ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 113 2013 № 2

**МАТЕМАТИКА**

УДК 517
MSC2000 Number: 30D35

**Р. В. Даллакян**

# О $C$-росте $\omega$-характеристик аналитических в единичном круге функций

(Представлено академиком В.С.Захаряном 30/I 2013)

**Ключевые слова:** *обобщенный оператор Римана – Лиувилля, ядра М. М. Джрбашяна, порядок $C$-роста $\omega$-характеристики.*

1. **Обозначения и определения.** Через $\Omega$ обозначим класс функций $\omega(x)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\omega(x)$ положительна и непрерывна на $[0,1)$;

2) $\omega(0)=1$, $\int_0^1 \omega(x)\,dx < \infty$.

Далее, функцию $P(\tau)$ отнесем к классу $P_\omega$, если при некотором $\omega(x)\in\Omega$

$$P(0)=1,\ P(\tau)=\tau\int_\tau^1 \frac{\omega(x)}{x^2}dx,\ \tau\in(0,1],$$

и введем в рассмотрение ядро типа Коши - М. М. Джрбашяна

$$C(z,\omega)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Delta_k},|z|<1,$$

где

$$\Delta_0=1,\Delta_k=k\int_0^1\omega(x)x^{k-1}dx,k=1,2,3,\ldots$$

Ядро $C(z,\omega)$, как и ядро типа Шварца

$$C(z,\omega)=2C(z,\omega)-C(0,\omega)=1+2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Delta_k},\ |z|<1,$$

аналитические в круге $|z|<1$ функции с особенностями в точке $z=1$:

$$\lim_{r \to 1-0} C(r, \omega) = +\infty .$$

Введем в рассмотрение также гармоническое в круге $|z|<1$ ядро типа Пуассона

$$P(\gamma, r, \omega) = \operatorname{Re} S\left(re^{i\gamma}, \omega\right) = 1 + 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Delta_k} \cos k\gamma, z = re^{i\gamma} .$$

Введенные ядра- $C(z;\omega)$, $S(z;\omega)$ и $P(\gamma;r;\omega)$ называются ядрами М.М. Джрбашяна. Для любых $\omega(x) \in \Omega$ и $P(\tau) \in P_\omega$ введем в рассмотрение следующее обобщение интегродифференциального оператора Римана – Лиувилля:

$$L^{(\omega)}\{\phi(x)\} = -\frac{d}{dx}\left\{x\int_0^1 \phi(x\tau)\, dP(\tau)\right\}, x \in (0,1),$$

где функция $\phi(x)$, определенная на $(0,1)$, такова, что левая часть равенства существует почти всюду на $(0,1)$.

Как можно убедиться (см. [1-4]), применение оператора $L^{(\omega)}$ к любой функции $f(z)$, голоморфной в окрестности начала координат, означает умножение коэффициентов степенного ряда $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ на величины $\Delta_k$, т.е. $L^{(\omega)}\left[f(z)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Delta_k z^k$ .Применение же обратного оператора – суть деление коэффициентов степенного ряда на $\Delta_k$. Таким образом, оператор $L^{(\omega)}$ является взаимооднозначным отображением в классе голоморфных в $|z|<1$ функций.

Введем в рассмотрение элементарный фактор Бляшке – М. М. Джрбашяна

$$A_\omega(z,\xi) = \left(1 - \frac{z}{\xi}\right)\exp\left\{-W_\omega(z,\xi)\right\}, \left(|z|<1, |\xi|<1\right),$$

где

$$W_\omega(z,\xi) = \int_{|\xi|}^{1} \frac{\omega(x)}{x} dx - \sum_{k=1}^{\infty}\left[\xi^{-k}\int_0^{|\xi|} \omega(x) x^{k-1} dx - \bar{\xi}^k \int_{|\xi|}^{1} \omega(x) x^{-k-1} dx\right]\frac{z^k}{\Delta_k},$$

и отметим, что при $\omega(x) \equiv 1$ (см. [1, 2])

$$A(z,\xi) = A_\omega(z,\xi) = \frac{\xi - z}{1 - \bar{\xi}_z}\frac{|\xi|}{\xi}, \left(|z|<1, |\xi| \le 1\right),$$

Далее, будем предполагать, что последовательность комплексных чисел $\{z_k\}$ из единичного круга пронумерована в порядке неубывания модулей и удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{|z_k|}^{1}\omega(x)\,dx<\infty,$$

где $\omega(x)$ – функция класса $\Omega$. Тогда известно (см. [1-3]), что бесконечное произведение

$$B_\omega(z;z_k)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{-W_\omega(z,\xi)}$$

абсолютно и равномерно сходится в любом круге $|z|\le r<1$ и определяет функцию, аналитическую в $|z|<1$, с нулями $\{z_k\}$.

Обозначим через $\Omega^*$ подмножество функций $\omega(x)$ из класса $\Omega$, подчиненных дополнительному условию

$$|\omega(x)-1|\le k_\omega(\tau)x\,,\ (0\le x\le\tau<1),$$

где $k_\omega(\tau)>0$ – постоянная.

Пусть $F(z)=C_\lambda z^\lambda+C_{\lambda+1}z^{\lambda+1}+\ldots(C_\lambda\ne 0)$ – мероморфная в круге $|z|<1$ функция, $\{a_\mu\}$ и $\{b_\upsilon\}$ – соответственно последовательности ее нулей и плюсов, отличных от $z=0$ и пронумерованных в порядке неубывания модулей, с учетом кратностей.

Пусть $k_\omega=\int_0^1\frac{1-\omega(x)}{x}dx$. Введем в рассмотрение функции

$$N_\omega(\rho;0)\equiv N_\omega\left(\rho;\frac{1}{F}\right)=\sum_{0<|a_\mu|\le\rho}W_\omega\left(0;\frac{a_\mu}{\rho}\right)+n(0,0)(\ln\rho-k_\omega)=$$

$$=\int_0^\rho\frac{n(t;0)-n(0;0)}{t}\omega\left(\frac{t}{\rho}\right)dt+n(0;0)(\ln\rho-k_\omega),$$

$$N_\omega(\rho;\infty)\equiv N_\omega(\rho;F)=\sum_{0<|b_\upsilon|\le\rho}W_\omega\left(0;\frac{b_\upsilon}{\rho}\right)+n(0,\infty)(\ln\rho-k_\omega)=$$

$$=\int_0^\rho\frac{n(t;\infty)-n(0;\infty)}{t}\omega\left(\frac{t}{\rho}\right)dt+n(0;\infty)(\ln\rho-k_\omega),$$

$$m_\omega(\rho;0)\equiv m_\omega\left(\rho;\frac{1}{F}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}L_{(+)}^{(\omega)}\left\{\ln\frac{1}{\left|F\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|}\right\}d\theta,$$

$$m_\omega(\rho;\infty)\equiv m_\omega(\rho;F)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}L_{(+)}^{(\omega)}\left\{\ln\left|F\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|\right\}d\theta,$$

где для каждого $t(0<t<1)$ через $n(t;0)$ и $n(t;\infty)$ обозначены соответственно количество нулей и плюсов функции $F(z)$ в круге $|z|\le t$. Для любого $\omega(x)\in\Omega^*$ положим

$$T_\omega(\rho;F)\equiv m_\omega(\rho;F)+N_\omega(\rho;F),\ 0<p<1.$$

Легко видеть, что $\left[T_\omega(\rho;F)\right]_{\omega\equiv1}\equiv T(\rho;F)$, где $T(\rho;F)$ – характеристическая функция Неванлинны [5].

В предположении, что функция $\omega(x)$ из класса $\Omega$ или класса $\Omega^*$, через $N\{\omega\}$ и $N^*\{\omega\}$ соответственно обозначим множества мероморфных в единичном круге $|z|<1$ функций $F(z)$ с ограниченной характеристической функцией $T_\omega(\rho, f)$, а через $A_\omega$ и $A_\omega^*$ – подмножества аналитических в |z|<1 функций из $N\{\omega\}$ и $N^*\{\omega\}$.

Скажем, что аналитическая в единичном круга функция $f(z)$ на последовательности $\{\lambda_i\}\subset D$ имеет порядок $C$-роста $\nu$, если

$$\underline{lim}\left[C\left(\lambda_i;\omega\right)\right]^{-\upsilon} L_{(+)}^{(\omega)}\left\{ln\left|f\left(\lambda_i\right)\right|\right\}>0$$

Скажем, что $\omega$-характеристика аналитической в единичном круге функции $f(z)$ имеет порядок $C$-роста $\nu$, если

$$\overline{lim}\frac{ln\,T_\omega\left(r,f\right)}{ln\,C\left(r,\omega\right)}=\nu\ .$$

Заметим, что при $\omega=1$ эти определения совпадают с обычными определениями роста функции на последовательности и роста характеристики Неванлинны (см. [6], с. 13). Эти определения были введены совместно с академиком В. С. Захаряном.

**Основной результат. Лемма.** *Пусть* $\omega\in\Omega$ *неубывающая функция,* $f(z)=\exp S(z;\omega)$, *последовательность* $\{\lambda_n\}$ *лежит в некотором угле Штольца и пусть* $\nu$ *– порядок* $C$*-роста функции* $f$ *на последовательности* $\{\lambda_n\}$*. Тогда* $C$*-рост* $\omega$*-характеристики равен нулю.*

**Доказательство.** Нетрудно увидеть, что

$$\lim_{r\to1}\frac{\ln T_\omega(r,f)}{\ln C(r;\omega)}=\lim_{r\to1}\frac{\ln\left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}P(\gamma;r;1)d\gamma\right)}{\ln C(r;\omega)}=$$

$$=\lim_{r\to1}\frac{\ln\left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\gamma+r^2}d\varphi\right)}{\ln C(r;\omega)}=0$$

Лемма доказана.

**Замечание.** Утверждение леммы верно независимо от густоты последовательности $\{\lambda_n\}$.

Теперь докажем, что если точки $\lambda_i$ соответствующим образом разбросаны в единичном круге, то высокий $C$-рост функции $f(z)$ на последовательности $\{\lambda_i\}$ вызовет более высокий $C$-рост $\omega$-характеристики $T_\omega(r,f)$, чем в примере, приведенном в лемме.

**Теорема.** *Пусть* $f(z)$ – *аналитическая в единичном круге функция, нули которой удовлетворяют условию*

$$\sum_{\mu}\int_{a_\mu}^{1}\omega(x)dx < +\infty ,$$

$\omega(x)\in \Omega^{*}$ – неубывающая функция и пусть $\{\alpha_i\}$–последовательность неубывающих положительных чисел, таких, что $\alpha_i \to 1$ при $i \to +\infty$ и

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[C(\alpha_i;\omega)\right]^{-1} < +\infty ,$$

где $C(z;\omega)$–ядро М. М. Джрбашяна.

Тогда существует комплексная последовательность $\{\lambda_i\}$, $|\lambda_i| = \alpha_i$, такая, что $C$-порядок $\omega$-характеристики функции $f$ не меньше $\nu - 1 + \beta$, если

(i ) $$\underline{\lim}\left[C(\alpha_i;\omega)\right]^{-\nu}\cdot L^{(\omega)}_{(+)}\{\ln|f(\lambda_i)|\} = H > 0$$

(ii) $$\overline{\lim}\frac{\ln n(r,f)}{\ln C(r,\omega)} = \beta, \qquad \beta \le 1 ,$$

здесь $n(r,\alpha)$ обозначает количество точек $\alpha_i$ в круге радиуса $r$.

**Доказательство.** Из условия (ii) следует, что существует последовательность $\{r_n\}\uparrow 1$ такая, что

$$n(r_n;\alpha)\cdot\left[C(r_n;\omega)\right]^{-\beta} \to 1.$$

Пусть количество точек $\alpha_i$ в круге радиуса $r_n$ равно N. Тогда

$$N\left[C(\alpha_N;\omega)\right]^{-\beta} \ge n(r_n;\alpha)\cdot\left[C(r_n;\omega)\right]^{-\beta} .$$

Это означает, что для любого числа $\varepsilon, \varepsilon > 0$

$$\overline{\lim_{i\to+\infty}}\, i\left[C(\alpha_i;\omega)\right]^{-\beta-\varepsilon} = +\infty .$$

Следовательно, можно указать такие числа $i_1, i_2, ..., i_n, ...,$, что для $j < i_n$

$$j\cdot\left[C(\alpha_j;\omega)\right]^{-\beta-\varepsilon} \le i_n\left[C(\alpha_{i_n};\omega)\right]^{-\beta-\varepsilon}$$

В силу последнего неравенства для $r < \alpha_{i_n}$ имеем

$$n(r;\alpha)\cdot\left[C(r;\omega)\right]^{-\beta-\varepsilon} \le i_n\left[C(\alpha_{i_n};\omega)\right]^{-\beta-\varepsilon} = t_n \to +\infty \qquad (1)$$

Выберем $r$ и последовательность $\{R_n\}$ следующим образом

$$\left[C(r;\omega)\right]^{-1} = 2\left[C(\alpha_{i_n};\omega)\right]^{-1} = 4\left[C(R_n;\omega)\right]^{-1} , \qquad (2)$$

тогда из (1) получаем

$$i_n = t_n\left[C(\alpha_{i_n};\omega)\right]^{\beta+\varepsilon} = \frac{1}{2^{\beta+\varepsilon}}t_n\cdot\left[C(R_n;\omega)\right]^{\beta+\varepsilon} ,$$

$$n(r;\alpha)\leq\frac{1}{4^{\beta+\varepsilon}}t_n\left[C(R_n;\omega)\right]^{\beta+\varepsilon}.$$

Пусть $L_n$ – количество точек $\alpha_i$ лежащих в промежутке $\left[r,\alpha_{i_n}\right]$, тогда

$$L_n=i_n-n(r,\alpha)\geq\left(\frac{1}{2^{\beta+\varepsilon}}-\frac{1}{4^{\beta+\varepsilon}}\right)t_n\cdot\left[C(R_n;\omega)\right]^{\beta+\varepsilon}\qquad(3)$$

Ясно, что

$$\sum_{i=1}^{i_n}\left[C(\alpha_i;\omega)\right]^{-1}L_{(+)}^{(\omega)}\{\ln|f(\lambda_i)|\}\geq\sum_{r\leq\alpha_i\leq\alpha_{i_n}}\left[C(\alpha_i;\omega)\right]^{-1}\cdot L_{(+)}^{(\omega)}\{\ln|f(\lambda_i)|\}=$$

$$=\sum_{r\leq\alpha_i\leq\alpha_{i_n}}\left[C(\alpha_i;\omega)\right]^{-\nu}\cdot L_{(+)}^{(\omega)}\{\ln|f(\lambda_i)|\}\cdot\left[C(\alpha_i;\omega)\right]^{\nu-1}\qquad(4)$$

Отсюда в случае, когда $\nu\geq1$, пользуясь условием (i) теоремы, получаем

$$\sum_{i=1}^{i_n}\left[C(\alpha_i;\omega)\right]^{-1}L_{(+)}^{(\omega)}\{\ln|f(\lambda_i)|\}\geq\left[C(\alpha_{i_n};\omega)\right]^{\nu-1}(H-\delta)\cdot L_n,$$

где $\delta$ – любое положительное число такое, что $H-\delta>0$. Из последнего неравенства и из (2), (3) имеем

$$\sum_{i=1}^{i_n}\left[C(\alpha_i;\omega)\right]^{-1}L_{(+)}^{(\omega)}\{ln|f(\lambda_i)|\}\geq\frac{(H-\delta)}{2}\cdot\left(\frac{1}{2^{\beta+\varepsilon}}-\frac{1}{4^{\beta+\varepsilon}}\right)\cdot$$
$$\cdot t_n\cdot\left[C(R_n;\omega)\right]^{\beta+\varepsilon+\nu-1}.$$

Теперь пусть $0<\nu<1$, тогда из (4) получим

$$\sum_{i=1}^{i_n}\left[C(\alpha_i;\omega)\right]^{-1}L_{(+)}^{(\omega)}\{\ln|f(\lambda_i)|\}\geq\left[C(r;\omega)\right]^{\nu-1}(H-\delta)\cdot L_n,$$

Отсюда, пользуясь (2) и (3), получаем

$$\sum_{i=1}^{i_n}\left[C(\alpha_i;\omega)\right]^{-1}L_{(+)}^{(\omega)}\{\ln|f(\lambda_i)|\}\geq\frac{(H-\delta)}{4}\cdot\left(\frac{1}{2^{\beta+\varepsilon}}-\frac{1}{4^{\beta+\varepsilon}}\right)\cdot t_n\cdot\left[C(R_n;\omega)\right]^{\beta+\varepsilon+\nu-1}.$$

Таким образом, для любого положительного числа существует $k$, $k>1$, такое что

$$\sum_{i=1}^{i_n}\left[C(\alpha_i;\omega)\right]^{-1}L_{(+)}^{(\omega)}\{\ln|f(\lambda_i)|\}\geq k\cdot\left[C(R_n;\omega)\right]^{\nu-1+\beta+\varepsilon}.$$

Так как это неравенство верно для любого $\varepsilon$, $\varepsilon>0$, то

$$\sum_{i=1}^{i_n}\left[C(\alpha_i;\omega)\right]^{-1}L_{(+)}^{(\omega)}\{\ln|f(\lambda_i)|\}\geq k\cdot\left[C(R_n;\omega)\right]^{\nu-1+\beta}.$$

Но из неравенства (16) работы [5] имеем

$$\sum_{1-\alpha_i\geq2[C(R_n;\omega)]^{-1}}\left[C(\alpha_i;\omega)\right]^{-1}L_{(+)}^{(\omega)}\{ln|f(\lambda_i)|\}\leq$$

$$\leq const \int_0^{2\pi} L_{(+)}^{(\omega)} \left\{ ln \left| f\left(R_n e^{i\varphi}\right) \right| \right\} d\varphi = const T_\omega \left(R_n; f\right).$$

Из последних двух неравенств нетрудно увидеть, что

$$\overline{\lim_{r \to 1}} \frac{ln\, T_\omega \left(r; f\right)}{ln\, C\left(r; \omega\right)} \geq \nu - 1 + \beta .$$

Государственный инженерный университет Армении

**Р. В. Даллакян**

## О $C$-росте $\omega$-характеристик аналитических в единичном круге функций

Доказано, что если точки $\lambda_i$ соответствующим образом разбросаны в единичном круге, то высокий $C$-рост аналитической в единичном круге функции $f(z)$ в точках $\lambda_i$ вызовет более высокий $C$-рост $\omega$-характеристики, чем в примере $exp\left[C\left(z; \omega\right)\right]$, где $\omega\left(x\right) \in \Omega^*$ – неубывающая функция.

Для специального случая $\omega\left(x\right) \equiv 1$ это утверждение доказано А. Г. Нафталевичем.

**Ռ. Վ. Դալլաքյան**

## Միավոր շրջանում անալիտիկ ֆունկցիաների $\omega$-բնութագրիչների $C$-աճի մասին

Ապացուցված է, որ եթե $\lambda_i$ կետերը համապատասխան ձևով են ընկած միավոր շրջանում, ապա $f(z)$ անալիտիկ ֆունկիցիայի ավելի մեծ $C$-աճի $\{\lambda_i\}$ հաջորդականության վրա կհամապատասխանի $\omega$-բնութագրիչի ավելի մեծ $C$-աճ քան $\exp[C(z; \omega)]$, $\omega(x) \in \Omega^*$ օրինակում:

**R. V. Dallakyan**

## About $C$-Height of $\omega$-Characteristics of Analytical in the Unit Circle Functions

It is proved that if the $\lambda_i$ points are properly dispersed in the unit circle, the high $C$-growth analysis in the unit disk in the $\lambda_i$ points will cause higher $C$- growth $\omega$- performance than in the $exp\left[C\left(z; \omega\right)\right]$ example, where a $\omega\left(x\right) \in \Omega^*$ non-decreasing function.

For a special occasion $\omega\left(x\right) \equiv 1$ it has been proved by A. Naftalevich.

## Литература


1. *Джрбашян М. М.* – Матем. сб.1969. Т. 79(121). С. 517-615.
2. *Джрбашян М. М., Захарян В. С.* Классы и граничные свойства функций, мероморфных в круге. М. Изд. фирма “Физ.-мат. лит.” ВО “Наука”. 1993.
3. *Джрбашян М. М., Захарян В. С.* – Изв. АН СССР. Серия математическая. 1970. Т. 34. С. 1262-1339.
4. *Джрбашян А. М., Захарян В. С.* – Изв. НАН Армении. Математика.2009. Т. 44. N 6. С. 5-62.
5. *Захарян В. С., Джрбашян А. М., Даллакян Р. В.* – ДНАН Армении. 2013. Т. 113. N 1. С. 22-29.
6. *Нафталевич А. Г.* – Уч. зап. Вильнюсского ун.-та. 1956. N 5. С. 5-27.