Тогда для любого* $k \neq k_0$ *необходимо* $P_{k-2}(z_0) \neq 0$, *т. е. при* $k \neq j$ *многочлены* P_{k-2} *и* P_{j-2} *не имеют общих нулей.*

Доказательство леммы 1. Предположим, что утверждение леммы неверно, т. е. для некоторого z_0 существуют натуральные числа k и j такие, что $k>2$, $j>0$, для которых $P_{k-2}(z_0)=P_{k+j-2}(z_0)=0$. Тогда то же число z_0 является корнем многочлена $P_{k+j-2}-z^j P_{k-2}$. Поэтому получим, что z_0 является корнем двух полиномов

$$P_{k-2}(z)=\sum_{i=0}^{k-2}(k-1-i)z^i,\ Q_{j-1}(z)=\sum_{i=0}^{j-1}(k+j-1-i)z^i. \qquad (21)$$

Теперь воспользуемся одним следствием из теоремы Энестрема–Какейа об оценке корней многочленов (см. [9], отдел 3, гл. 1, §3, задача 23). Если все коэффициенты $p_0,\ldots,p_n$ полинома $\sum_{i=0}^{n} p_i z^i$ положительны, то нули его лежат в круговом кольце

$$\min_{0\le k\le n-1}\frac{p_k}{p_{k+1}} \le |z| \le \max_{0\le k\le n-1}\frac{p_k}{p_{k+1}}. \qquad (22)$$

Используя оценку (22), получим, что корни многочленов P_{k-2} и Q_{j-1} лежат соответственно в кольцах

$$\frac{k-1}{k-2}\le |z| \le 2,\ \frac{k+j-1}{k+j-2}\le |z| \le \frac{k+1}{k}.$$

Однако эти кольца не имеют общих точек, что противоречит предположению, что $P_{k-2}(z_0)=Q_{j-1}(z_0)=0$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 2 позволяет заключить, что условия (9) могут нарушаться только при одном $k>2$. Таким образом, при нарушении условий (9) только при одном k система (18) имеет ненулевое решение. Так как ненулевому решению системы (18) соответствует ненулевое решение однородной задачи (5), (3), получаем второе утверждение теоремы 1. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим неоднородную задачу (5), (3) при условиях (9). Система (17) всегда имеет решение, а система (18) при $k>1$ однозначно разрешима, так как определитель Ω_k при $k>1$ отличен от нуля. Рассмотрим систему (18) при $k=1$. В этом случае левые части второго и третьего уравнений (18) совпадают. Из (8) следует, что

$$F_1=G_{-1}=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} g(\cos\varphi,\sin\varphi)\,d\varphi,$$

т. е. второе и третье уравнения в (18) совпадают. Непосредственно проверяется, что ранг матрицы $\widetilde{\Omega}_1$ равен трем, следовательно, система (18) при

$k=1$ также имеет решение. Перейдем к исследованию системы (18) при $k>1$. Сначала преобразуем ее к следующей форме:

$$A_k+\mu_1^{k+1}B_{k0}-i(k+1)\mu_1^{k+1}B_{k1}+\mu_2^{k+1}B_{k2}=F_{-k},$$
$$B_{k0}+i(k+1)B_{k1}+B_{k2}=G_k,$$
$$B_{k1}+\frac{\mu_1-\mu_2}{2i\mu_1}B_{k2}=\frac{G_k}{2i}-\frac{F_k}{2i\mu_1},$$
$$\frac{\Omega_k}{2i\mu_1}B_{k2}=\mu_1^kG_k(1-k)+\mu_1^{k-1}kF_k-G_{-k}. \tag{23}$$

Здесь Ω_k определяется по формуле (19). Далее, найдем решение этой системы. Имеем

$$A_k=(\mu_2^{k+1}-\mu_1^{k+1}-(k+1)\mu_1^k(\mu_1-\mu_2))B_{2k}+(k+1)(G_k-\mu_1^{-1}F_k)+F_{-k}-\mu_1^{k+1}G_k,$$
$$B_{k2}=2i\Omega_k^{-1}(G_{-k}+\mu_1^k(k-1)G_k-k\mu_1^{k-1}F_k),\ \ B_{k1}=0.5i(\mu_1^{-1}(\mu_1-\mu_2)B_{2k}-G_k+F_k\mu_1^{-1}),$$
$$B_{k0}=\frac{1-k}{2}G_k+\frac{k+1}{2\mu_1}F_k+\frac{(k+1)(\mu_1-\mu_2)-2\mu_1}{2\mu_1}B_{2k}. \tag{24}$$

Так как предполагается, что функции F и G принадлежат классу $B^{(1,\alpha)}(r)$, то коэффициенты Фурье этих функций, G_{-k}, G_k, F_{-k}, F_k должны достаточно быстро убывать при $k\to\infty$. Используя оценки из [10] (с. 210), получаем, что

$$G_{-k}\sim r^kk^{-1-\alpha},\ G_k\sim k^{-1-\alpha}\quad \alpha\in(0,1),\ \ r=\max(|\mu_1|,|\mu_2|). \tag{25}$$

Аналогичные оценки имеют место для F_{-k}, F_k. Из (20) имеем также, что $\Omega_k\sim r^k$. Используя эти оценки, а также формулу (24) для коэффициентов A_k и B_{jk}, получим, что при $k\to\infty$

$$A_k\sim k^{-\alpha},\ B_{0k}\sim k^{-\alpha},\ B_{1k}\sim k^{-1-\alpha},\ B_{2k}\sim k^{-\alpha}.$$

Эти оценки показывают, что функции Ψ, $\Phi_0(z+\mu_1\bar z)$, $\Phi_2(z+\mu_2\bar z)$, $\frac{\partial}{\partial\varphi}\Phi_1(z+\mu_1\bar z)$ вместе с производными первого порядка удовлетворяют условию Гельдера в $D\cup\Gamma$ и, следовательно, задача (5), (3) имеет решение в $C^{(1,\alpha)}(\bar D)$.

При нарушении условий (9), как было показано при доказательстве 1, только при одном значении $k_0>2$ $\Omega_{k_0}=0$. Из последнего уравнения (23) при этом следует необходимое условие разрешимости, которому должны удовлетворять граничные функции

$$\mu_1^{k_0}G_{k_0}(1-k_0)+\mu_1^{k_0-1}k_0F_{k_0}-G_{-k_0}=0.$$

Далее, аналогично доказательству первой части доказываем, что последнее условие является также и достаточным условием разрешимости задачи (5), (3). Теорема 1 доказана.

3. Случай двукратных корней характеристического уравнения. В этом пункте предположим, что корни характеристического уравнения удовлетворяют условиям

$$\lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3=\lambda_4,\ \ \lambda_j\neq i,\ \ \Im\lambda_j>0,\ j=1,2,3,4. \qquad (26)$$

В этом случае будем использовать рассуждения, аналогичные предыдущим. Сначала представим уравнение (1) в комплексной форме, используя операторы комплексного дифференцирования. Имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z}}-\mu\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z}}-\nu\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u(x,y)=0. \qquad (27)$$

Здесь $\mu=\dfrac{i-\lambda_1}{i+\lambda_1}$, $\nu=\dfrac{i-\lambda_3}{i+\lambda_3}$. Из условий (4) следует, что

$$\mu\neq\nu,\ |\mu|<1,\ |\nu|<1,\ \mu\nu\neq0. \qquad (28)$$

Общее решение уравнения (27) представляется в виде

$$u(x,y)=\Phi_0(z+\mu_1\overline{z})+\frac{\partial}{\partial\varphi}\Phi_1(z+\mu\overline{z})+\Psi_0(z+\nu\overline{z})+\frac{\partial}{\partial\varphi}\Psi_1(z+\nu\overline{z}), \qquad (29)$$

где Φ_j и Ψ_j $(j=0,1)$ – функции аналитические в областях $D_1=\{z+\mu\overline{z}\,|\,z\in D\}$ и $D_2=\{z+\nu\overline{z}\,|\,z\in D\}$ соответственно. Подставим функцию (29) в граничные равенства (7). Получим

$$\mu\Phi_0'(z+\mu\overline{z})+\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}-iI\right)\mu\Phi_1'(z+\mu\overline{z})+\nu\Psi_0'(z+\nu\overline{z})+$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}-iI\right)\nu\Psi_1'(z+\nu\overline{z})=F(z),\ z\in\Gamma,$$

$$\Phi_0'(z+\mu\overline{z})+\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}+iI\right)\Phi_1'(z+\mu\overline{z})+\Psi_0'(z+\nu\overline{z})+$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}+iI\right)\Psi_1'(z+\nu\overline{z})=G(z),\ z\in\Gamma. \qquad (30)$$

Используем (12) для представления функций Φ_j', Ψ_j' на окружности Γ

$$\Phi_j'(z+\mu\overline{z})=\sigma_j(z)+\sigma_j(\mu\overline{z})\equiv\sum_{k=0}^{\infty}A_{kj}z^k+\sum_{k=0}^{\infty}A_{kj}\mu^k\overline{z}^k,$$

$$\Psi_j'(z+\nu\overline{z})=\psi_j(z)+\psi_j(\nu\overline{z})\equiv\sum_{k=0}^{\infty}B_{kj}z^k+\sum_{k=0}^{\infty}B_{kj}\nu^k\overline{z}^k,\ \ j=0,1,\quad z\in\Gamma. \qquad (31)$$

Так как подлежащие определению функции σ_j и ψ_j аналитичны в круге D, то они определяются своими коэффициентами Тейлора A_{kj} и B_{kj}. Для определения этих коэффициентов подставим разложения (31) в граничные условия (30):

$$\sum_{k=}^{\infty}A_{k0}\mu z^k+\sum_{k=0}^{\infty}A_{k0}\mu^{k+1}\overline{z}^k+\sum_{k=0}^{\infty}A_{k1}i\mu(k-1)z^k-\sum_{k=0}^{\infty}A_{k1}i(k+1)\mu^{k+1}\overline{z}^k+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}B_{k0}\nu z^k+\sum_{k=0}^{\infty}B_{k0}\nu^{k+1}\overline{z}^k+\sum_{k=0}^{\infty}B_{k1}i\nu(k-1)z^k-\sum_{k=0}^{\infty}B_{k1}i(k+1)\nu^{k+1}\overline{z}^k=F(z),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}A_{k0}z^k+\sum_{k=0}^{\infty}A_{k0}\mu^k\overline{z}^k+\sum_{k=0}^{\infty}A_{k1}i(k+1)z^k-\sum_{k=0}^{\infty}A_{k1}i(k-1)\mu^k\overline{z}^k+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty} B_{k0} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} B_{k0} \nu^k \bar{z}^k + \sum_{k=0}^{\infty} B_{k1} i(k+1) z^k - \sum_{k=0}^{\infty} B_{k1} i(k-1) \nu^k \bar{z}^k = G(z), |z|=1. \qquad (32)$$

Используем разложения (16) функций F и G на окружности Γ и приравняем в (32) коэффициенты при соответствующих степенях z и $\bar{z}$. Получим системы для определения неизвестных A_{kj} и B_{kj}. При $k=0$ имеем

$$2\mu A_{00} - 2i\mu A_{01} + 2\nu B_{00} - 2i\nu B_{01} = F_0, \; 2A_{00} + 2iA_{01} + 2B_{00} + 2iB_{01} = G_0. \qquad (33)$$

При $k>1$ получим:

$$\begin{gathered} A_{k0} + i(k+1)A_{k1} + B_{k0} + i(k+1)B_{k1} = G_k, \\ \mu A_{k0} + i(k-1)\mu A_{k1} + \nu B_{k0} + i(k-1)\nu B_{k1} = F_k, \\ \mu^k A_{k0} - i(k-1)\mu^k A_{k1} + \nu^k B_{k0} - i(k-1)\nu^k B_{k1} = G_{-k}, \\ \mu^{k+1} A_{k0} - i(k+1)\mu^{k+1} A_{k1} + \nu^{k+1} B_{k0} - i(k+1)\nu^{k+1} B_{k1} = F_{-k}. \end{gathered} \qquad (34)$$

Определитель основной матрицы системы (34) имеет вид:

$$\Omega_k = \det \tilde{\Omega}_k \equiv \det \begin{pmatrix} 1 & i(k+1) & 1 & i(k+1) \\ \mu & i(k-1)\mu & \nu & i(k-1)\nu \\ \mu^k & -i(k-1)\mu^k & \nu^k & -i(k-1)\nu^k \\ \mu^{k+1} & -i(k+1)\mu^{k+1} & \nu^{k+1} & -i(k+1)\nu^{k+1} \end{pmatrix}. \qquad (35)$$

Предположим для определенности, что $|\nu| \le |\mu|$ и положим $z = \nu\mu^{-1}$ (отметим, что из условий следует, что $|z| \le 1$ и $z \ne 1$). Тогда определитель Ω_k можно представить в виде

$$\Omega_k = -4\mu^{2k+2} z(1-z)^2 \left(\left(\sum_{j=0}^{k-1} z^j \right)^2 - k^2 z^{k-1} \right) \equiv -4\mu^{2k+2} z(1-z)^2 \Theta_{2k-2}(z). \qquad (36)$$

Функцию Θ_{2k-2} можно также представить в виде

$$\Theta_{2k-2}(z) = (1-z)^2 \sum_{j=0}^{k-2} (j+1) z^j (1 + z + z^2 + \dots + z^{k-j-2})^2 \equiv (1-z)^2 S_{2k-4}(z).$$

Учитывая, что при условиях (26) имеем $\mu z(1-z) \ne 0$, получаем, что разрешимость системы (34) определяется многочленом S_{2k-4}:

$$S_{2k-4}(z) = \sum_{j=0}^{k-3} C_{j+3}^3 z^j + C_{k+1}^3 z^{k-2} + \sum_{j=0}^{k-3} C_{j+3}^3 z^{2k-j-4}, \; k = 3, 4, \dots . \qquad (37)$$

Здесь C_m^3 – биномиальный коэффициент. Рассмотрим определитель Ω_k. При $|z|<1$ из (36) следует, что

$$\Theta_{2k-2}(z) \sim (1-z)^{-2}, \quad k \to \infty,$$

а при $z = e^{i\tau}$ имеем

$$|\Theta_{2k-2}(z)| = \left| \left(\frac{\sin 0.5k\tau}{\sin 0.5\tau} \right)^2 - k^2 \right|.$$

Из этих соотношений следует, что при больших k определитель Ω_k отличен от нуля. Поэтому однородная задача (27), (3) имеет конечное число линейно независимых решений. Учитывая, что при больших k

$|\Omega_k| : |\mu|^{2k+2}$, аналогично второму пункту, получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Однородная задача (27), (3) имеет конечное число линейно независимых решений. Это число определяется формулой*

$$K = \sum_{k=3}^{\infty}(4 - rank\,\tilde{\Omega}_k).$$

Если функции из (7), F и G принадлежат множеству $B^{(1,\alpha)}(r)$, где $r = \max(|\mu|,|\nu|)$, то неоднородная задача (27), (3) имеет решение тогда и только тогда, когда функции F и G удовлетворяют K линейно независимым условиям.

Замечание 1. *При $k = 3$ многочлен (37) S_2 имеет вид $S_2(z) = z^2 + 4z + 1$ и, следовательно, имеет корень $z = \sqrt{3} - 2$, который по модулю меньше единицы. Поэтому при $\nu = (\sqrt{3} - 2)\mu$ однородная задача (27), (3) имеет нетривиальное решение (в данном случае это функция $(1 - z\bar{z})^2$). Таким образом, дефектное число K может быть отлично от нуля. Можно предположить, что так же как и в теореме 1, в этом случае число K равно единице, однако это утверждение нуждается в доказательстве.*

Государственный инженерный университет Армении

А. О. Бабаян, А. А. Закарян

Задача Дирихле для одного неправильно эллиптического уравнения четвертого порядка

Рассматривается задача Дирихле для неправильно эллиптического уравнения с постоянными коэффициентами четвертого порядка в единичном круге. Решение ищется в классе функций, удовлетворяющих условию Гельдера вплоть до границы вместе с производными первого порядка. Указан класс граничных функций, для которого эта задача нормально разрешима; определены дефектные числа. Условия разрешимости рассматриваемой задачи и решение однородной и неоднородной задач определяются в явном виде.

Ա. Հ. Բաբայան, Ա. Ա. Զաքարյան

Դիրիխլեի խնդիրը չորրորդ կարգի մեկ ոչ ճշգրիտ էլիպսական հավասարման համար

Դիտարկվում է Դիրիխլեի խնդիրը հաստատուն գործակիցներով չորրորդ կարգի ոչ ճշգրիտ էլիպսական հավասարման համար միավոր շրջանում: Լուծումը փնտրվում է առաջին կարգի ածանցյալների հետ միասին ընդհուպ մինչև եզրը Հյոլդերի պայմանին բավարարող ֆունկցիաների դասում: Որոշվել է եզրային ֆունկցիաների դաս, որի համար այս խնդիրը նորմալ լուծելի է և գտնվել են դեֆեկտային թվերը: Դիտարկվող խնդիրի լուծելիության պայմանները և համասեռ ու անհամասեռ խնդիրների լուծումները ստացվել են բացահայտ տեսքով:

A. H. Babayan, A. A. Zaqaryan

The Dirichlet Problem for the Fourth Order Improperly Elliptic Equation

The Dirihchlet problem for the fourth order improperly elliptic equation with constant coefficients in the unit disc is considered. The solution must be found in the class of functions Hölder continuous with first order derivatives up to the boundary. The defect numbers and the class of boundary functions, for which the problem is normally solvable, are obtained. The solvability conditions and the solutions of homogeneous and inhomogeneous problems are obtained in explicit form.

Литература

1. *Бицадзе А. В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М. Наука. 1966. 204 с.
2. *Товмасян Н. Е.* – Изв. АН АрмССР. Математика. 1968. Т. 3. №6. С.497-521.
3. *Буряченко Е. А.* В кн.: Нелинейные граничные задачи. Донецк. 2000. Т. 10. С. 44-49.
4. *Begehr H., Kumar A.* - Analysis. 2005. V. 25. P. 55-71.
5. *Бабаян А. О.* – Изв. НАН Армении. Математика. 2003. Т. 38. №6. С.39-48.
6. *Бабаян А. О.* В кн.: Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск. 2007. С.56-69.
7. *Tovmasyan N. E.* Non-Regular Differential Equations and Calculations of Electromagnetic Fields. World Scientific. Singapore. 1998. 235 p.
8. *Axler S., Bourdon P., Ramey W.* Harmonic Function Theory. Springer-Verlag. New York, Inc. 2001. 270 p.
9. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа, ч.1. М. Наука. 1978. 392 с.
10. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М. ФМЛ. 1961. 936 с.